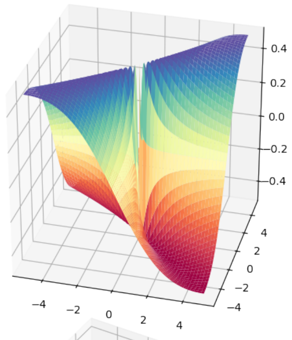
Calcul différentiel

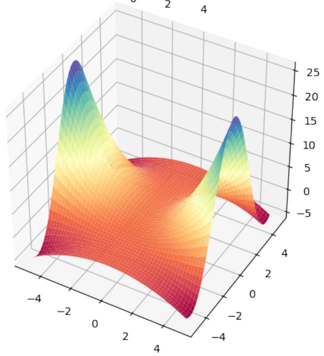
Exercices traités en cours



1 Montrer que

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

admet des applications partielles continue en 0, mais est discontinue en $(0,0)$.



2 Montrer que

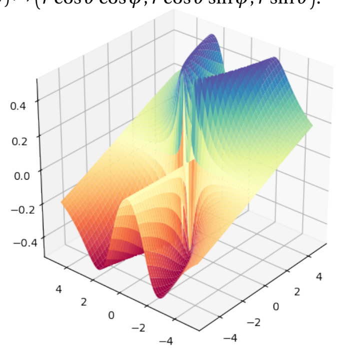
$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Calculer les dérivées partielles en tout point de $f:(r,\theta,\phi)\mapsto\left(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\right)$.

4 Calculer le dérivées partielles en tout point de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



Les application partielles en $(0,0)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

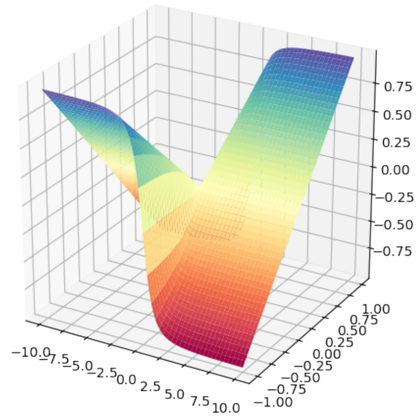
5

1. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :
$$f:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
2. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :
$$f:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

3. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :
$$f:(r,\theta,\phi)\mapsto\left(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\right).$$

6 **CCINP 33**

On pose : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.



1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Solution de 6 : CCINP 33

1. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant\|(x,y)\|_2$ et $|y|\leqslant\|(x,y)\|_2$.

   On en déduit que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|x||y|}{\|(x,y)\|_2}\leqslant\dfrac{\left(\|(x,y)\|_2\right)^2}{\|(x,y)\|_2}=\|(x,y)\|_2\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

   On en déduit que f est continue en $(0,0)$.
   Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   En $(0,0)$:

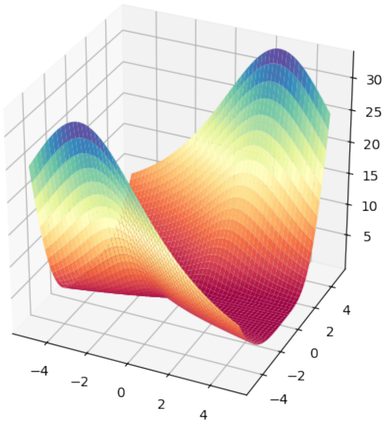
   $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

   De même, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(0,t)-f(0,0)\right)=0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
3. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Or,
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$
   On remarque que $\forall x>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

7 CCINP 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$



1. Prouver que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de 7 : CCINP 52

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy)=\frac{1}{2}\left(x-y\right)^2\geqslant 0$.
   Donc $x^2+y^2-xy\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   D'après 1., $x^2+y^2-xy=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=y=0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   D'après **1.**, pour $(x,y)\neq(0,0)$, $0\leqslant f(x,y)\leqslant \dfrac{2y^4}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
   Ainsi, $0\leqslant f(x,y)\leqslant 2(x^2+y^2)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$.
   Or : f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}f(0,0)=\alpha$.
   Donc : f est continue en $(0,0)\Longleftrightarrow\alpha=0$.
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \alpha=0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.
   (b) Pour tout $x\neq0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   Pour tout $y\neq0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=y\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
   (c) Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
   $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on note $r=\sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x|\leqslant r$ et $|y|\leqslant r$.
   De plus, $(x,y)\to(0,0)\Longleftrightarrow r\to0$.

