Corrigé Centrale 2017 MP Maths 1

Pour gagner du temps, on notera $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}_{n,p} = \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et la norme 2 des matrices sera notée $\| \ \|$ tout simplement.

I Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

I.A.1) L'énoncé nous rappelle que $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$, donc $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires. Si $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$, $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}((A^T B)^T) = \operatorname{tr}(B^T A) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB)$, d'où $\langle A, B\rangle = 0$, donc $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux. Classiquement, $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

I.A.2) $A - S = A_s - S + A_a$, avec $A_s - S$ orthogonal à A_a donc $\|A - S\|^2 = \|A_s - S\|^2 + \|A_a\|^2$, d'où $\|A - A_s\| \leqslant \|A - S\|$ avec égalité si et seulement si $S = A_s$.

I.B - Valeurs propres de A_s

I.B.1) Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres colonnes de A, pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, positives par hypothèse. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ que l'on décompose dans cette base sous la forme $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. Alors $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$.

Inversement, si $\forall X,\ X^T A_s X \geqslant 0$, on l'applique à un vecteur propre V_i et on obtient $\lambda_i \geqslant 0$, d'où l'équivalence.

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on obtient de même la seconde équivalence.

I.B.2) On utilisera dans la suite le résultat suivant : si A est une matrice antisymétrique réelle et X un vecteur colonne, alors $X^T A X = 0$. En effet, $X^T A X = (X^T A X)^T = X^T(-A)X$, d'où $X^T A X = 0$.

On l'applique à un vecteur propre de A pour la valeur propre λ : $X^T A X = X^T A_s X = \lambda \|X\|^2$ et $X^T A X = X^T A_s X$. Avec les notations du B.1 (dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_s), $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$, d'où $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, d'où $\min \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2 \leqslant X^T A_s X \leqslant \max \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2$, d'où $\min \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leqslant \lambda \leqslant \max \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.

I.B.3) *a)* D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A_s = PDP^{-1}$ et les λ_i sont strictement positifs d'après B.1. On note B la matrice $P \operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$. Alors B est symétrique, définie positive d'après B.1, et $B^2 = A_s$.

L'unicité est classique et est souvent proposée comme complément de cours.

b) $A = A_s + A_a = B(I_n + B^{-1}A_a B^{-1})B$. On pose $Q = B^{-1}A_a B^{-1}$, Q est antisymétrique et $\det A = (\det B)^2 \det(I_n + Q) = \det A_s \det(I_n + Q)$.

c) Soit $Q \in \mathcal{A}_n$. D'après B.2, la seule valeur propre réelle possible de Q est 0 et $-Q^2$ est symétrique positive car $X^T Q^2 X = -\|QX\|^2 \leqslant 0$, donc en trigonalisant Q, on en déduit que chaque valeur propre non nulle de Q est imaginaire pur car son carré est réel négatif.
Si λ est imaginaire pur, $(1+\lambda)(\overline{1+\lambda}) \geqslant 1$. Comme le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité), on en déduit en groupant chaque valeur propre avec son conjugué (même ordre de multiplicité) que $\det(I_n + Q) \geqslant 1$, or $\det A_s > 0$, d'où $\det A \geqslant \det A_s$.

I.B.4) La matrice $B = A(A^{-1})_s A^T$ est symétrique et $A(A^{-1})_a A^T$ est antisymétrique. $A^{-1} = (A^{-1})_s + (A^{-1})_a$, d'où $B = A^T - A(A^{-1})_a A^T$, d'où $A^T = B + A(A^{-1})_a A^T$. Or $A^T = A_s - A_a$, d'où par unicité de la décomposition, $A_s = B = A(A^{-1})_s A^T$. On en déduit $\det(A_s) = \det(A)\det((A^{-1})_s)\det(A^T) = (\det A)^2 \det((A^{-1})_s)$.

I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Soit λ une valeur propre de A_s et X un vecteur propre associé. On a $X^T AX = X^T A_s X + X^T A_a X = X^T A_s X = \lambda \|X\|^2$, or $|X^T AX| = |\langle X, AX\rangle| \leqslant \|X\| \, \|AX\|$ par Cauchy-Schwarz, d'où $|X^T AX| \leqslant \|X\|^2$, d'où $|\lambda| \leqslant 1$, d'où $\lambda \in [-1, 1]$.

