# X-ENS 2021 : épreuve B
# Un corrigé

## Première partie

1. (a) On a (incompatibilité des événements pour la seconde égalité)

$$\mathbb{P}(n|X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X = kn\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kn)^s}$$

En factorisant par $1/n^s$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(n|X) = \frac{1}{n^s}}$$

(b) Soit $A = \bigcap_{i=1}^{n} \{p_i^{\alpha_i}|X\}$. Les $p_i^{\alpha_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, un entier est multiple de tous les $p_i^{\alpha_i}$ si et seulement si il est multiple de leur produit. Ainsi

$$A = (p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \mid X)$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n})^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(p_i^{\alpha_i}|X)$$

Ceci montre que toute sous famille finie de $(\{p_i^{\alpha_i}|X\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants et donc

$$\boxed{\text{la famille } (\{p_i^{\alpha_i}|X\})_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est constituée d'événements mutuellement indépendants}}$$

2. (a) Quand des événéments sont mutuellement indépendants, il en est de même de leurs complémentaires. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r}\{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\{p_i \nmid X\}) = \prod_{i=1}^{r} (1 - \mathbb{P}(\{p_i \mid X\}))$$

La première question donne ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r}\{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i^{-s})}$$

(b) Par propriété de continuité décroissante, on a donc

$$\lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i^{-s}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{p_i \nmid X\}\right)$$

Or, 1 est l'unique entier qu n'est divisible par aucun nombre premier et donc

$$\lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i^{-s}) = \mathbb{P}(X = 1)$$

Par définition de la loi de $X$,

$$\boxed{\zeta(s)^{-1} = \lim_{r\to+\infty} \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i^{-s})}$$

3. (a) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et notons $V_k = \nu_{p_k}(X) + 1$. On a alors $V_k(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\forall q \in \mathbb{N}^*,\ (V_k \geq q) = \{p_k^{q-1} \mid X\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(V_k \geq q) = \frac{1}{(p_k^s)^{q-1}}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(V_k = q) = \mathbb{P}(V_k \geq q) - \mathbb{P}(V_k \geq q+1) = \left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{q-1}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

$$\boxed{\nu_{p_k}(X) + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - p_k^{-s}\right)}$$

(b) Je note les événements $E_i = \left(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1\right)$ et $E_i^{(\varepsilon)} = \left(\nu_{p_{k_i}}(X) \geq n_i + \varepsilon\right)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

On a remarque que $E_i \bigcup E_i^{(1)} = E_i^{(0)}$ (union disjointe)

Je vais montrer par récurrence sur $s \in [\![1, r]\!]$ que pour tout $F \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}\left(E_1 \cap \cdots \cap E_s \cap F\right) = \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap F\right)$$

Pour $s = 1$, on a $\sum_{\ell=0}^{1} (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap F\right) = \mathbb{P}\left(E_1^{(0)} \cap F\right) - \mathbb{P}\left(E_1^{(1)} \cap F\right)$

Or on a l'union disjointe : $E_1^{(0)} \cap F = \left(E_1^{(1)} \cap F\right) \cup (E_1 \cap F)$

d'où $\sum_{\ell=0}^{1} (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap F\right) = \mathbb{P}\left(E_1 \cap F\right)$ ce qui établit l'initialisation.

Pour l'hérédité, on considère $s \in [\![1, r-1]\!]$ tel que la propriété soit vraie au rang $s$.

Soit $F \in \mathcal{A}$. On a en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'événement $E_{s+1} \cap F$ :

$$\mathbb{P}\left(E_1 \cap \cdots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F\right) = \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F\right)$$

or pour $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0, 1\}^s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F\right) &= \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^0 \cap F\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^1 \cap F\right) \end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}\left(E_1 \cap \cdots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F\right)$ est égal à :

$$\sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s + 0 = \ell + 0}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^0 \cap F\right)$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s + 1 = \ell + 1}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^1 \cap F\right)$$

En remarquant que $\{0,1\}^{s+1} = (\{0,1\}^s \times \{0\}) \bigcup (\{0,1\}^s \times \{1\})$, on obtient par changement d'indice :

$$\mathbb{P}\left(E_1 \cap \cdots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F\right) = \sum_{\ell=0}^{s+1} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{s+1}) \in \{0,1\}^{s+1} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{s+1}=\ell}} \mathbb{P}\left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F\right)$$