   D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\leqslant 4\dfrac{\left|y^4(2x-y)\right|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant 4\dfrac{r^4(2r+r)}{r^4}=12r\underset{r\to0}{\longrightarrow}0.$
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|\leqslant 4\dfrac{\left|2y^5-3xy^4+4x^2y^3\right|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant 4\dfrac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4}=36r\underset{r\to0}{\longrightarrow}0.$
   Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
   Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

8

Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

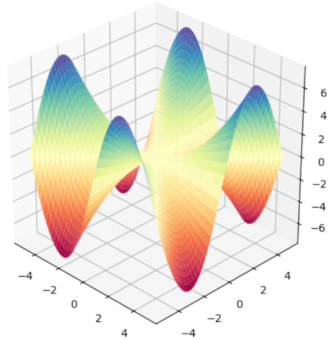
9

Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(tx_1,\dots,tx_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

10 CCINP 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$



   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de 10 : CCINP 57

1. (a) f est continue en $(0,0)\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|<\alpha\Longrightarrow|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.
   $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .
   (b) f est différentiable en $(0,0)\Longleftrightarrow\exists L\in\mathscr{L}_{\mathscr{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})/$ au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)=f(0,0)+L(x,y)+o(\|(x,y)\|)$.

   Remarque : Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, si $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $L\in\mathscr{L}_{\mathscr{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

2. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant\|(x,y)\|$ et $|y|\leqslant\|(x,y)\|$ (*).
   (a) $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ et $(x,y)\mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
   Continuité en (0,0) :

   On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|.|y|\leqslant\|(x,y)\|^2$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
   (b) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

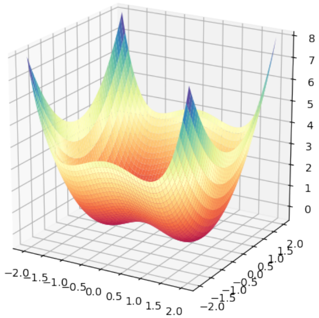
   De plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. (**)
   Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
De même, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

D'après (*) et (**), $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$.
Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

11 Déterminer les extremums de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$



Solution de 11 :

On est sur un ouvert avec une fonction $\mathscr{C}^2$.
On trouve trois points critiques : $(\pm 1, 0)$ et $(0,0)$.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet des valeurs propres de signe opposé donc f présente en $(0,0)$ un point selle (se retrouve en regardant $f(x,0)$ et $f(0,y)$.)
$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$: f présente en $(\pm 1, 0)$ un minimum local strict. On remarque en fait que

$$f(x,y) - f(\pm 1, 0) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} = y^2 + \frac{(x^2-1)^2}{2} \geqslant 0$$

donc le minimum est global.

12 Résoudre $2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y) = (x+y, x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de 12 :

La matrice du changement de variable est inversible.
Solutions : $f : (x,y) \mapsto g(x+2y)$ où $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre $a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide d'un changement de variable affine.

14 Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

15 Soit $\mathscr{V} =]0, +\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}$.
Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.

Solution de 15 :

$\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
Solutions : $(x,y) \mapsto g\left(x^2+y^2\right)$ où $g \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_*^+\right)$.

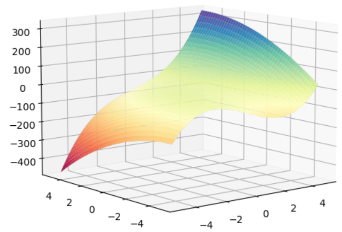
16 À l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathscr{U})$ où $\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Solution de 16 :

Solutions : $(x,y) \mapsto xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\frac{y}{x}$ où $g, h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+)$.

17 **CCINP 56**



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Solution de 17 : CCINP 56

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Déterminons les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y$.

