

Fonctions vectorielles, équations différentielles

Exercices Banque CCINP

1 CCINP 31

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Solution de 1 : CCINP 31

- En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.
Donc, $x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ est une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
Par la méthode de variation des constantes,

on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$ avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant :
$$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}.$$

$\lambda(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

D'après la question 1., $\mu(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ convient.

On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^5 x + \left(\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).

Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + y_p(x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2 CCINP 32 Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

- Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de \mathbb{R} , avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Solution de 2 : CCINP 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1}$$

$$\text{Donc } x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}) x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1)a_n$.

Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2} \quad \text{définies sur }]-1, 1[, \text{ avec } a_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Prouvons que les solutions de (E) sur $]0; 1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.

Si toutes les solutions de (E) sur $]0; 1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ serait égal à la droite vectorielle $\text{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x \in]0; 1[, f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \mapsto x(x-1)$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0; 1[$ et que la fonction $x \mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0; 1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ est un plan vectoriel.

D'où l'absurdité.

3

CCINP 42 On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2x y' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2x y' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Solution de 3 : CCINP 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.

En effet, une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln x$.

2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \mapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.

On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\frac{1}{2x}$.

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \mapsto kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$, alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant $f(0) = 0$.

Par contre, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

4 CCINP 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur \mathbb{R} . En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Solution de 4 : CCINP 74

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

(b) $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} -1+X & 0 & -2 \\ 0 & -1+X & 0 \\ -2 & 0 & -1+X \end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la première ligne, on obtient, après factorisation : $P_A(X) = (X-1)(X+1)(X-1)$.

On obtient aisément, $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On pose $e'_1 = (0, 1, 0)$, $e'_2 = (1, 0, -1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$.

Alors, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A .

2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Alors, $(S) \iff X' = AX$.

On note P la matrice de passage de la base canonique e de \mathbb{R}^3 à la base e' .

D'après 1., $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et, si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.

Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$.

On pose alors $X_1 = P^{-1}X$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.

Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \iff X_1' = DX_1 \iff \begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = -y_1 \\ z_1' = 3z_1 \end{cases}$

On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.

On trouve $\begin{cases} x_1(t) = ae^t \\ y_1(t) = be^{-t} \\ z_1(t) = ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$.

On obtient : $\begin{cases} x(t) = be^{-t} + ce^{3t} \\ y(t) = ae^t \\ z(t) = -be^{-t} + ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

5 CCINP 75 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
- On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A .

Trouver une base (v_1, v_2) de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a, b et c .

- En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Solution de 5 : CCINP 75

- On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^2$, donc $\text{Sp}A = \{1\}$.
Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2 , donc égale à I_2 .
Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.
- $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable. $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
Pour $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$ (choisi de sorte que $f(v_2) = v_2 + v_1$) on obtient une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore, grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.

Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases}$ de solution générale $\begin{cases} a(t) = \lambda e^t + \mu t e^t \\ b(t) = \mu e^t \end{cases}$

Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial : $\begin{cases} x(t) = ((2\lambda - \mu) + 2\mu t)e^t \\ y(t) = (-\lambda - \mu t)e^t \end{cases}$

Autres exercices vus en cours

6 Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de 6 :

On peut déterminer $\exp A$ soit en diagonalisant, soit en cherchant le polynôme annulateur pour trouver les puissances de A .

En effet, On vérifie que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-2} + 4e^3 & -4e^{-2} + 4e^3 \\ -e^{-2} + e^3 & 4e^{-2} + e^3 \end{pmatrix}$ après calculs.

Deuxième méthode $P = (X+2)(X+3)$ est à la fois le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A , et en est un polynôme annulateur. Division euclidienne : $X^k = P \times Q_k + R_k$ où $R_k = a_k X + b_k$ se trouve en évaluant en -2 et 3 , avec $A^k = R_k(A) = a_k A + b_k I_2$.

En remplaçant dans la définition de $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, on retrouve l'expression.

On remarque que $B = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 2.