I.C.2) Si $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A_s = (\cos\theta) I_2$ donc $\operatorname{Sp} A_s = \{\cos\theta\}$. Si $A = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $A_s = A$ et $\operatorname{Sp} A_s = \{-1, 1\}$.

Pour avoir un contre-exemple, il suffit de prendre $S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $0 < \lambda < 1$ et $-1 < \mu < 0$.

I.C.3) *a)* Par théorème spectral, en groupant les valeurs propres distinctes de ± 1 par deux, il existe P orthogonale telle que $S = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1 I_2, \dots, \lambda_k I_2, I_p, -I_q)$.
Pour tout i, il existe θ_i tel que $\lambda_i = \cos\theta_i$. On pose $A_s = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \operatorname{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, I_p, -I_q)$ et $A_a = PBP^{-1}$ avec $B = \operatorname{Diag}(B_{\theta_1}, \dots, B_{\theta_k}, 0)$ avec $B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A_s = S$, la matrice A_a est antisymétrique et $A = A_s + A_a$ est orthogonale.

b) Par le théorème de réduction des matrices orthogonales, il existe P orthogonale telle que $P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, I_p, -I_q)$. On en déduit $A_s = P \operatorname{Diag}((\cos\theta_1) I_2, \dots, (\cos\theta_k) I_2, I_p, -I_q) P^{-1}$, or $A_s = S$ d'où $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} S \subset \{-1, 1\}$. Les valeurs propres de S autres que ± 1 apparaissent par deux dans la forme diagonalisée, donc les espaces propres associés sont de dimension paire (la dimension est égale à l'ordre de multiplicité car S est diagonalisable).

II Matrices F−singulières

II.A - Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Soit X un vecteur colonne non nul. On a l'équivalence : $AX = 0 \iff \forall Z \in E_n,\ Z^T AX = 0$, donc A est singulière si et seulement si A est E_n-singulière.

II.A.2) Comme H est un hyperplan, $H^\perp = \operatorname{Vect} N$.

Si A est H-singulière, il existe X non nul tel que $AX \in H^\perp$, d'où l'existence d'un réel λ tel que $AX = \lambda N$.

Inversement, si $AX = \lambda N$, alors $AX \in H^\perp$, d'où A est H-singulière.

II.A.3) Si A est H-singulière, on écrit $AX = \lambda N$, de sorte que $A_N \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda N \\ N^T X \end{pmatrix} = 0$, or X est non nul, donc A_N est singulière.

Le raisonnement se remonte : si A_N est singulière, il existe $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}$ non nul tel que $A_N Y = 0$, d'où $AX = -\alpha N$ et X orthogonal à N, de plus $X \neq 0$ (car sinon, $\alpha = 0$ d'où $Y = 0$), donc A est H-singulière.

II.A.4) Avec les notations de l'énoncé, $A_N B = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N^T B_1 & N^T B_2 \end{pmatrix}$.

On pose $B_1 = A^{-1}$, $B_2 = -A^{-1}N$, $B_4 = 1$ et on choisit pour B_3 un vecteur ligne orthogonal à N. On obtient alors $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A_1^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix}$.

II.A.5) Avec les notations précédentes, $B \begin{pmatrix} I_n & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. En calculant le déterminant par blocs, $\det B = \det(A^{-1})$. D'autre part, $\det(A_N B) = -N^T A^{-1} N$, d'où $\det A_N = -N^T A^{-1} N (\det A)$.

II.A.6) Par hypothèse, il existe $N \in E_n$ non nul tel que $(A^{-1})_s N = 0$, d'où $N^T A^{-1} N = N^T A_s^{-1} N = 0$, d'où $\det A_N = 0$. D'après A.3, A est H-singulière, où H est l'hyperplan orthogonal à N.

II.A.7) Si $\det A_s = 0$, d'après I.B.4, sachant que $\det A \neq 0$, on a $\det((A^{-1})_s) = 0$, donc on peut appliquer la question précédente.

II.A.8 Si A était H-singulière pour un certain hyperplan H, en notant N un vecteur unitaire orthogonal à H, il existerait X non nul dans H et λ réel tels que $AX = \lambda N$, d'où $X^T A_s X = X^T AX = \lambda X^T N = 0$, or A_s est définie positive, donc $X = 0$: contradiction.