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y & = & 0 \\ 6x - 6y & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+1) & = & 0 \\ y & = & x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & \text{et} & y = 0 \\ \text{ou} & & \\ x = -1 & \text{et} & y = -1 \end{cases}$$

Donc f admet 2 points critiques sur $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$ et $(-1,-1)$.
Donc si f admet un extremum en a alors $a=(0,0)$ ou $a=(-1,-1)$.
On a : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6$.

Etudions la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
Notons $H_1=H_f((0,0))$ la matrice hessienne de f en $(0,0)$.

$$H_1=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 6 & -6\end{pmatrix}$$

$\det H_1=-36<0$, donc H_1 admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.
Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
Etudions la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.
Notons $H_2=H_f((-1,-1))$ la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.

$$H_2=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,-1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 6 & -6\end{pmatrix}$$

$\det H_2=12\times 6-36=36>0$ et $\mathrm{tr}(H_2)=-18<0$, donc H_2 admet deux valeurs propres strictement négatives.
Donc f admet en $(-1,1)$ un maximum local qui vaut $f(-1,-1)=3$.

Conclusion : f admet uniquement un maximum local atteint en $(-1,-1)$ et n'admet pas de minimum local.

2. $f(x,0)=2x^3+2\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et $f(x,0)=2x^3+2\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$, donc f n'admet pas d'extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$.
3. K est un produit de compacts de $\mathbb{R}^2$ donc est un compact.
   Or f est continue sur K, donc f est bornée sur K et atteint ses bornes.
   Donc f admet un maximum global sur K et atteint ce maximum.
   Si f atteint ce maximum en $a\in\mathring{K}$, qui est un ouvert, alors a est un point critique. Or, les deux seuls points critiques de f n'appartiennent pas à $\mathring{K}$. Donc f atteint son maximum en un point a du bord $Fr\,K$ de K.
   On pose

$$L_1=\{(x,0),\ x\in[0,1]\}\quad L_2=\{(1,y),\ y\in[0,1]\}\quad L_3=\{(x,1),\ x\in[0,1]\}\quad L_4=\{(0,y),\ y\in[0,1]\}$$

On a alors $Fr\,K=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$.
Étude de f sur L_1 $g_1:x\mapsto f(x,0)=2x^3+2$ est croissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup_{x\in[0,1]} g_1(x)=g_1(1)=4$.
Étude de f sur L_2 $g_2:y\mapsto f(1,y)=4+6y-3y^2$. $\forall y\in[0,1]$, $g_2'(y)=6-6y\geqslant 0$ donc g_2 est croissante sur $[0,1]$. Donc $\sup_{y\in[0,1]} g_2(x)=g_2(1)=7$.
Étude de f sur L_3 $g_3:x\mapsto f(x,1)=2x^3+6x-1$ est croissante sur $[0,1]$.Donc $\sup_{x\in[0,1]} g_3(x)=g_3(1)=7$.
Étude de f sur L_4 $g_4:y\mapsto f(0,y)=-3y^2+2$ est décroissante sur $[0,1]$.donc $\sup_{y\in[0,1]} g_4(y)=g_4(0)=2$.

Conclusion : On en déduit que f admet 7 comme maximum global sur K et que ce maximum est atteint en $(1,1)$.

18 Déterminer de trois manières différentes $\min_{x^2+y^2=1} xy$.

En bleu :

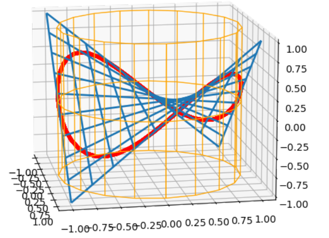
$$z=f(x,y)$$

En orange :

$$g(x,y,z)=0$$

En rouge :

$$z=f_{|X}(x,y)$$



Solution de 18 :