Comme elles commutent, $\exp B = \exp I_2 \exp N = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} (I_2 + N) = \begin{pmatrix} e & -e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

7 Résoudre $y^{(4)} = y$ en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.

8 Soit $\Phi : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

où $A : J \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle J . Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).

9 Soit T un réel > 0 , $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T -périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur \mathbb{R} de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$

Indication : on remarquera que Φ est T -périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$.

10 On souhaite déterminer un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) &= tx(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + ty(t) \end{cases}$$

1. Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$. et conclure.
2. Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Solution de 10 :

On se ramène à $u' = -v$ et $v' = u$ avec en particulier $u'' = -u$. D'où un système fondamental de solution $\left(t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{t^2/2}, t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{t^2/2} \right)$.

11 Dans des problèmes d'écrit...

1. Soit a une fonction continue sur \mathbb{R} , paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.

2. Soit a, b deux fonctions T -périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$

est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.

3. On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

Solution de 11 : Dans des problèmes d'écrit...

1. Une implication est évidente. Pour l'autre, f est paire si et seulement $f = -\hat{f}$ où $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$. Or f est solution si et seulement si $-\hat{f}$ l'est. Il suffit alors d'utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy avec $t_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'_0 = f'(0)$
2. Utiliser le théorème d'unicité, appliqué à f et $x \mapsto f(x + T)$ où ϕ est une solution.
3. Si elle sont impaires, elle sont nulles en 0, leur wronskien est nul. Si elles sont paires, leurs dérivées sont impaires, même chose. On peut aussi conclure en utilisant le théorème d'existence et une contradiction.

12 Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.

Solution de 12 :

$x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont solutions, leur wronskien vaut $\omega \neq 0$.

13 Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général. Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0 .

Solution de 13 :

Leur wronskien serait nul en x_0 .

14 EDL₂ newtoniennes Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite **newtonienne**)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

Solution de 14 : EDL₂ newtoniennes

$w' = 0$, difficile de faire plus simple, et on retrouve le résultat de l'exercice 12.

15 Oral Mines Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution de 15 : Oral Mines

Soit $z : t \mapsto y(t+1)$. Alors z est solution, et $w(y, z)$ est nul en 0. Donc (y, z) est liée. Si $y = \tilde{0}$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe α tel que $z = \alpha y$. On conclut alors par récurrence sur k pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{N}$, puis par récurrence sur $-k$ pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{Z}^-$.

16 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

17 Résoudre sur \mathbb{R}_*^+ (H) $x^2 y'' - 3x y' - 5y = 0$

Solution de 17 :

Équation d'Euler, la recherche de solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ conduit aux solutions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto x^5$, le wronskien permet de voir qu'il s'agit bien d'un système fondamental de solutions.

18 Résoudre sur $]1, +\infty[$ (H) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solution de 18 :

On cherche des solutions polynomiales, le terme de plus haut degré nous dit que celui-ci est 1 ou 2.

On cherche alors les solution $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On trouve toutes les solutions : $x \mapsto a(x^2+1) + bx$ qui forment bien un plan vectoriel.

19 Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy'' + y' - y = 0$.

Terminer la résolution sur \mathbb{R}_+^* en posant $t = \sqrt{2x}$.

Solution de 19 :

On cherche les solutions DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n$. Soit $a_0 = 0$ et il s'agit de la fonction nulle.

Soit $a_0 \neq 0$ et d'Alembert nous donne un rayon de convergence $+\infty$.

On exprime ensuite la solution $f(x) = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$ si $x \geq 0$ et $a_0 \cos(\sqrt{-2x})$ si $x \leq 0$.

Cela donne une droite de solution engendrée par $x \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$ sur \mathbb{R}_+^* .

Il faut trouver une solution indépendante. La variation de la constante donne des calculs pénibles. On peut deviner un $\text{sh}(\sqrt{2x})$...

Effectuons le changement de variable : on pose $z(t) = z(\sqrt{2x}) = y(x) = y(t^2/2)$, et on a bien z deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si y l'est.

