X-Maths 2 - MP - 2007

1. $\mathrm{Mat}_{(x_1,\dots,x_n)}(A) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} = M$ avec $a_1,\dots,a_n$ 2 à 2 $\neq$.

Soit $B \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec A. On note $b_{i,j}$ les coefficients de sa matrice N dans $(x_1,\dots,x_n)$.

Pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{array}{l} [MN]_{i,j} = a_i b_{i,j} \\ \quad \parallel \\ [NM]_{i,j} = a_j b_{i,j} \end{array}$$

(multiplication à gauche et à droite par une matrice diagonale)

Donc $b_{i,j}\underbrace{(a_i - a_j)}_{\neq 0 \text{ si } i\neq j} = 0$

Donc $i \neq j \Rightarrow b_{i,j} = 0$: $\boxed{\mathrm{Mat}_{(x_1,\dots,x_n)}(B) \text{ est diagonale.}}$

---

2. a) On suppose que les seuls sev de X stables par $A_1,\dots,A_p$ sont $\{0\}$ et X.

Soit $B \in \mathcal{L}(X)$ commutant avec $A_1,\dots,A_p$. Comme X $\mathbb{C}$-ev, $\mathrm{Sp}\,B \neq \emptyset$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,B$. Comme le sous-espace propre $E_\lambda(B) \neq \{0_E\}$ est stable par $A_1,\dots,A_p$, on a $E_\lambda(B) = \mathrm{Ker}(B - \lambda \mathrm{id}_X) = X$.

Et donc $\boxed{B = \lambda \mathrm{id}_X}$

---

b) On suppose que $n=2$, $\mathcal{B} = (x_1, x_2)$ base de X, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 2 & \\ (0) & & \ddots \ n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (0) & & \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Vect}(x_1) \notin \{0, X\}$ est stable par A_1 et A_2.

De plus, si $B \in \mathcal{L}(X)$ commutent avec A_1, A_2, par 1.,

comme B commute avec A_1, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{C}$

et comme B commute avec A_2,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & (0) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ & (0) & \end{pmatrix}$$

Donc $\forall i \in [\![2,n]\!],\ \alpha_i = \alpha_1$ et $B = \alpha_1 \, id_X$.

$\boxed{\text{La réciproque n'est pas vraie en général.}}$

---

3. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Le plus simple est de travailler matriciellement (les notations du sujet nous y incitent). Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(K_0) = \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{n+1-2n} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F_0) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0) = \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$- q^{-2} \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ q^{n-3} & \ddots & & & \\ & q^{n-5} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} & 0 \end{pmatrix} - q^{-2} \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ q^{n-1} & \ddots & & & \\ & q^{n-3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & q^{3-n} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ q^{n-3} & \ddots & & & \\ & q^{n-5} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ q^{n-3} & \ddots & & & \\ & q^{n-5} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0_n$$

Donc $\boxed{K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0 = 0_{\mathcal{L}(X)}}$

---

4. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F_0) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est une question classique sur les sev stables par un endomorphisme nilpotent.

On voit que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $G_j = \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_n)$ stable par F_0.

En effet, $F_0(G_j) = \mathrm{Vect}(x_{j+1}, \dots, x_n) \subset G_j$

De plus, $G_{n+1} = \{0\}$ stable par F_0

Montrons que ce sont les seuls.

Soit G sev stable par F_0 de dimension $n-j+1 \neq 0$ <u>But</u> : $G = G_j$

On note $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de $y \in X$ dans $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$.

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Parmi tous les vecteurs de G, choisissons-en un ayant un indice minimal de coordonnée non nulle : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $y_j \neq 0$ et j minimal

On note plutôt $y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Alors $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $\underbrace{F_0^i y}_{\in G} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \\ \vdots \\ y_{n-i} \end{pmatrix}$

Or $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_j \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre

car $y_j \neq 0$, donc $(y, F_0 y, \dots, F_0^{n-j} y)$ famille libre de $n-j+1$ vecteurs de G donc $\dim G \geqslant n-j+1 = \dim G_j$. Par ailleurs, par minimalité de j, $G \subset \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_p) = G_j$ donc, nécessairement, $\dim G = \dim G_j$ et $G = G_j$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Finalement, les sev stables par } F_0 \text{ sont} \\ \quad \{0\} \text{ et les } G_j = \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_p) \text{ par } j \in [\![1, n]\!].\end{array}}$$

Autre justification possible : Si $j \in [\![1, n]\!]$, et G sous-espace stable par F_0 de dimension j, l'endomorphisme F_j induit par F_0 sur G est nilpotent d'indice $\leq \dim G = j$ donc vérifie

$F_j^j = 0_{\mathcal{L}(G)}$ donc $G = \mathrm{Ker}(F_j^j) = \mathrm{Ker}(F_0^j) \cap G$

et donc $\mathrm{Ker}(F_0^j) \subset G$.