Première méthode Ici, $X=\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}$ est le cercle unité. On peut le paramétrer avec $x=\cos t$ et $y=\sin t$ pour $t\in\mathbb{R}$ (ou $]-\pi,\pi]$ ou ...)
Alors $xy=\cos t\sin t=\frac{\sin 2t}{2}$ admet comme minimum $-\frac{1}{2}$ atteint par exemple pour $t=-\frac{\pi}{4}$, donc pour $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Deuxième méthode On cherche des équations implicites pour X : $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[0,1]$.
Pour des raisons de signe, pour minimiser xy sur X, il suffit de minimiser

$$-x\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{x^2-x^4}=-\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

sur $[0,1]$. Le minimum est $-\frac{1}{2}$ atteint lorsque $x^2=\frac{1}{2}$ donc $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=-\sqrt{1-x^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve que le minimum vaut $-\frac{1}{2}$.

Troisième méthode On a $f:(x,y)\mapsto xy$ et $g:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$,

$$X=\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}.$$

Comme X est compact (fermé borné en dimension finie) et f est continue, on est assuré de l'existence d'un minimum global de f sur X en $(x_0,y_0)\in X$ (et aussi d'un maximum global).
De plus, $\nabla g(x_0,y_0)=(2x_0,2y_0)\neq(0,0)$. Par le théorème précédent, on a $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_0,y_0)=(y_0,x_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)=(2\lambda x_0,2\lambda y_0)$$

Donc $y_0=2\lambda x_0=2\lambda(2\lambda y_0)=4\lambda^2 y_0$.
Si $y_0=0$, alors $x_0=2\lambda y_0=0$ mais $(0,0)\notin X$. C'est donc que $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ et $(x_0,y_0)=(\pm y_0,y_0)\in X$.
On trouve alors le minimum et le maximum globaux de f sur X (qui existent bien tous les deux) atteints en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et valant $\pm\frac{1}{2}$.

19 **Oral CCINP** Montrer que $f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2$ admet un minimum et un maximum sur $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=13\}$ et les déterminer.

Solution de 19 : Oral CCINP
f est continue sur le compact $\mathscr{C}$ dont y est bornée et atteint ses bornes.
Soit $g:(x,y)\mapsto x^2+y^3-13$. Alors $\nabla(g):(x,y)\mapsto(2x,2y)$ ne s'annule qu'en $(0,0)\notin\mathscr{C}$.
Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x,y)\in\mathscr{C}\text{ et }\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$$

donc

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ 4x+6y &= \lambda x \\ 6x-y &= \lambda y \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ y &= \frac{\lambda-4}{6}x \\ x &= \frac{1+\lambda}{6}y \end{cases}$$

Alors $x=\dfrac{(\lambda-4)(\lambda+1)}{36}x$ et comme $x\neq 0$ (sinon $x=y=0$ ce qui est exclu),

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=\lambda^2-3\lambda-4=36$$

donc

$$\lambda^2-3\lambda-40=(\lambda+5)(\lambda-8)=0.$$

Pour $\lambda=-5$, On obtient $y=\dfrac{-3}{2}x$ puis $\left(1+\dfrac{9}{4}\right)x^2=13$ donc $x=\pm 2$ et $y=\mp 3$.
On calcule $f(2,-3)=f(-2,3)=16-72-9=-65$.
Pour $\lambda=8$, On obtient $y=\dfrac{2}{3}x$ puis $\left(1+\dfrac{4}{9}\right)x^2=13$ donc $x=\pm 3$ et $y=\pm 3$.
On calcule $f(3,2)=f(-3,-2)=36+72-4=104$.
Finalement, $\boxed{\max_{\mathscr{C}} f=f(3,2)=f(-3,-2)=104}$ et $\boxed{\min_{\mathscr{C}} f=f(2,-3)=f(-2,3)=-65.}$

20 **Inégalité arithmético-géométrique** En étudiant l'application $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\cdots\cdots x_n$ sur $C_s=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ x_1+\cdots+x_n=s\}$, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Solution de 20 : Inégalité arithmético-géométrique

f est continue sur le compact C_s dont y est bornée et atteint ses bornes.
Soit $g:(x,y)\mapsto x_1+\cdots+x_n-s$. Alors $\nabla(g):(x_1,\dots,x_n)\mapsto 1$ ne s'annule pas.
Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{C} \text{ et } \nabla f(x_1,\dots,x_n)=\lambda\nabla(x_1,\dots,x_n)$$

donc

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n &= s \\ \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \prod_{j\neq i}x_j &= \lambda \end{cases}$$