II.B - Exemple

II.B.1) Après calcul, $\det A(\mu) = 1$ donc $A(\mu)$ est inversible.

II.B.2) $A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \frac{1}{2}\mu \\ -1 & 2-\mu & \frac{1}{2}\mu - 1 \\ \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\mu - 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A(\mu)_s = \frac{1}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu^2 + 1 = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu^2 - 2\mu - 2)$. On en déduit que $A(\mu)_s$ est singulière si et seulement si $\det A(\mu)_s = 0$, c'est-à-dire $\mu \in \{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$.

II.B.3) $A = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Après calcul, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $(A^{-1})_s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après A.5, on cherche N non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(A^{-1})_s$, le vecteur colonne $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient, d'où l'hyperplan H d'équation $z = 0$. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in H$, $AX = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -y \end{pmatrix}$, donc le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à H et $AX = -N$, donc A est H-singulière.

II.C - Cas où F est de dimension $n-2$

II.C.1) A est F-singulière $\iff \exists X \in F \setminus \{0\},\ AX \in F^\perp \iff \exists X \in F \setminus \{0\},\ \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

II.C.2) Si A est F-singulière, on écrit $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$, de sorte que $A_N \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ N_1^T X \\ N_2^T X \end{pmatrix} = 0$, or X est non nul, donc A_N est singulière.

Le raisonnement se remonte : si A_N est singulière, il existe $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ non nul tel que $A_N Y = 0$, d'où $AX = -\alpha N_1 - \beta N_2$ et X orthogonal à N_1 et à N_2 donc $X \in H$, de plus $X \neq 0$ (car sinon, $\alpha = \beta = 0$ car (N_1, N_2) est libre, d'où $Y = 0$), donc A est F-singulière.

II.C.3) La démarche est analogue à celle de la question II.A.4.
On pose $B_1 = A^{-1}$, $B_2 = -A^{-1}N = \begin{pmatrix} -A^{-1}N_1 & -A^{-1}N_2 \end{pmatrix}$, $B_4 = I_2$ et on choisit $B_3 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ avec L_i vecteur ligne orthogonal à N_i pour $i \in \{1, 2\}$. On obtient alors le résultat attendu.

II.C.4) Comme au II.A.5, $B \begin{pmatrix} I_n & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\det B = \det(A^{-1})$. D'autre part, $\det(A_N B) = \det(-N^T A^{-1} N) = \det(N^T A^{-1} N)$, d'où $\det A_N = \det(N^T A^{-1} N) \det A$.

II.C.5) Soit $P \in \mathcal{G}_{n,2}$ tel que $\det(P^T A^{-1} P) = 0$. En transposant, on obtient $\det(P^T (A^{-1})^T P) = 0$.
On pose $P' = (A^{-1})^T P$, qui appartient à $\mathcal{G}_{n,2}$ car A est inversible. Alors $P'^T A P' = P^T A^{-1} A (A^{-1})^T P = P^T (A^{-1})^T P$ d'où $\det(P'^T A P') = 0$. L'implication inverse est identique en changeant A en A^{-1}.

II.C.6) $N'^T A N' = \begin{pmatrix} N_1'^T \\ N_2'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AN_1' & AN_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1'^T A N_1' & N_1'^T A N_2' \\ N_2'^T A N_1' & N_2'^T A N_2' \end{pmatrix}$.
$\det(N'^T A N') = (N_1'^T A N_1')(N_2'^T A N_2') - (N_2'^T A N_1')(N_1'^T A N_2')$.

Or ${N_2'}^T A N_1' = {N_2'}^T A_s N_1' + {N_2'}^T A_a N_1' = {N_1'}^T A_s N_2' - {N_1'}^T A_a N_2'$ en transposant.
${N_1'}^T A N_2' = {N_1'}^T A_s N_2' + {N_1'}^T A_a N_2'$.
En multipliant, on obtient $({N_2'}^T A N_1')({N_1'}^T A N_2') = ({N_1'}^T A_s N_2')^2 - ({N_1'}^T A_a N_2')^2$.

Comme ${N_1'}^T A N_1' = {N_1'}^T A_s N_1'$, on en déduit que :

$\det(N'^T A N') = ({N_1'}^T A_s N_1')({N_2'}^T A_s N_2') - ({N_1'}^T A_s N_2')^2 + ({N_1'}^T A_a N_2')^2$.