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F_0^j) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ 1 & & & \ddots & \\ (0) & \ddots & 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (en effet, $\forall p \in [\![1,n]\!]$, $F_0^j x_p = \begin{cases} x_{p+j} & \text{si } p+j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$)

$\underleftrightarrow{\;j\;}$

Donc, comme $\mathrm{rg}(F_0^j) = n-j$, $\dim \mathrm{Ker}(F_0^j) = j = \dim G$

Donc $G = \mathrm{Ker}(F_0^j) = \mathrm{Vect}(x_{n-j+1}, \dots, x_n) = G_{n-j+1}$

ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

Quels sont les $G_j = \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_n)$ stables par K_0 ? On a, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $K_0 x_i \in \mathrm{Vect}(x_i)$, donc $K_0(G_j) \subset \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_n) = G_j$.

$\boxed{\text{Donc les sous-espaces stables par } K_0 \text{ et } F_0 \text{ sont encore } \{0\} \text{ et les } G_j = \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_n) \text{ pour } j \in [\![1,n]\!].}$

5_ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(E_0) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \gamma_n \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $\gamma_i = \dfrac{(q^{p-1} - q^{1-p})(q^{n+1-p} - q^{p-n-1})}{(q - q^{-1})^2}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0) = \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \gamma_n \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$- q^2 \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \gamma_n \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & q^{n-1}\gamma_2 & & (0) \\ & \ddots & q^{n-3}\gamma_3 & \\ & & \ddots & q^{3-n}\gamma_n \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 q^{n-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_n q^{3-n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= O_n$$

Donc $\boxed{K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0 = 0_{\mathcal{L}(X)}}$

6_

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(E_0F_0 - F_0E_0) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & (0) \\ & \ddots & \gamma_n \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & (0) \\ & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \gamma_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \gamma_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_2 & & (0) \\ & \gamma_3 & \\ (0) & & \gamma_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_2 & & & (0) \\ & \gamma_2 - \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & \gamma_{n-1} - \gamma_n & \\ & & & -\gamma_n \end{pmatrix}$$

avec $\gamma_2 = \dfrac{(q-q^{-1})(q^{n-1}-q^{1-n})}{(q-q^{-1})^2} = (q-q^{-1})^{-1}\left[q^{n+1-2\times 1} - q^{-(n+1-2\times 1)}\right]$

$\forall p \in [\![2, n-1]\!]$, $\gamma_p - \gamma_{p+1} = \dfrac{(q^{p-1}-q^{1-p})(q^{n+1-p}-q^{p-n-1}) - (q^p - q^{-p})(q^{n-p}-q^{p-n})}{(q-q^{-1})^2}$

donc $\gamma_p - \gamma_{p+1} = \dfrac{\cancel{q^{n}} - q^{2p-n-2} - q^{n+2-2p} + \cancel{q^{-n}} - \cancel{q^{n}} + q^{2p-n} + q^{n-2p} - \cancel{q^{-n}}}{(q-q^{-1})^2}$

$$= \frac{\cancel{(q-q^{-1})}(q^{n+1-2p} - q^{2p-n-1})}{(q-q^{-1})^{\cancel{2}}}$$

$$= (q-q^{-1})^{-1}\left[q^{n+1-2p} - q^{-(n+1-2p)}\right]$$

et $\gamma_n = -\dfrac{(q^{n-1}-q^{1-n})\cancel{(q-q^{-1})}}{(q-q^{-1})^{\cancel{2}}} = (q-q^{-1})\left[q^{1-n} - q^{n-1}\right]$

On a donc bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(E_0F_0 - F_0E_0) = (q-q^{-1})\left[\begin{pmatrix} q^{n-1} & & (0) \\ & q^{n-3} & \\ & \ddots & \\ (0) & & q^{1-n}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q^{1-n} & & (0) \\ & q^{3-n} & \\ & \ddots & \\ (0) & & q^{n-1}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left[(q-q^{-1})(K_0 - K_0^{-1})\right]$$

Donc $\boxed{E_0F_0 - F_0E_0 = (q-q^{-1})(K_0 - K_0^{-1}).}$

---

7. Les ev stables par F_0 et K_0 sont les $G_j = \mathrm{Vect}(x_j, \dots, x_n)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ ainsi que $\{0_X\}$. Lesquels sont aussi stables par E_0 ? $\{0_X\}$, bien sûr.