Ce qui établit l'hérédité.
On a prouvé par récurrence que la propriété est vraie pour tout $s \in [\![1,r]\!]$ et tout $F \in \mathcal{A}$
En particulier pour $s = r$ et $F = \Omega$, on obtient l'égalité voulue :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \{\nu_{p_{k_i}}(X) = n_i\}\right) = \sum_{\ell=0}^r \left((-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \{\nu_{p_{k_i}}(X) \geq n_i \varepsilon_i\}\right)\right)}$$

(c) On a

$$\bigcap_{i=1}^r (\nu_{p_{k_i}}(X) \geq n_i + \varepsilon_i) = \left\{\prod_{i=1}^r p_{k_i}^{n_i+\varepsilon_i} \mid X\right\}$$

et la question 1 donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r (\nu_{p_{k_i}}(X) \geq n_i + \varepsilon_i)\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (p_{k_i}^{n_i+\varepsilon_i})^s}$$

Le membre de droite de la question précédente vaut donc

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^r p_{k_i}^{n_i s}} \sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \frac{1}{p_{r_1}^{\varepsilon_1 s} \ldots p_{k_r}^{\varepsilon_r s}}$$

Par ailleurs, on a (compte-tenu de la question 3(a))

$$\prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\nu_{p_{k_i}}(X) = n_i) = \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{p_{k_i}^s}\right)^{n_i} \left(1 - \frac{1}{p_{k_i}^s}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^r p_{k_i}^{n_i s}} \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_{k_i}^s}\right)$$

Rappelons alors que

$$\prod_{i=1}^r (X - x_i) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \sigma_j(x_1, \ldots, x_r) X^{r-j}$$

où $\sigma_k(x_1, \ldots, x_r)$ est la somme de tous les produits $k$ à $k$ des $x_i$ c'est à dire

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=k}} x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_r^{\varepsilon_r}$$

Les deux expressions écrites plus haut sont donc égales et

$$\prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\nu_{p_{k_i}}(X) = n_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \nu_{p_{k_i}}(X) = n_i\right)$$

Ceci étant vrai pour tout $r$,

$$\boxed{\text{les variables } \nu_{p_{k_i}}(X),\ i \geq 1, \text{ sont mutuellement indépendantes}}$$

4. (a) On remarque que

$$\sum_{d|n} \chi_4(d) = \sum_{d|n, d\equiv 1[4]} \chi_4(d) + \sum_{d|n, d\equiv 3[4]} \chi_4(d) = g(n)$$

Quand $m \wedge n = 1$, les diviseurs de $nm$ sont exactement les $d\delta$ avec $d|n$ et $\delta|n$ (et deux couples $(d, \delta)$ différents donnent deux produits $d\delta$ différents). Ainsi

$$g(nm) = \sum_{x|nm} \chi_4(x) = \sum_{d|n, \delta|m} \chi_4(d\delta)$$

Avec la propriété de multiplicité admise pour $\chi_4$, et puisque des diviseurs de $n$ et de $m$ sont premiers entre eux quand $n$ et $m$ le sont,

$$g(mn) = \sum_{d|n, \delta|m} \chi_4(d)\chi_4(\delta)$$

Il reste à séparer les sommes (qui sont indépendantes) pour conclure que

$$\boxed{n \wedge m = 1 \implies g(nm) = g(n)g(m)}$$

(b) $p$ étant un nombre premier, les diviseurs de $p^n$ sont $1, p, \dots, p^n$.
Si $p = 2$ alors tous les diviseurs de $p$ sont pair sauf 1 qui est égal à 1 modulo 4. Ainsi $g(2^n) = 1$.
Si $p \equiv 1[4]$ alors pour tout $k$, $p^k \equiv 1[4]$, $r_1(p^n) = n + 1$ et $r_3(p^n) = 0$. Ainsi $g(p^n) = n + 1$.
Sinon, $p \equiv -1[4]$ et $p^k$ vaut 1 modulo 4 si $k$ est pair et $-1$ (ou 3) modulo 4 si $k$ est impair.
Si $n$ est impair, il y a autant de pairs que d'impairs dans $[\![0, n]\!]$ et $g(n) = 0$. Si $n$ est pair, il y a un pair de plus et $g(n) = 1$.
Finalement, on a