On a alors $\lambda x_1=\cdots=\lambda x_n$.
Soit $\lambda=0$ et au moins l'un des x_i est nul, donc $f(x_1,\dots,x_n)=0=\min_{C_s} f$.
Soit $\lambda=0$ et c'est le maximum de f qui va être atteint. $\lambda s=\lambda(x_1+\cdots+x_n)=n\lambda x_i$ et donc tous les x_i valent $\dfrac{s}{n}$. On a alors $f\left(\dfrac{s}{n},\dots,\dfrac{s}{n}\right)=\left(\dfrac{s}{n}\right)^n$.
Ainsi, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$,

$$x_1\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)^n$$

donc

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots x_n}{n}$$

.

Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique.

21 Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{d}f(A)$.

Solution de 21 :

$(A+H)^2=A^2+AH+HA+H^2$ avec $H\mapsto AH+HA$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0\leqslant\|H^2\|\leqslant\|H\|^2$ donc $\dfrac{\|H^2\|}{\|H\|}\to 0$ et $H^2=o(H)$. Donc f est différentiable en A et $\mathrm{d}f(A):H\mapsto AH+HA$.

22 Montrer que, si E est un espace euclidien $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\|^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

Solution de 22 :

$\|a+h\|^2=\|a\|^2+2(a|h)+\|h\|^2$ avec $h\mapsto 2(a|h)$ linéaire et $\|h\|^2=o(h)$. Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a):h\mapsto 2(a|h)$.

23 Montrer que, si E est un espace euclidien, $u\in\mathscr{L}(E)$, $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (x|u(x))\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.
Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

Solution de 23 :

$(a+h|u(a+h))=(a|u(a))+(h|u(a))+(a|u(h))+(h|u(h))$ avec $h\mapsto(h|u(a))+(a|u(h))$ linéaire et $|(h|u(h))|\leqslant\|h\|\,\|u(h)\|$ par Cauchy-Schwarz (pour le norme euclidienne associée au produit scalaire) et comme $\|u(h)\|\to 0$ par continuité, $(h|u(h))=o(h)$.

Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a):h\mapsto(h|u(a))+(a|u(h))$, ce qui devient $2(u(a)|h)$ si de plus u est symétrique.

Continuité

24 Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\qquad\qquad g:(x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{x}$$

25 Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\qquad h:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x\neq y,\\ |x| & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

26 Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

27 Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction ci-dessous. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$f:(x,y)\mapsto \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } x=y=0. \end{array}\right.$$

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$.

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

29 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Déterminer les dérivées (partielles) de $g:(x,y)\mapsto f(y,x)$ et $h: x\mapsto f(x,x)$.

30 Soit $\phi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ continue et $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\displaystyle\int_x^y \phi(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

31 **Fonctions harmoniques** Une application $f:\mathscr{U}\mapsto\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite ***harmonique*** si et seulement si $\Delta f=0$ où $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le ***laplacien*** de f.

1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, soient $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ et $f(x,y)=\ln\left|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}\right|$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^3$ et harmonique, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Vérifier que $f:(x,y)\mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

32 Calculer l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

Solution de 32 :
On notera $(\bullet)$ le couple $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Par composition, g est de classe C^2 sur un ouvert $]-r,r[\times\mathbb{R}$, et, sur cet ouvert :

$$\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet)$$
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho,\theta)=-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet)+\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)&=\cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bullet)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\bullet)\right]+\sin\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bullet)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bullet)\right]\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bullet)+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\bullet)+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bullet)\end{aligned}$$

(en utilisant le théorème de Schwarz). Puis, après simplification et, aussi, utilisation du théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)=-\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet)-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet)+\rho^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bullet)-2\rho^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\bullet)+\rho^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bullet)$$

On ne calcule pas la dérivée seconde « croisée » (pas utile). On voit, si $\rho\neq 0$, que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)=\Delta f(\bullet)-\frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet)-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet)$$

d'où le résultat :

$$\Delta f(\bullet)=\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta)$$

Équations aux dérivées partielles

33 Soit $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ i.e. telle que

$$\forall\, t\in\mathbb{R}_*^+,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y).$$

Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$, puis étudier la réciproque pour une fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$.