Puis, $j \in [\![2, n]\!]$, $E_0 x_j = \gamma_j x_{j-1}$ avec $\gamma_j \neq 0$ car $\forall n>0$, $q^n \neq 1$, donc $E_0(G_j) \not\subset G_j$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les seuls sev stables par } K_0, E_0 \text{ et } F_0 \text{ sont } \{0_X\} \text{ et } X = G_1.}$$

8_ On suppose que I désigne id_X.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(K - \lambda I)$. Alors

$$K(E(x)) = q^2 E(K(x)) = q^2 E(\lambda x)$$
$$= \lambda q^2 E(x)$$

donc $\boxed{E(X_\lambda) \subset X_{\lambda q^2}}$

Puis, si $x \in Y_\lambda = \operatorname{Ker}(E - \lambda I)$,

$$E(K(x)) = q^{-2} K(E(x)) = q^{-2} K(\lambda x)$$
$$= \lambda q^{-2} K(x)$$

donc $\boxed{E(Y_\lambda) \subset Y_{\lambda q^{-2}}}$.

9_ On suppose $\lambda \neq 0$. Soit $x \in Y_\lambda$. Alors

$K(x) \in Y_{q^{-2}\lambda}$ et, par récurrence, $\forall k \geq 1$, $K^k(x) \in Y_{q^{-2k}\lambda}$.

Or si $k, \ell \in \mathbb{N}$, avec $k \leq \ell$

$$q^{-2k}\lambda = q^{-2\ell}\lambda \Rightarrow q^{\ell - k} = 1 \Rightarrow \ell - k = 0 \text{ ou}$$

l'hypothèse faite sur q. Mais comme $\mathrm{Sp}E$ est fini, on a nécessairement $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^{-2k}\lambda \notin \mathrm{Sp}E$

et $K^k(x) \in Y_{q^{-2k}\lambda} = \{0\}$ donc $K^k(x) = 0$ donc $x = 0$

car K^k est inversible.

Donc $\boxed{\lambda \neq 0 \Rightarrow Y_\lambda = \{0_X\}}$

10_ Ainsi $\underset{(\text{car } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} E \neq \emptyset)}{\mathrm{Sp}E = \{0\}}$ donc E est nilpotent sur un espace de dimension n, donc $\boxed{E^n = 0_{\mathcal{L}(X)}}$.

($\chi_A = X^n$ annule E par théorème de Cayley-Hamilton.)

11_ On a $Y_0 = \mathrm{Ker}\, E \neq \{0\}$ et si $x \in \mathrm{Ker}\, E$

$E(K(x)) = q^{-2} K(E(x)) = q^{-2} K(0_X) = 0_X$ donc

$K(x) \in \mathrm{Ker}\, E$ qui est stable par K.

L'endomorphisme induit par K sur $\mathrm{Ker}\, E$ admet un vecteur propre $\boxed{x \in (\mathrm{Ker}\, E) \setminus \{0\} \text{ qui est aussi}}$

$\boxed{\text{vecteur propre de } K}$.

12. $\dim X = 2$

a) La question précédente donne $x_1^\circ \in \operatorname{Ker} E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Kx_1^\circ = \lambda x_1^\circ$ (et $x_1^\circ \neq 0_X$).

---

b) $x_2^\circ \in X \setminus \operatorname{Vect}(x_1^\circ)$ donc $\mathcal{B} = (x_1^\circ, x_2^\circ)$ base de X. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(E) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ car $E \neq 0_{\mathcal{L}(X)}$

donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(E^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par 10.