II.C.7) Comme A_s est définie positive, l'application $(X, Y) \mapsto X^T A_s Y$ est un produit scalaire sur E_2 : il suffit pour le justifier d'orthodiagonaliser A_s dans une base (V_1, V_2) et d'écrire $X = x_1 V_1 + x_2 V_2$ pour obtenir $X^T A_s X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ avec λ_1 et λ_2 valeurs propres de A_s strictement positives.

Par Cauchy-Schwarz appliqué à ce produit scalaire, on en déduit que $({N_1'}^T A_s N_2')^2 < ({N_1'}^T A_s N_1')({N_2'}^T A_s N_2')$, l'inégalité stricte venant du fait que N_1' et N_2' ne sont pas colinéaires.
On en déduit que $\det(N'^T A N') > 0$ pour $N' = \begin{pmatrix} N_1' & N_2' \end{pmatrix} \in \mathcal{G}_{n,2}$.

En appliquant la question C.5, on en déduit que $\det(N^T A^{-1} N) > 0$ pour tout $N \in \mathcal{G}_{n,2}$.

II.C.8 D'après les questions C.7 et C.4, si F est de dimension $n-2$, $\det A_N > 0$, donc A est F-régulière.

II.D - Exemple

II.D.1) $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, on choisit $N_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\operatorname{Ker} A_s$. $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $N_2' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non colinéaire à N_1' tel que ${N'}_1^T A_s N'_2 = {N'}_1^T A_a N_2' = 0$. La condition ${N'}_1^T A_s N_2' = 0$ est vérifiée (il suffit de transposer) et la seconde condition se traduit par $z = 0$, on choisit donc $N_2' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x \neq y$, par exemple $N_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après C.6, on a alors $\det(N'^T A N') = 0$.

II.D.2) On pose alors $N = A^T N' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après C.5, $\det(N^T A^{-1} N) = \det(N'^T A N') = 0$.

D'après C.4, $\det(A_N) = 0$, donc $F = \operatorname{Vect}(N_1, N_2)^\perp$ est tel que A est F-singulière.
Ici, $F = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -N_1$, ce qui confirme que A est F-singulière.

II.E - Cas général

II.E.1) On se place toujours dans le cas où A est inversible.
On note $(N_1, \dots, N_p)$ une base de $F^\perp$ et N la matrice $\begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_p \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{G}_{n,p}$.

En posant $\underline{N' = (A^{-1})^T N}$, on a bien $N' \in \mathcal{G}_{n,p}$ et $N'^T A N' = N^T (A^{-1})^T N = (N^T A^{-1} N)^T$, d'où $\det(N' A^T N') = \det(N^T A^{-1} N)$.
En suivant la même démarche qu'au II.A et II.C, on voit que A est F-singulière si et seulement si $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}$ est singulière. En introduisant comme au II.A et II.C une matrice B judicieuse, on obtient que $\det(A_N) = \det(-N^T A^{-1} N) \det(A)$, donc A est F-singulière si et seulement si $\det(N' A^T N') = 0$.

II.E.2) On observe d'abord que $N' \in \mathcal{M}_{n,p}$ est de rang p donc est injective par théorème du rang.
Comme $N'^T A_a N'$ est antisymétrique, $X^T N'^T A N' X = X^T N'^T A_s N' X = (N'X)^T A_s (N'X) > 0$ car $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $N'X \neq 0$ car $X \neq 0$ et N' injective.

II.E.3) Si λ est valeur propre réelle de $N'^T A N'$ pour un vecteur propre X, on a $X^T N'^T A N' X = \lambda \|X\|^2$ et $X^T N'^T A N' X > 0$ d'après E.2, donc $\lambda > 0$.

II.E.4) On peut grouper chaque valeur propre non réelle de $N'^T AN'$ avec sa conjuguée (les deux ayant même ordre de multiplicité), le produit est donc un réel > 0. Comme les valeurs propres réelles sont > 0 d'après E.3, et que le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité), on en déduit que $\det(N'^T AN') > 0$.

II.E.5) D'après E.1 et E.4, A est F-régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$.

III Matrices positivement stables

III.A - Exemples

III.A.1) $\chi_A(X) = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A$. On note λ et μ les valeurs propres, éventuellement confondues, de A. On a $\lambda + \mu = \operatorname{tr} A$ et $\lambda\mu = \det A$.