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est premier et } n \in \mathbb{N},\ g(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ p = 2 \\ n+1 & \text{si } \ p \equiv 1[4] \\ \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) & \text{si } \ p \equiv 1[4] \end{cases}}$$

5. Comme $|f_n(X)| \leq h(X)$ avec $X$ d'espérance finie, $f_n(X)$ est d'espérance finie et on peut écrire (formule de transfert)

$$\mathbb{E}(f_n(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k)\mathbb{P}(X = k)$$

On veut passer à la limite et intervertir somme et limite. On utilise pour cela le théorème de double limite.
On pose $g_k(n) = f_n(k)\mathbb{P}(X = k)$ en sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} g_k(n) = f(k)\mathbb{P}(X = k)$$

De plus, $\|g_k\|_{\infty,\mathbb{N}^*} \leq |h(k)|\mathbb{P}(X = k)$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(g_k)$ converge normalement sur $\mathbb{N}^*$ (et donc uniformément au voisinage de $+\infty$).
Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f_n(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(f(X))}$$

6. (a) Posons $u_{d,n} = n^{-s}\mathbf{1}_n(d)$ où $\mathbf{1}_n$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des diviseurs de $n$.
Les termes de cette famille double étant positifs, on peut sommer les termes (dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) et utiliser le théorème de sommation par paquets pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d=1}^{+\infty} u_{d,n} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{d,n}$$

ce qui donne, puisque $\mathbf{1}_n(d) = 1$ pour $n$ multiple de $d$ et vaut 0 sinon

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(kd)^{-s}$$

On peut utiliser le théorème de Fubini pour voir que le membre de droite vaut $\zeta(s)^2$. Ceci montre au passage que notre famille est sommable (les calculs sont en fait menés dans $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s} = \zeta(s)^2}$$

(b) On remarque que $0 \leq r_i(n) \leq r(n)$. Ainsi $|g(n)| \leq r(n)$ et $|g(n)n^{-s}| \leq r(n)n^{-s}$ et par théorème de comparaison

$$\boxed{\text{La série } \sum(g(n)n^{-s}) \text{ converge absolument}}$$

*Avec la question 4, on voit que $g(n)$ est en fait positif, produit des $g(p_{k_i}^{n_i})$ où $n = p_{k_1}^{n_1}\dots p_{k_r}^{n_r}$. Mais ceci ne sert pas dans cette question.*

7. (a) Soit $x \in \mathbb{N}^*$. $x$ ne possède qu'un nombre fini de diviseurs premiers et donc il existe $n_0$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $\nu_{p_k}(x) = 1$. On a alors

$$\forall n \geq n_0 - 1,\ \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)} = \prod_{k=1}^{n_0-1} p_k^{\nu_{p_k}(x)} = x$$

et cette quantité tend vers $x$ quand $n \to +\infty$ (suite constante à partir d'un certain rang). Ainsi

$$\boxed{\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right) \text{ converge simplement sur } \mathbb{N}^* \text{ vers } \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}}$$

(b) Notons $f_n : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} g(p_k^{\nu_{p_k}(x)})$. La question 4(a) et une récurrence simple montrent que si $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux premiers entre eux, on a $g(x_1 \dots x_n) = g(x_1)\dots g(x_n)$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = g\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$$

Pour $n$ assez grand, le terme dans la parenthèse est égal à $x$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$$

Pour utiliser la question 5, on a besoin d'une domination indépendante de $n$. Mais comme $|g(x)| \leq r(x)$, et $\sum r(n)n^{-s}$ est absolument convergente, cette domination est acquise ($|f_n(x)| \leq r(x)$ et $r(X)$ est d'espérance finie).
On peut ainsi utiliser la question 5 qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right) = \mathbb{E}(g(X))$$

Par lemme des coalitions, les variables $g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})$ sont indépendantes (puisque les $\nu_{p_k}(X)$ le sont) et l'espérance du produit est égale au produit des espérances. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right)}$$