$= \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ donc $b = 0$ (et $a \neq 0$)

Ainsi $\boxed{x_1 = Ex_2^\circ = a\, x_1^\circ \text{ avec } a \neq 0.}$

---

c) Comme $a \neq 0$, $\mathcal{B}' = (x_1, x_2^\circ)$ base de X donc on a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $Kx_2^\circ = \beta x_1 + \alpha x_2^\circ$

Or $Kx_1 = KEx_2^\circ = q^2 EKx_2^\circ = q^2 \beta \underbrace{Ex_1}_{\substack{= E^2 x_2^\circ \\ = 0_X}} + q^2 \alpha \underbrace{E x_2^\circ}_{= x_1}$

et comme $x_1 \in \operatorname{Vect}(x_1^\circ)$ et x_1° vecteur propre de K associé à λ, c'est encore le cas pour x_1 donc

$$\lambda x_1 = Kx_1 = q^2 \alpha x_1 \quad \text{avec } x_1 \neq 0_X$$

donc $\alpha = q^{-2}\lambda$ et $\boxed{Kx_2^\circ = \beta x_1 + q^{-2}\lambda x_2^\circ.}$

d_ On a déjà vu que

$\boxed{\begin{matrix}(P_1)\\(P_3)\end{matrix}}$ $\begin{matrix}Kx_1 = \lambda x_1\\ Ex_1 = E^2 x_2^0 = 0_X\end{matrix}$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x_2 = x_2^0 + \alpha x_1$.

Alors

$\boxed{(P_4)}$ $Ex_2 = Ex_2^0 + \alpha E x_1 = x_1$

$$Kx_2 = Kx_2^0 + \alpha K x_1 = \left[\beta x_1 + q^{-2}\lambda x_2^0\right] + \alpha\lambda x_1$$

$$= q^{-2}\lambda x_2^0 + (\beta + \alpha\lambda) x_1$$

Donc en posant α tel que $\beta + \alpha\lambda = q^{-2}\lambda\alpha$

ie $\boxed{\alpha = \dfrac{\beta}{\lambda(q^{-2}-1)}}$ ce qui est licite car $q^2 \neq 1$ donc $q^{-2} \neq 1$ et $\lambda \neq 0$ car K inversible

On a bien aussi $\boxed{(P2)}$ $Kx_2 = q^{-2}\lambda x_2$.

Enfin $\boxed{(x_1, x_2) \text{ est une base de } X}$ car

$$\det_{(x_1, x_2^0)} (x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

13_ Récurrence : $\mathcal{P}(m)$: « $EF^m - F^m E = \alpha_m F^{m-1}\left[q^{1-m}K - q^{m-1}K^{-1}\right]$ »

avec $\alpha_m = \dfrac{q^m - q^{-m}}{(q-q^{-1})^2}$.

pour $m=1$, c'est l'hypothèse (iv).

Soit $m \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(m)$ est vrai.

Remarquons que

$$EF^{m+1} - F^{m+1}E = (EF^m - F^m E)F + F^m(EF - FE)$$

Donc, par HR,

$$EF^{m+1} - F^{m+1}E = \frac{q^m - q^{-m}}{(q-q^{-1})^2}\left[q^{1-m}F^{m-1}KF - q^{m-1}F^{m-1}K^{-1}F\right] + (q-q^{-1})^{-1}F^m(K-K^{-1})$$

$$= \frac{q^m - q^{-m}}{(q-q^{-1})^2}\left[q^{-m-1}F^mK - q^{m+1}F^mK^{-1}\right] + (q-q^{-1})^{-1}F^m(K-K^{-1})$$

Comme $KF = q^{-2}FK$, $FK^{-1} = q^{-2}K^{-1}F$

$$= (q-q^{-1})^{-2}F^m\left[\left((q^m-q^{-m})q^{-m-1} + q - q^{-1}\right)K - \left((q^m - q^{-m})q^{m+1} + q - q^{-1}\right)K^{-1}\right]$$

$$= (q-q^{-1})^{-2}F^m\left[\left(\cancel{q^{-1}} - q^{-2m-1} + q - \cancel{q^{-1}}\right)K - \left(q^{2m+1} \cancel{- q} + \cancel{q} - q^{-1}\right)K^{-1}\right]$$

$$= (q-q^{-1})^{-2}F^m(q^{m+1} - q^{-m-1})\left[q^{-m}K - q^mK^{-1}\right]$$

ce qui établit la récurrence.