34 Résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$.

35 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

36 Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$

37 **CCINP** Toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, sous la forme $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, u et v désignant 2 fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

(C1) Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

(C2) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

1. Démontrer que, si u et v existent, alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=0$.
2. On suppose que $u(x,y)=x^3-3xy^2+2x^2-2y^2+3x$.
   (a) Trouver les fonctions v telles que les conditions (C1) et (C2) soient satisfaites.
   (b) Démontrer qu'il existe une fonction $f=u+\mathrm{i}v$ unique telle que $f(0)=0$ et expliciter $f(z)$ en fonction de z.
   (c) Pour cette fonction f, construire dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point A d'affixe $f(\mathrm{i})$.

38 En utilisant le changement de variables $(u,v)=(x,x+y)$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

39 À l'aide du changement de variables $(u,v)=\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$

40 Trouver toutes les applications $\varphi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que l'application $f:\mathscr{U}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, définie par $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit solution sur $\mathscr{U}$ de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{y}{x^3}$ puis résoudre l'équation sous forme général en posant $u=x+y$ et $v=x-y$.

Optimisation

41 Déterminer les extremums locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ suivantes :

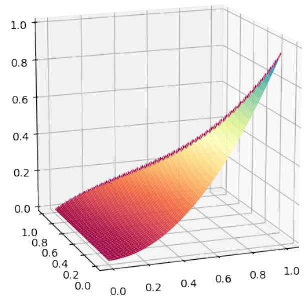
1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $g(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+5$
3. $h(x,y)=x^3+y^3$
4. $i(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$
5. $j(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

42 Soit

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+xy^2$$

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x+y\leqslant 1\right\}$$

Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.



Solution de 42 :

K est fermé borné en dimension finie donc compact.

Donc f atteint un minimum et un maximum sur K.

Sur $\mathring{K}$, il n'y a qu'un point critique $(0,0)\notin\mathring{K}$ qui est exclu d'emblée.

On paramètre les trois côtés du bord, et on trouve que le maximum est 1 atteint en $(1,0)$, et le minimum est 0 atteint en tout $(0,t)$.

43 Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathscr{U}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a,b\in\mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a)\leqslant f(b)-f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

44 Déterminer les triangles d'aire maximale inclus dans un cercle donné.

45 **CCINP** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

46 **Principe du maximum** On désigne par D le carré ouvert $]0,a[\times]0,a[$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet un maximum local en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u=0$ sur D (fonction harmonique). On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive.
Démontrer qu'il existe $\epsilon>0$ tel que la fonction
$$u_\epsilon:(x,y)\longmapsto u(x,y)+\epsilon(x^2+y^2)$$
ait un maximum local sur D.
En déduire que u est nulle sur D.

Solution de 46 : Principe du maximum

1. Supposons que u admette un maximum local en (x_0,y_0). L'application
$$t\longmapsto u(t,y_0)$$
définie sur $]0,a[$ atteint un maximum local en x_0. Sa dérivée seconde en ce point (qui existe bien !) est donc négative ou nulle (sa dérivée première est nulle). Mais cette dérivée seconde est $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)$. On procède de même avec l'autre variable et le laplacien, somme de deux termes négatifs ou nuls, l'est.
2. Ce qui est sûr, c'est que u_ϵ atteint un maximum absolu sur $\overline{D}$, par argument de continuité/compacité. Si ce maximum n'est pas atteint sur le bord, c'est gagné. Or sur le bord, u_ϵ est majoré par $2\epsilon a^2$. Si $\epsilon<m$ où m est une valeur strictement positive prise par u, on est sûr que le maximum absolu ne peut pas être atteint sur le bord. C'est donc un maximum global atteint sur D, en ce point le laplacien est négatif ou nul d'après la première question. Mais $\Delta u_\epsilon=\Delta u+4\epsilon=4\epsilon>0$ sur D, contradiction. Donc u ne peut pas prendre en un point une valeur strictement positive. Mais $-u$ non plus. Conclusion : u est nulle.