8. (a) Par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \sum_{x=0}^{\infty} g(p^x)\mathbb{P}(\nu_p(X) = x) = \sum_{x=0}^{\infty} g(p^x)\frac{1}{p^{sx}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Si on suppose que $p \equiv 1[4]$, on a donc

$$\mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\sum_{x=0}^{\infty}(x+1)\left(\frac{1}{p^s}\right)^x$$

On reconnaît une somme géométrique dérivée :

$$\mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2}$$

et ainsi

$$\boxed{\text{Si } p \equiv 1[4], \text{ alors } \mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1}{1 - p^{-s}}}$$

(b) De façon similaire, si $p \equiv 3[4]$, on a

$$\mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2}(1 + (-1)^x)\left(\frac{1}{p^s}\right)^x$$

On a cette fois deux séries géométriques et

$$\mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(\frac{1}{1 - p^{-s}} + \frac{1}{1 + p^{-s}}\right)$$

et après simplification

$$\boxed{\text{Si } p \equiv 3[4], \text{ alors } \mathbb{E}(g(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1}{1 + p^{-s}}}$$

(c) Une formule générale est (les nombres premiers plus grand que 3 sont égaux à 1 ou 3 modulo 4)

$$\forall k \geq 2,\ \mathbb{E}(g(p^{\nu_{p_k}(X)})) = \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}$$

Pour $k = 1$, c'est à dire quand on s'occupe du nombre premier $p_1 = 2$, la même démarche que ci-dessus donne

$$\mathbb{E}(g(2^{\nu_2(X)})) = \sum_{x=0}^{\infty} g(2^x)\frac{1}{2^{sx}}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = (1 - 2^{-s})\sum_{x=0}^{\infty}(2^{-s})^x = 1$$

et la formule reste vraie pour $k = 1$.
On peut alors utiliser 7(b) et conclure que

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} = \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}}$$

9. (a) Par formule de transfert (pas de problème d'existence puisque $\chi_4$ est bornée)

$$\mathbb{E}(\chi_4(p^{\nu_p(x)})) = \sum_{x=0}^{\infty} \chi_4(p^x)\mathbb{P}(\nu_p(X)=x) = (1-p^{-s})\sum_{x=0}^{\infty} \chi_4(p^x)\frac{1}{p^{sx}}$$

$\chi_4$ étant multiplicative, $\chi_4(p^x) = \chi_4(p)^x$ et on reconnaît ci-desus une somme géométrique de raison $\chi_4(p)p^{-s}$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_4(p^{\nu_p(x)})) = \frac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}}$$

(b) On procède comme en question 7. Posons

$$f_n(x) = \chi_4\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$$

Pour un $x$ fixé, le produit est constant égal à $x$ à partir d'un certain rang et donc $f_n(x) \to \chi_4(x)$ quand $n \to +\infty$.
De plus, $\forall x,\ |f_n(x)| \leq 1$ (puisque $\chi_4$ prend les valeurs 0 ou $\pm 1$). Comme 1 est d'espérance finie, la question 5 s'applique et comme en 7(b)

$$\mathbb{E}(\chi_4(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\chi_4(p_k^{\nu_{p_k}(x)}))$$

Avec 9(a), on a

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\chi_4(p_k^{\nu_{p_k}(x)})) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-p_k^{-s})}{\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_4(p_k)p_k^{-s})}$$

Comme le numérateur est convergent de limite $\zeta(s)^{-1} \neq 0$ (question 2(b)), le dénominateur converge aussi et on peut écrire que

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_4(X)) = \zeta(s)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1-\chi_4(p_k)p_k^{-s})}}$$

(c) On a ainsi

$$\mathbb{E}(g(X)) = \zeta(s)\mathbb{E}(\chi_4(X))$$

Par formule de transfert, $\sum(\chi_4(k)\mathbb{P}(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme vaut $\mathbb{E}(\chi_4(X))$. Ceci donne

$$\mathbb{E}(g(X)) = \zeta(s)\sum_{k=0}^{\infty} \chi_4(2k+1)\mathbb{P}(X=2k+1) = \zeta(s)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\zeta(s)^{-1}\frac{1}{(2k+1)^s}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}}$$