14- $K v_m = K F^{m-1} v_1 = q^{-2(m-1)} F^{m-1} K v_1$

$= q^{2-2m} \lambda F^{m-1} v_1$

donc $\boxed{K v_m = q^{2-2m} \lambda v_m.}$

15- Soit $m \geq 2$. $EF^{m-1}v_1 - F^{m-1}Ev_1 = Ev_m - 0$

Donc, avec 13.,

$$E v_m = \alpha_{m-1} F^{m-2} (q^{2-m} K - q^{m-2} K^{-1}) v_1$$

$$= \alpha_{m-1} [q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1}] F^{m-2} v_1$$

car $K v_1 = \lambda v_1$ avec $\lambda \neq 0$ car K inversible

et $K^{-1} v_1 = \lambda^{-1} v_1$.

D'où $E v_m = (q-q^{-1})^{-2} (q^{m-1} - q^{1-m}) (q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1}) v_{m-1}$

Or $(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1})$

$$= q\lambda - q^{2m-3} \lambda - q^{3-2m} \lambda + q^{-1} \lambda^{-1}$$

$$= (q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1})$$

donc $\boxed{E v_m = \underbrace{(q-q^{-1})^2 (q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m} \lambda - q^{m-2} \lambda^{-1})}_{\text{noté } \beta_m \text{ dans la suite}} v_{m-1}}$

---

16. a) Vu la question 14, les $v_m \neq 0_X$ sont des vecteurs propres de K associés à la valeur propre $q^{2-2m} \lambda$. Or, si $m > m'$, $q^{2-2m} \lambda \neq q^{2-2m'} \lambda$ car $\lambda \neq 0$ (K inversible) et $q^{2(m-m')} \neq 1$ par hypothèse sur q. Ainsi, les v_m non nuls sont des vecteurs propres de K associés à des valeurs propres distinctes.

Donc $\boxed{\text{les } v_n \text{ non nuls sont linéairement indépendants.}}$

b) Si on a $N \geqslant 1$ tel que $v_N = 0_X$, alors

$\forall m \geqslant N, \quad v_m = F^{m-N} v_N = 0_X.$

Soit $m_0 = \max \underbrace{\{ N \geqslant 1, \ v_N \neq 0_X \}}_{\substack{\text{partie non vide (car contenant 1)} \\ \text{de } \mathbb{N}\text{, majorée par } n = \dim X \text{ vu a)}}} \geqslant 1.$

Alors $v_{m_0} \neq 0_X$ et d'après la première remarque,

$\forall i \in [\![1, m_0]\!], v_i \neq 0_X$ donc $\boxed{(v_1, \dots, v_{m_0}) \text{ libre}}$ par a)

et $\boxed{\forall m > m_0, \ v_m = 0_X \text{ par maximalité de } m_0.}$

c) Soit $Y = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{m_0})$.

Par définition, $F(Y) \subset \mathrm{Vect}(Fv_1, \dots, Fv_{m_0})$

$$= \mathrm{Vect}(v_2, \dots, v_{m_0}, \underbrace{v_{m_0+1}}_{= 0_X})$$

$$\subset Y$$

D'après 14, Y stable par K.

D'après 15, $E(Y) \subset \mathrm{Vect}(0_X, v_1, \dots, v_{m_0 - 1}) \subset Y$

Comme, par ailleurs, $Y \neq \{0_X\}$, $Y = X$ d'après (v).

Donc $(v_1, \dots, v_{m_0})$ libre et génératrice : c'est une base de X et $\dim X = \boxed{n = m_0.}$

d) Avec 15, $0_X = E \underbrace{v_{n+1}}_{= 0_X} = \dfrac{(q^n - q^{-n})(q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1})}{(q - q^{-1})^2} \underbrace{v_n}_{\neq 0_X}$

Donc $0 = \underbrace{(q^n - q^{-n})}_{\neq 0 \text{ car } q^{2n} \neq 1}(q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1})$

Donc $q^{1-n}\lambda = q^{n-1}\lambda^{-1}$ donc $\lambda^2 = (q^{n-1})^2$

donc $\boxed{\lambda = \pm q^{n-1}}$

---

11. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(K) = \begin{pmatrix} \lambda & & & (0) \\ & q^{-2}\lambda & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{2-2n}\lambda \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} q^{n-1} & & & (0) \\ & q^{n-3} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & q^{1-n} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(E) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_n \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $\forall p \in [\![2, n]\!]$,

$$\beta_p = \pm (q - q^{-1})^{-2}(q^{p-1} - q^{1-p})(q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) = \pm \gamma_p$$

Donc $\boxed{(K, E, F) \in \{(K_0, E_0, F_0), (-K_0, -E_0, F_0)\}}$

avec $(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n)$.

Fin du corrigé