47 Soit Γ la courbe d'équation $x^3+y^3=1$. Déterminer les extremums de $f:(x,y)\mapsto xy$ sur $\mathscr{D}$.

48 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $c\in\mathbb{R}$, et $\mathscr{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax+by=c$.

1. Déterminer le minimum de $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4$ sur $\mathscr{D}$.
2. Déterminer les extremums de $g:(x,y)\mapsto xy$ sur $\mathscr{D}$.

Différentielle

49 Montrer que $f:M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto M^\intercal M$ est différentiable et calculer sa différentielle.

50 Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle. *On pourra utiliser une somme géométrique.*

51 **Oral Mines** Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0_E\}$ et calculer sa différentielle.

[*On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale*]

Solution de 51 : Oral Mines

Soit $x \neq 0_E$. Au voisinage de 0_E (pour h), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|x+h\|^2}(x+h) &= \frac{1}{\|x\|^2+2(x|h)+\|h\|^2}(x+h)\\ &= \left[\frac{1}{\|x\|^2}\times\frac{1}{1+2\dfrac{(x|h)}{\|x\|^2}+\dfrac{\|h\|^2}{\|x\|^2}}\right](x+h)\\ &= \left[\frac{1}{\|x\|^2}\times\left(1-2\frac{(x|h)}{\|x\|^2}+\underset{h\to 0_E}{o}(h)\right)\right](x+h) \qquad (DL_0 \text{ de } u\mapsto 1/(1+u))\\ &= \frac{1}{\|x\|^2}x+\frac{1}{\|x\|^2}h-2\frac{(x|h)}{\|x\|^4}x+\underset{h\to 0_E}{o}(h)\end{aligned}$$

ce qui conclut…bien sûr, à l'oral, on peut avoir des questions sur la justification plus détaillée des o, mais ce n'est pas spécialement difficile.

52 **Différentielle du déterminant** La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det : A \longmapsto \det A$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de A. Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera $\dfrac{\partial}{\partial a_{i,j}}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1re méthode

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\mathrm{Com}\,A$ de A.
   ⚠ *Il s'agit d'une question facile !*
2. En déduire l'expression, si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{d}(\det)(A)(H)$.
   (On utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace).

Applications

1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A, c'est-à-dire l'unique matrice $\nabla \det(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = (\nabla \det(A) \mid H).$$
2. *(Souvenirs d'algèbre linéaire…)* Trouver une condition nécessaire et suffisant sur A pour que $\mathrm{d}(\det)(A) = 0$ (on désigne ici par simplement par 0 l'application $H \to 0$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

2e méthode

1. Démontrer, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp M) = \exp\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$
2. On note, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(M) = I_n + M + \alpha(M)$. Montrer que $\alpha(M) = \underset{M\to(0)}{o}(M)$
   (On pourra utiliser une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. sous-multiplicative et telle que $\|I_n\| = 1$).
3. Utiliser les deux questions précédentes pour retrouver la différentielle en I_n de $\det$ (dont l'existence est, rappelle-t-on, acquise).
4. En déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\det$.
5. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Donner la différentielle de $\det$ en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Solution de 52 : Différentielle du déterminant