## Deuxième partie

10. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)\theta) &= \operatorname{Im}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{2n+1}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\cos(\theta)^{2n+1-k}(i\sin(\theta))^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cos(\theta)^{2n-2k}(-1)^k\sin(\theta)^{2k+1}\end{aligned}$$

Comme $\cos^2 = 1-\sin^2$, on a donc

$$\boxed{\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta)) \text{ avec } P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(1-X)^{n-k}(-1)^kX^k}$$

(b) $P_n$ est de degré $\leq n$ et non nul et possède donc au plus $n$ racines. Or, $\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ annule $P$ quand $k \in [\![1,n]\!]$ (avec l'égalité de définition). De plus $x \mapsto \sin^2(x)$ est injective sur $[0,\pi/2]$ et les $n$ racines trouvées sont distinctes. Ainsi, on a toutes les racines.

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont les } \sin^2(\tfrac{k\pi}{2n+1}) \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]}$$

Comme les racines $x_k$ sont non nulles, on peut factoriser $P_n$ par le produit des $1-\frac{X}{x_k}$. Le facteur restant sera une constante valant $P_n(0) = 2n+1$.

$$\boxed{P_n(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$$

(c) En utilisation l'égalité de définition de $P_n$ avec $\theta = \frac{\pi x}{2n+1}$, on obtient directement

$$\boxed{\sin(\pi x) = (2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$$

11. (a) On a $\sin(y) \sim y$ quand $y \to 0$. Ceci permet de lever les indéterminations pour montrer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{m,n}(x) = \pi x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$$

De plus, $u_{n,m}(x)v_{n,m}(x) = \sin(\pi x)$ (question 10(c)). Comme $x \notin \mathbb{Z}$, la limite de $u_{n,m}(x)$ quand $n \to +\infty$ est non nulle et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_{m,n}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}}$$

(b) Comme $|x| < m$, on a $0 < \frac{\pi|x|}{2n+1} < \frac{\pi m}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ quand $k \in [\![m+1,n]\!]$. On en déduit que les termes dans la parenthèse définissant $v_{n,m}(x)$ sont tous dans $]0,1[$ et ainsi $v_{n,m}(x) \leq 1$.
Par concavité de sin sur $[0,\pi/2]$ (courbe en dessous de la tangente en 0 mais au dessus de la corde), on a

$$\forall t \in [0,\pi/2],\ 0 \leq \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$$

En élevant au carré, on garde les inégalités (croissance du passage au carré dans $\mathbb{R}^+$) puis un argument de parité donne

$$\forall |t| \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \frac{4}{\pi^2} t^2 \leq \sin^2(t) \leq t^2$$

Comme $\frac{\pi|x|}{2n+1}$ et $\frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ sont dans $[0, \pi/2]$ pour les $x$ et $k$ considérés, on a

$$\frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \leq \frac{\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$$

et donc

$$1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \geq 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}$$

Pour $k \geq m+1 > |x|$, les quantités sont positives et on peut faire le produit des inégalités ce qui permet de minorer $v_{n,m}(x)$.

$$\boxed{1 \geq v_{n,m}(x) \geq \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)}$$

Notons $w_{n,m}$ le minorant obtenu. Il est positif et on peut écrire que

$$\ln(w_{n,m}) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

Comme $\ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) \sim -\frac{\pi^2 x^2}{4k^2}$ quand $k \to +\infty$ et que c'est le terme général d'une série négative convergente, la suite $(\ln(w_{n,m}))_{n \geq m+1}$ converge et on peut écrire que

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(w_{m,n}) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

Par continuité de l'exponentielle, on a la limite quand $n \to +\infty$ de $w_{m,n}$ et, en passant à la limite

$$1 \geq v_m(x) \geq \exp\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)\right)$$

Par définition des sommes de séries, le terme dans l'exponentielle est de limite nulle quand $m \to +\infty$ et l'exponentielle tend vers 1. Par théorème d'encadrement, on a donc $v_m(x)$ qui admet une limite quand $m \to +\infty$ et