Si λ et μ sont réelles, elles sont strictement positives si et seulement si leur somme et leur produit le sont, c'est-à-dire $\operatorname{tr} A > 0$ et $\det A > 0$.

Sinon, μ est conjugué de λ et $\lambda\mu = \det A > 0$, donc $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$. D'où l'équivalence.

III.A.2) *a)* On choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$. 1 est la seule valeur propre de A, et de même pour B, donc A et B sont positivment stables, mais $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 4 donc n'est pas positivement stable.

b) Soit λ une valeur propre de $A+B$, l'espace propre $E_\lambda(A+B)$ est stable par A car A commute avec $A+B$. On peut considérer une valeur propre complexe λ_1 de la restriction de A à $E_\lambda(A+B)$ et un vecteur propre V associé. On a alors $BV = (A+B)V - AV = (\lambda - \lambda_1)V$, donc λ_1 est valeur propre de A et $\mu_1 = \lambda - \lambda_1$ est valeur propre de B, d'où $\operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda_1) + \operatorname{Re}(\mu_1) > 0$. On en déduit que $A + B$ est positivement stable.

III.A.3) *a)* $\overline{X}^T AX = (Y^T - iZ^T)A(Y + iZ)$, d'où $\operatorname{Re}(\overline{X}^T AX) = Y^T AY + Z^T AZ = Y^T A_s Y + Z^T A_s Z \geqslant 0$ et ne peut s'annuler que si Y et Z sont nuls car A_s est définie positive, donc si $X \neq 0$, alors $\operatorname{Re}(\overline{X}^T AX) > 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A et $X = Y + iZ$ un vecteur propre associé. $AX = \lambda X$ d'où $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X = \lambda(\|Y\|^2 + \|Z\|^2)$, d'où $\operatorname{Re}(\overline{X}^T AX) = \operatorname{Re}(\lambda)(\|Y\|^2 + \|Z\|^2)$. Comme $\|Y\|^2 + \|Z\|^2 > 0$, on déduit du a) que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ donc A est positivement stable.

III.A.4) On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est positivement stable, mais $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est singulière donc n'est pas définie positive.

III.B -

III.B.1) La solution générale de l'équation différentielle $y' + \lambda y = v$ s'écrit $y(x) = e^{-\lambda x} \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t} v(t)dt + Ae^{-\lambda x}$ où A est un scalaire, donc u est de cette forme.

On suppose $x \geqslant 0$: $|e^{-\lambda x}| = e^{-\operatorname{Re}(\lambda)x} \leqslant 1$. $\left| e^{-\lambda x} \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t} v(t)dt \right| \leqslant \|v\|_\infty \displaystyle\int_0^x e^{\operatorname{Re}(\lambda)(t-x)}\, dt = \dfrac{\|v\|_\infty}{\operatorname{Re}(\lambda)}(1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda)x)}) \leqslant \dfrac{\|v\|_\infty}{\operatorname{Re}(\lambda)}$. Il en résulte que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.2) A la dernière ligne, on obtient $u_n' + \lambda_n u_n = 0$, donc $u_n(t) = Ae^{-\lambda_n t}$, donc u_n est bornée.
Si $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{i+1}$ sont bornées, on obtient à la ligne i que $u_i' + \lambda_i u_i = -\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} u_j$, or -$\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} u_j$ est bornée donc d'après B.1, u_i est bornée.

Par récurrence descendante, on en déduit que les fonctions u_i, où i décrit $[\![1\,, n]\!]$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.3) On observe déjà que $e^{\alpha t}\exp(-tA) = \exp(-t(A - \alpha I_n))$ car les deux fonctions de t de part et d'autre de l'égalité sont solutions du même problème de Cauchy linéaire ($M' + (A - \alpha I_n)M = 0$, $M(0) = I_n$) dans $\mathcal{M}_n$ donc sont égales par théorème de Cauchy linéaire.

On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, d'où $A - \alpha I_n = P(T - \alpha I_n)P^{-1}$. Cela entraîne $\exp(-t(A - \alpha I_n)) = P\exp(-t(T - \alpha I_n))P^{-1}$ (élever à la puissance k, sommer puis passer à la limite).