1re méthode

1. Pourquoi « facile » ? parce que l'application $\det$ est affine quand on la considère comme fonction d'un coefficient de la matrice. Autrement dit, il va s'agir de dériver une fonction $t \mapsto at+b$. Comme souvent avec les fonctions de plusieurs variables, le fond du problème n'est pas compliqué, mais il faut démêler les notations. Disons donc, si (i,j) est un couple fixé :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det A = a_{i,j}[\mathrm{Com}\,A]_{i,j} + \phi_{i,j}(A)$$
   où ni $[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$, ni $\phi_{i,j}(A)$ ne dépend de $a_{i,j}$. Ceci est conséquence par exemple de la formule sur le développement du déterminant par rapport à une ligne, ou par rapport à une colonne. On l'écrit naturellement si on a compris ce que signifiait le mot « cofacteur ». Et on a donc
$$\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A) = [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$$
2. Les $A \longmapsto [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc on peut appliquer le théorème fondamental (on pouvait aussi dire qu'on avait admis comme évident le fait que det était de classe C^1) :
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} H_{i,j}[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$$
   Qu'on peut réécrire en
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} H_{i,j}[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}\right)$$
   Et on arrive ainsi à une formule célèbre :
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = \mathrm{tr}\big(H\ (\mathrm{Com}\,A)^T\big)$$
   (les propriétés de la trace font qu'on peut arranger le produit comme on veut, mettre la transposition sur n'importe laquelle des deux matrices…-

Applications

1. Par ce qui précède, $\nabla \det(A) = \mathrm{Com}\,A$.
2. Une condition nécessaire est que la comatrice de A soit nulle, c'est-à-dire que tous les déterminants des matrices carrées $(n-1)\times(n-1)$ extraites de A soient nuls, c'est-à-dire que le rang de A soit $\leqslant n-2$ (caractérisation du rang par la dimension maximale d'une matrice carrée inversible extraite).

2e méthode

1. On trigonalise sur $\mathbb{C}$.
2. On peut majorer, à partir de la définition de l'exponentielle de matrice :
$$\|\alpha(M)\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\|M\|^n$$
   où l'on considère une norme $\|.\|$ d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\|M\|^n = \|M\|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\|M\|^{n-1} = \|M\|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)!}\|M\|^p$$
   (essayer de mettre $\|M\|$ en facteur est naturel, compte tenu du but recherché). On en déduit alors
$$\|\alpha(M)\| \leqslant \|M\|(\exp(\|M\|)-1)$$
   ce qui conclut bien.

3. Notons ϕ cette différentielle qui, rappelons-le, est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.
On a, d'abord :

$$\begin{aligned}\det(\exp M) &= \det(I_n + M + \alpha(M))\\ &= \det(I_n) + \phi\big(M + \alpha(M)\big) + \underset{M\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|M+\alpha(M)\|)\\ &= 1 + \phi(M) + \underset{M\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|M\|)\end{aligned}$$

(on utilise le fait qu'une application linéaire appliquée à un $\underset{M\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|M+\alpha(M)\|)$, donne un

$$\underset{M\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|M+\alpha(M)\|),$$

en vertu par exemple du fait qu'il existe k tel que

$$\|\phi\big(\alpha(M)\big)\| \leqslant k\ \|\alpha(M)\|$$

(voir continuité des applications linéaires).
Mais, d'autre part,

$$\begin{aligned}\det(\exp M) &= \exp\big(\mathrm{Tr}(M)\big)\\ &= 1 + \mathrm{Tr}(M) + \beta(M)\end{aligned}$$

où

$$|\beta(M)| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}|\,\mathrm{Tr}(M)|^n$$

Mais il existe k' tel que, pour tout M, $|\mathrm{Tr}(M)| \leqslant k'\|M\|$, ce qui permet de conclure facilement que $\beta(M) = \underset{M\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|M\|)$. Et on conclut :

$$\phi = \mathrm{Tr}$$

4.
$$\det(A+H) = \det(A)\ \det\big(I_n + A^{-1}H\big) = \det(A)\ \left(1 + \mathrm{tr}(A^{-1}H) + \underset{H\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)\right)$$

En effet, un $\underset{H\to 0_n}{\mathrm{o}}\big(\|A^{-1}H\|\big)$ est un $\underset{H\to 0_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)$. On en déduit que la différentielle est

$$\mathrm{d}(\det)(A)\ :\ H \longmapsto \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H) = \mathrm{tr}\big((\mathrm{Com}\,A)^T\ H\ \big)$$

5. Un grand classique.
6. Les applications $\mathrm{d}(\det)$ et $A \mapsto \big(H \mapsto \mathrm{tr}\big((\mathrm{Com}\,A)^T\ H\ \big)\big)$ sont continues et coïncident sur un ensemble dense, donc son égales.