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} v_m(x) = 1}$$

(c) Avec 11(a), on a donc

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} = 1$$

Comme $\sin(\pi x)/(\pi x) \neq 0$, le produit admet une limite et elle est non nulle. On a alors, par théorèmes d'opération

$$\boxed{\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}$$

## Troisième partie

12. Il s'agit de prouver que le produit, que je note $\pi_n(x)$, est le terme général d'une suite convergente (à $x>0$ fixé). Les termes de ce produit sont positifs et on peut écrire

$$\ln(\pi_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right)$$

$\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k}) = O(1/k^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente et donc $(\ln(\pi_n(x)))$ admet une limite finie. Il en est de même de $(\pi_n(x))$ par continuité de l'exponentielle.

$$\boxed{(\Gamma_n)_{n\geq 1} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

De plus la limite est $\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}e^{\pi(x)}$ où $\pi(x)$ est la limite de $(\pi_n(x))$ et donc

$$\boxed{\Gamma \text{ est à valeurs} > 0}$$

13. On remarque que

$$\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} = \frac{x}{x+1}e^{-\gamma}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\frac{k+x}{k+x+1}$$

On scinde le produit en deux et dans la deuxième moitié, un télescopage apparaît. On utilise aussi la propriété de morphisme de exp :

$$\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} = \frac{x}{x+1}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma\right)\frac{x+1}{x+n}$$

Comme $\frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n} = \exp(-\ln(n))$, on peut affirmer que (quand $n\to+\infty$)

$$\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} \sim x\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma - \ln(n)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle est de limite nulle et ainsi $\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} \to x$. Or, ce terme tend aussi vers $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$ ($\Gamma$ ne s'annule pas) et donc

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

14. (a) On travaille plutot avec

$$\ln(\Gamma(x)) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right)$$

Notons $h_k(x) = \frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})$ et appliquons le théorème de régularité des séries de fonctions à $\sum(h_k)$.

- $\sum(h_k)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ (vu en question 12).
- Pour tout $k$, $h_k$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour $x>0$,

$$h_k'(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \quad \text{et} \quad h_k''(x) = \frac{1}{(k+x)^2}$$

- Pour $x>0$, et quand $k\to+\infty$, $h_k'(x) = \frac{x}{k(k+x)} = O(1/k^2)$ est le terme général d'une série convergente.

- $\|h_k''\|_{\infty,]0,+\infty[} \leq \frac{1}{k^2}$ et $\sum(h_k'')$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi la somme de la série $\sum(h_k)$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ses dérivées première seconde s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Par théorèmes d'opération, $\ln(\Gamma)$ est de classe $C^2(\mathbb{R}^{+*})$ et, en composant par l'exponentielle,

$$\boxed{\Gamma \in C^2(\mathbb{R}^{+*})}$$

De plus, le calcul précédent donne

$$(\ln(\Gamma))''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

et ainsi

$$\boxed{(\ln(\Gamma))''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}}$$

(b) En posant $u_k(x) = \frac{1}{(k+x)^2}$, on a $u_k(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ pour tout $k$ mais aussi

$$\|u_k\|_{\infty,[1,+\infty]} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$$

ce qui montre que $\sum(u_k)$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. On peut alors utiliser le théorème de double limite pour affirmer que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (\ln(\Gamma))''(x) = 0}$$

15. (a) On a

$$\forall x > 0,\ S(x+1) = \ln\left(\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right) = \ln\left(\frac{xf(x)}{x\Gamma(x)}\right) = S(x)$$

et donc

$$\boxed{S \text{ est 1-périodique}}$$

La dérivation de $\ln(f(x+1)) = \ln(x) + \ln(f(x))$ donne $\frac{f'(x+1)}{f(x+1)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}$.

En posant $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln(f))'(x)$, on a donc $g(x+1) - g(x) = \frac{1}{x}$ et donc $g'(x+1) - g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

En appliquant ceci en $x + k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et en sommant, on trouve

$$g'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+n)^2} = g'(x+n) \geq 0$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on en conclut que

$$\forall x > 0,\ (\ln(f))''(x) - (\ln(\Gamma))''(x) \geq 0$$

La dérivée seconde de $S$ est donc positive et

$$\boxed{S \text{ est convexe}}$$

(b) Comme $S$ est périodique et dérivable, sa dérivée s'annule par théorème de Rolle sur tous les intervalle $[n, n+1]$ avec $n \geq 1$.

Or, cette dérivée est croissante par convexité et elle est donc nulle.

