

CCINP 2023

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE – FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 1

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

EXERCICE I

- Q1.** ■ N est une fonction à valeurs réelles positives.
■ **Homogénéité** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

donc, en passant au max, $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

- **Inégalité triangulaire** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N(A) + N(B)$$

donc, en passant au max, $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.

- Si $N(A) = 0$, alors, les termes étant tous positifs, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$, donc pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,j}| = 0 = a_{i,j}$ et $A = 0_n$.

Donc N est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q2.** Soit $X \in S$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$|[AX]_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|X\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

donc, en passant au maximum, $\|AX\|_\infty \leq N(A)$.

Donc $\{\|AX\|_\infty, X \in S\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} , majorée par $N(A)$, d'où l'existence $\sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

- Q3.** Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X = 0_{n,1}$ et $\|AX\|_\infty = 0 \leq \|A\| \|X\|_\infty$.

Soit $X \neq 0_{n,1}$ et $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S$, donc, par homogénéité et définition de $\|A\|$,

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \left\| A \frac{X}{\|X\|_\infty} \right\| \leq \|A\|$$

donc $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$.

Q4. Avec la question **Q2**, $N(A)$ majore $\{\|AX\|_\infty, X \in S\}$ donc $\|A\| \leq N(A)$.

Soit $i_0 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $N(A) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_j = \text{sgn}(a_{i_0,j})$ valant 1 si $a_{i_0,j} > 0$, -1 si $a_{i_0,j} < 0$ et 0 si $a_{i_0,j} = 0$.

Si $A = 0_n$, alors $N(A) = 0 = \|A\|$ car pour tout $X \in S$, $\|AX\|_\infty = 0$.

Sinon, $X_0 \in S$ et $\|AX_0\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right|$ avec pour tout $i \neq i_0$,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq N(A)$$

et pour $i = i_0$,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = N(A)$$

donc $\|AX_0\|_\infty = N(A) \leq \|A\|$.

Finalement, $N(A) = \|A\|$.

Q5. On a $\|A\| = N(A) = \max(3, 8, 6) = 8$.

EXERCICE II

Q6. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - e^{-x}$.

g est dérivable sur \mathbb{R} par opérations et $g' : x \mapsto 1 + e^{-x} > 0$.

Donc g est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . Il s'agit donc d'une bijection de \mathbb{R} sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=] -\infty, +\infty [\ni 0$.

Ainsi, l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Q7. f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 par opérations et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y$$

Donc (x, y) est un point critique si et seulement si $x = 2y = e^{-x}$.

En notant x_0 l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$, le seul point critique de f est $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

Q8. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par opérations et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$$

Donc la matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est $\begin{pmatrix} 2 + e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ de déterminant $4(1 + e^{-x_0}) > 0$:

ses deux valeurs propres sont de même signe donc f admet un extremum local en (x_0, y_0) .

De plus, la trace de cette matrice est positive, donc les valeurs propres le sont et

il s'agit d'un minimum local.

PROBLÈME

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. $f : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur \mathbb{R}_*^+ et

■ $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ avec $1 - \alpha < 1$ donc, par comparaison de fonctions positives, la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ étant intégrable sur $]0, 1]$, f l'est.

■ $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha-2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ avec $2 - \alpha > 1$ donc, par comparaison de fonctions positives, la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, f l'est.

Ainsi, f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Q10. On effectue un changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans $J(\alpha)$:

$$J(\alpha) = - \int_1^0 \frac{y^{1-\alpha}}{1+1/y} \frac{dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{y^{-\alpha}}{y+1} dy = I(1-\alpha)$$

Donc $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

Q11. Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^{\alpha-1}(-x)^n$ avec $| -x | \in]0, 1[$. En reconnaissant une

série géométrique convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1} \frac{1}{1-(-x)} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ convergait uniformément sur $]0, 1[$, alors la suite de fonction $(f_n)_n$ convergerait uniformément vers 0. Or $\|f_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0, ce qui est contradictoire.

La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

Q12. On a $S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$.

H1 $\forall x \in]0, 1[, S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$. (Et le programme ne demande pas de préciser que les S_n et f sont continues par morceaux sur $]0, 1[$.)

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, |S_n(x)| \leq 2$ et la fonction $t \mapsto 2$ est intégrable sur $[0, 1]$ donc sur $]0, 1[$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 S_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = I(\alpha)$.

$$\text{Comme } \int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$.

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k} \\ &\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k+1 \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2\alpha)}{-\alpha^2 + n^2} \end{aligned}$$

donc $I(\alpha) + J(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Q14. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, fonction continue et positive sur $]0, +\infty[$
 $\psi_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann convergente,
 $\int_0^1 \psi_x(t) dt$ converge.
 $t^2 \psi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann
convergente, $\int_1^{+\infty} \psi_x(t) dt$ converge.
Ainsi Γ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Q16. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $g : (x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$
H1 Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. (Le programme ne demande pas de vérifier que les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.)
H2 Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|g(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} = f(t)$ et f est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q1**.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres,

la fonction f_α est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Q17. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$, on conserve la notation de g de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a, b] \times]0, +\infty[$

H1 $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q8** (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).

H2 $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\frac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto -\frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt}$.

(Le programme ne demande pas de préciser que les fonctions $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.)

H3 $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ et $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ est continue sur $]0, +\infty[$, équivalente en 0 à t^α avec $\alpha < 1$ et est un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $\underset{t \rightarrow +\infty}{}$, donc elle est intégrable par comparaison à des fonctions de Riemann sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Ceci étant pour tout a et b de $]0, +\infty[$, on en conclut que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, et

$$f'_\alpha(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt.$$

Q18. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit $x > 0$, on note $g_x : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[$

H1 $\forall t \in]0, +\infty[, g_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} g(t) = 0$

H2 $\forall (x, t) \in (]0, +\infty[)^2, |g_x(t)| \leq f(t)$ et f est intégrable sur $]0, +\infty[$ (toujours **Q1**)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.

Q19. La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$,

■ $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc, par équivalent et critère de Riemann, h est intégrable sur $]0, 1]$.

■ $t^2 \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On montre ainsi que h est intégrable sur $]0, +\infty[$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt$$

on effectue le changement de variable $u = xt$

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{1}{x} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q21. Calcul préliminaire, on note $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

On a g qui est définie d'après la question 19 et de classe \mathcal{C}^1 d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$

g_α est donc de classe \mathcal{C}^1 comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \Gamma(\alpha) e^x \left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha} \right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = k e^x$ où k est un réel.

Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont $y(x) = k e^x + g_\alpha(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k e^x + g_\alpha(x)$.

Il reste à déterminer la valeur de k .

On a de l'équation précédente l'égalité $e^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

On conclut ainsi que $\forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.

On sait d'après la question 8 que f_α est continue sur $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) \quad (\text{par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) \quad (\text{car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0) \\ &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \end{aligned}$$

D'autre part, comme $f_\alpha(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt$, on obtient l'égalité demandée.

Q23. On sait d'après la question 6 que $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$
avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

Q24. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

FIN