22 **EDL**$_1$ Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$

1. $(1+x^2)y'+xy=2x^2+1$
2. $y'+y=t\mathrm{e}^t+\sin t$
3. $y'-\ln(x)y=x^x$
4. $t^2y'+2ty=\dfrac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y'+(\sin t)y=\cos^3 t$
6. $y'+2xy=\mathrm{e}^{x-x^2}$
7. $ty'-y=\sqrt{|t|}$
8. $y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y''+(1+t)y'=2$
10. $(x^2+1)y'+xy=1$
11. $(t^2+1)^2y'+2t(t^2+1)y=1$
12. $\mathrm{ch}(x)y'-\mathrm{sh}(x)y=\mathrm{sh}^3(x)$

Solution de 22 : EDL$_1$

1. Sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto x+\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Sur $\mathbb{R}$: $t\mapsto \dfrac{2t-1}{4}\mathrm{e}^t+\dfrac{\sin t-\cos t}{2}+\lambda\mathrm{e}^{-t}$
3. Sur $\mathbb{R}_*^+$: $x\mapsto x^x+\lambda x^x\mathrm{e}^{-x}$
4. Sur $I_1=\mathbb{R}_-^*$ ou $I_2=\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\dfrac{\operatorname{Arctan} t+\lambda_k}{t^2}$
   Pas de solution sur $\mathbb{R}$.
5. Sur $I_k=\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $t\mapsto(\sin t+\lambda_k)\cos t$ avec $\lambda_k\in\mathbb{K}$.
   Solutions sur $\mathbb{R}$: $t\mapsto(\sin t+\lambda)\cos t$.
6. Sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto(\lambda+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x^2}$
7. Sur $I_1=\mathbb{R}_-^*$ ou $I_2=\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\lambda_k t-2\sqrt{|t|}$
   Pas de solution sur $\mathbb{R}$.
8. Sur $\mathbb{R}$. $x\mapsto(x^2+\lambda)\mathrm{e}^{-x^2}$
9. Sur $I_1=]-\infty,-1[$ et $I_2=]1,+\infty[$, $t\mapsto\ln^2(1+t)+\lambda_k+\mu_k\ln(1+t)$.
   Aucune solution sur $\mathbb{R}$.
10. Sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$.
11. Sur $\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\operatorname{Arctan} t+\lambda}{t^2+1}$.
12. Sur $\mathbb{R}$, $1+\mathrm{ch}^2+\lambda\,\mathrm{ch}$.

23 **EDL$_2$** Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8\sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
3. $y'' + y = \sin^2(t)$
4. $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x)\cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

Solution de 23 : EDL$_2$

1. $t \mapsto -\dfrac{4}{5}\cos t - \dfrac{12}{5}\sin t - \mathrm{e}^{t-\pi} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2(\pi-t)}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2 + Ax + B}{4}\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{8}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.
3. $t \mapsto A\sin t + B\cos t + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2t}{6}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

   Ou, dans $\mathbb{C}$, $t \mapsto A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,t + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2t$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.
4. $x \mapsto \left(A\cos x + \dfrac{x+B}{4}\sin x\right)\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{2\cos x + \sin x}{80}\mathrm{e}^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.
5. $t \mapsto (A\cos t + B\sin t)\mathrm{e}^{-t} + t - 1 + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

24 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

Solution de 24 :

$$x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{2x-1}{4} = \lambda\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2x-1}{4}.$$

25 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Solution de 25 :

$$x \mapsto A\operatorname{sh} x + B\cos x - x + \frac{\cos x + x\sin x}{2}.$$