$S$ est donc une fonction affine et comme elle est périodique, elle est constante. Or,

$$\Gamma_n(1) = \exp\left(-\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \frac{n}{n+1} \to 1$$

et donc $\Gamma(1) = 1$. Comme $f(1) = 1$, $S(1) = 0$ et ainsi $S$ est nulle. On en déduit que

$$\boxed{f=\Gamma}$$

16. Soit $a>0$. On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,dt=\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}g(x)$$

On utilise tout d'abord le théorème de régularité des intégrales à paramètres pour étudier $g$.

- Pour tout $x>0$, $h_x:t\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, équivalente en 0 à $t^{x-1}$ et en $+\infty$ à $\frac{1}{t^{1+a}}$. Comme $a>0$ et $x>0$, $h_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $t>0$, $x\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ses dérivées sont

$$x\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))\ \text{ et }\ x\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))^2$$

- Pour tout $x>0$, les fonctions

$$t\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))\ \text{ et }\ t\mapsto\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))^2$$

sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}^{+*}$. Pour $x\in[\alpha,\beta]$, on a

$$\left|\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))\right|\le\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\beta+a}}|\ln(t)-\ln(1+t)| & \text{si } t\in]0,1]\\ \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\beta+a}}|\ln(t)-\ln(1+t)| & \text{si } t>1\end{cases}$$

$$\left|\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))^2\right|\le\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\beta+a}}|\ln(t)-\ln(1+t)|^2 & \text{si } t\in]0,1]\\ \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\beta+a}}|\ln(t)-\ln(1+t)|^2 & \text{si } t>1\end{cases}$$

Dans les deux cas, la fonction qui domine est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $o(t^{-1+\frac{\alpha}{2}})$ au voisinage de 0 et $o(1/t^{a+1/2})$ au voisinage de $+\infty$. Les fonctions majorantes sont donc intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Le théorème s'applique et indique que $g\in C^2(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$g'(x)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))\,dt\ \text{ et }\ g''(x)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))^2\,dt$$

On en déduit que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\ln(\Gamma)$ est convexe, pour montrer que $\ln(f)$ l'est il suffit de le prouver pour $\ln(g)$. Il suffit donc de montrer que la dérivée seconde de $\ln(g)$ est positive, c'est à dire que $gg''-(g')^2\ge 0$. En écrivant que

$$\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}(\ln(t)-\ln(1+t))=\sqrt{\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}}\left(\sqrt{\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}}(\ln(t)-\ln(1+t))\right)$$

on peut appliquer le théorème de Cauchy-Schwarz qui donne l'inégalité $(g')^2\le gg''$.

On remarque ensuite que

$$f(1)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^{a+1}}=a\left[\frac{(1+t)^{-a}}{-a}\right]_0^{+\infty}=1$$

On a enfin, en écrivant $\frac{\Gamma(x+1+a)}{\Gamma(a)} = (x+a)\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}$, que

$$f(x+1) = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{x+a}{(1+t)^{x+1+a}} t^x \, dt$$

Dans l'intégrale, on effectue une intégration par parties : onprimitive $\frac{x+a}{(1+t)^{x+1+a}}$ et on dérive $t^x$. Après avoir vérifié la validité (le terme "tout intégré" existe, il est nul ici), on obtient

$$f(x+1) = xf(x)$$

On peut alors avec la question précédente conclure que $f = \Gamma$ ce qui montre que

$$\boxed{\forall x > 0, \ \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}}$$

17. Si $x \in ]0,1[$, la question précédente utilisée avec $a = 1-x$ donne (compte-tenu de $\Gamma(1) = 1$)

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) &= \frac{e^{-\gamma}}{x(1-x)} \prod_{k=1}^n \frac{k^2 e^{\frac{1}{k}}}{(k+x)(k+1+x)} \\
&= \exp\left(-\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \frac{\prod_{k=1}^n k^2}{x(n+1-x)\prod_{k=1}^n (k^2 - x^2)} \\
&= \exp\left(-\gamma - \ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \frac{n}{x(n+1-x)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2}}
\end{aligned}$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, cela donne

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

et avec 11.c,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$$

Finalement,

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

# Quatrième partie

18. (a) Le changement de variable $u = 1/t$ donne

$$\int_1^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} \, du$$

et on a donc (avec la question 17)