Soit X appartenant à E_n. La fonction $U : t \mapsto \exp(-t(T-\alpha I_n))X$ vérifie $U'(t)+(T-\alpha I_n)U(t) = 0$ et les valeurs propres de $T - \alpha I_n$ sont de parties réelles > 0 donc par la question B.2, U est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En prenant pour X les vecteurs de la base canonique de E_n, on en déduit que la fonction $t \mapsto \exp(-t(T - \alpha I_n))$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Il résulte alors des remarques initiales que $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$ est également bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C.1) On définit $f : M \mapsto A^T M$ et $g : M \mapsto MA$: f et g sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si P est un polynôme, $P(f)$ est l'endomorphisme $M \mapsto P(A^T)M$ et $P(g)$ est l'endomorphisme $M \mapsto MP(A)$. On en déduit que A, f et g ont les mêmes polynômes annulateurs, donc les mêmes valeurs propres (car ce sont les racines du polynôme minimal), donc f et g sont positivement stables. Comme f et g commutent et que $\Phi = f + g$, on déduit de la question A.2.b que Φ est positivement stable.

III.C.2) *a)* D'après C.1, 0 n'est pas valeur propre de Φ, donc Φ est un isomorphisme et donc I_n admet un unique antécédent par Φ, d'où l'existence d'une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T B + BA = I_n$.

b) En transposant, on obtient $\Phi(B) = I_n = B^T A + A^T B^T = \Phi(B^T)$, donc $B = B^T$ par injectivité de Φ, d'où B est symétrique.

On a $B(A + B^{-1}A^T B) = I_n$, donc B est inversible.

La relation s'écrit $BA + (BA)^T = I_n$, donc par unicité de la décomposition dans $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, on obtient $BA = \frac{1}{2}I_n + D$ avec D antisymétrique. En passant au déterminant, on obtient $2^n(\det A)(\det B) = \det(I_n + 2D) \geqslant 2^n$ d'après I.B. Les valeurs propres de A sont de partie réelle > 0, donc en groupant les valeurs propres non réelles avec leurs conjuguées et en les multipliant, on obtient $\det A > 0$, ce qui entraîne $\det B > 0$.

III.C.3) *a)* Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est symétrique et positive car pour $X \in E_n\backslash\{0\}$, $X^T M^T M X = \|MX\|^2 > 0$.

Comme $(\exp(-tA))^T = \exp(-tA^T)$ (on écrit $\frac{1}{k!}((-tA)^k)^T = \frac{1}{k!}(-tA^T)^k$, on somme de $k = 0$ à K puis on fait tendre K vers $+\infty$), en posant $M = \exp(-tA)$, M est inversible (d'inverse $\exp(tA)$) et $V(t) = M^T M$, donc $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

La transposition des matrices est linéaire, donc $W(t)^T = \displaystyle\int_0^t V(s)^T ds = W(t)$.

Pour $X \in E_n \setminus \{0\}$, $X^T W(t) X = \displaystyle\int_0^t X^T V(s) X\, ds$. La fonction intégrée est continue strictement positive donc $X^T W(t) X > 0$ donc $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}$.

b) D'après les rappels, $V'(t) = -A^T V(t) - V(t)A$, donc $A^T W(t) + W(t)A = \displaystyle\int_0^t (A^T V(s) + V(s)A)\, ds = \int_0^t -V'(s)\, ds = V(0) - V(t) = I_n - V(t)$.

c) D'après B.3, en choisissant α tel que $0 < \alpha < \min_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{Re}(\lambda_j)$, on obtient que lorsque t tend vers $+\infty$, $\exp(-tA) = O(e^{-\alpha t})$, et de même $\exp(-tA^T) = O(e^{-\alpha t})$ car A^T et A ont même spectre, donc $V(t) = O(e^{-2\alpha t})$. Il en résulte que V est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par passage aux coordonnées) et que $\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0$.

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité du b), et en posant $W_\infty = \displaystyle\int_0^{+\infty} V(s)\, ds$, on obtient $A^T W_\infty + W_\infty A = I_n$. Par unicité, on en déduit que $B = W_\infty$.

Soit $X \in E_n$, pour tout $t \geqslant 0$, $X^T W(t) X \geqslant 0$ donc par passage à la limite, $X^T B X \geqslant 0$, donc $B \in \mathcal{S}_n^+$, mais $\det B > 0$, donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}$.