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u} \, du + \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} \, du$$

Posons $f_n(u) = (-1)^n u^{-x+n}$ en sorte que

$$\forall u \in ]0,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u)\ du = \frac{u^{-x}}{1+u}$$

- Les $f_n$ sont continues sur $]0,1[$ et $\sum(f_n)$ converge simplement sur $]0,1[$ avec une somme simple continue.
- Pour tout entier $n$ et tout $u \in ]0,1[$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_n(u)\right| = \left|u^{-x}\frac{1-(-u)^{n+1}}{1+u}\right| \leq \frac{2u^{-x}}{1+u}$$

  Le majorant est continu sur $]0,1]$ et intégrable au voisinage de 0 (équivalent à $2u^{-x}$ et $x<1$).

On peut ainsi utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\ du = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n u^{-x+n}\ du = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{-x+n+1}$$

En changeant $x$ en $1-x$ (on reste dans $]0,1[$), on obtient de même une expression de l'autre intégrale.

$$\boxed{\forall x \in ]0,1[,\ \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}}$$

(b) Si $x \in ]-1/2, 1/2[$, $x+1/2 \in ]0,1[$ et $\sin(\pi(x+1/2)) = \cos(\pi x)$. La question précédente donne donc

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1/2-x}$$

On écrit que pour $n \geq 0$, et puisque $\left|\frac{2x}{2n+1}\right| < 1$,

$$\frac{(-1)^n}{n+x+1/2} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)(1+\frac{2x}{2n+1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}x^k(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}}$$

et on procède de même avec l'autre somme. On peut regrouper des séries convergentes et donc écrire que

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^{k+1}x^k(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}} + \frac{2^{k+1}(-x)^k(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}}\right)$$

La parenthèse est nulle quand $k$ est impair et il reste

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$$

Pour intervertir les sommes, il suffit de justifier la sommabilité de la famille de terme général $u_{n,k} = \frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$. On va en fait particulariser le terme pour $k=0$ et écrire

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,0} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k}$$

Pour un $n$ fixé, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| = \frac{4}{2n+1} \frac{\frac{4|x|^2}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{4|x|^2}{(2n+1)^2}} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ce qui justifie que $\sum(S_n)$ converge et donne la sommabilité de $(u_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}$ et

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}$$

On peut alors incorporer la première somme à la seconde (indice $k=0$) et conclure que

$$\boxed{\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right) 2^{2k+2} x^{2k}}$$

(c) On a ainsi

$$\forall t \in ]-\pi/2, \pi/2[, \ \frac{1}{\cos(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{2k} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$$

ce qui montre que $\boxed{v \text{ est DSE de rayon au moins } \pi/2}$. Il y a un unique DSE qui est celui de Taylor et $\alpha_k = \frac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!}$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}}}$$

19. (a) On a $\forall x \in ]-\pi/2, \pi/2[, \ \cos(x)v(x) = 1$. Dérivons $2n$ fois cette relation avec la formule de Leibniz :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cos(x + (2n-k)\frac{\pi}{2}) v^{(k)}(x) = 0$$

On applique ceci en $x=0$. Les cosinus sont nuls quand $k$ est impair et il reste

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^{n-k} v^{(2k)}(0) = 0$$

Comme $\binom{2n}{2k} = \binom{2n}{2(n-k)}$ on conclut par changement d'indice que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k E_{2k} = 0}$$

On a $\boxed{E_0 = v(0) = 1}$ et comme $E_0 - E_2 = 0$, $\boxed{E_2 = 1}$. Enfin, $E_0 - 6E_2 + E_4 = 0$ et donc $\boxed{E_4 = 5}$

(b) On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{E_2}{2!} \frac{\pi^3}{2^4} = \frac{\pi^3}{2^5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{E_4}{4!} \frac{\pi^5}{2^6} = \frac{5\pi^5}{2^9 \times 3}$$

et avec la question 9c

$$\boxed{\text{si } s=3, \ \mathbb{E}(g(X)) = \tfrac{\pi^3}{2^5} \ ; \text{ si } s=5, \ \mathbb{E}(g(X)) = \tfrac{5\pi^5}{2^9\times 3}}$$