Puis, pour tout $t > 0$, $z'(t) = t y'(t^2/2)$, $z''(t) = t^2 y''(t^2/2) + y'(t^2/2)$ donc notre équation est équivalente à $z'' = z$ d'où z , d'où nos solutions $x \mapsto \lambda \text{ch}(\sqrt{2x}) + \mu \text{sh}(\sqrt{2x})$.

20 Trouver les solutions sur \mathbb{R} de $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$.

Solution de 20 :

Sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$. (Reconnaître la dérivée d'un quotient en divisant par \cos^2).

Solutions sur $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$. Pour le raccord, effectuer un développement limité à gauche et à droite de $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

21 **Écrit CCP 2005** Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad x y' - n y = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geq 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution de 21 : Écrit CCP 2005

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène : $(E_n) \quad x y' - n y = 0$ où n est un entier strictement positif.

1. On obtient sans mal que sur I l'espace des solutions est $\text{Vect}(x \in I \mapsto x^n)$ et sur J , $\text{Vect}(x \in J \mapsto x^n)$.
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur \mathbb{R} est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme dérivable en 0, sa courbe est donc une droite.

En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur \mathbb{R} est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.

3. Supposons $n > 1$, soit f une solution de (E_n) sur \mathbb{R} , alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$

En évaluant l'équation en 0, on tire $f(0) = 0$.

La continuité en 0 n'impose aucune condition sur α et β , la dérivabilité non plus car $\frac{\alpha x^n - 0}{x} = \alpha x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$

et $\frac{\beta x^n - 0}{x} = \beta x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ car $n > 1$.

Réciproquement : toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \leq 0 \\ \beta x^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ bien dérivable sur \mathbb{R} et solution de l'équation différentielle.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^n & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Révisions de MP2I

22

EDL₁ Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur \mathbb{R}

1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2. $y' + y = te^t + \sin t$
3. $y' - \ln(x)y = x^x$
4. $t^2y' + 2ty = \frac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
7. $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y'' + (1+t)y' = 2$
10. $(x^2+1)y' + xy = 1$
11. $(t^2+1)^2y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12. $\text{ch}(x)y' - \text{sh}(x)y = \text{sh}^3(x)$

Solution de 22 : EDL₁

1. Sur $\mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Sur $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{2t-1}{4}e^t + \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$
3. Sur $\mathbb{R}_*^+ : x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$
4. Sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t + \lambda_k}{t^2}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
5. Sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
Solutions sur $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$.
6. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (\lambda + e^x)e^{-x^2}$
7. Sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \lambda_k t - 2\sqrt{|t|}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
8. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (x^2 + \lambda)e^{-x^2}$
9. Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$, $t \mapsto \ln^2(1+t) + \lambda_k + \mu_k \ln(1+t)$.
Aucune solution sur \mathbb{R} .
10. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda}{\sqrt{1+x^2}}$.
11. Sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t + \lambda}{t^2 + 1}$.
12. Sur \mathbb{R} , $1 + \text{ch}^2 + \lambda \text{ch}$.

23

EDL₂ Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8 \sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2. $y'' - 2y' + y = \text{ch } x$
3. $y'' + y = \sin^2(t)$
4. $y'' + 4y' + 5y = \text{ch}(2x) \cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

Solution de 23 : EDL₂

$$1. t \mapsto -\frac{4}{5} \cos t - \frac{12}{5} \sin t - e^{t-\pi} + \frac{1}{5} e^{2(\pi-t)}.$$

$$2. x \mapsto \frac{x^2 + Ax + B}{4} e^x + \frac{e^{-x}}{8} \text{ avec } A, B \in \mathbb{K}.$$

$$3. t \mapsto A \sin t + B \cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{6} \text{ avec } A, B \in \mathbb{K}.$$

$$\text{Ou, dans } \mathbb{C}, t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

$$4. x \mapsto \left(A \cos x + \frac{x+B}{4} \sin x \right) e^{-2x} + \frac{2 \cos x + \sin x}{80} e^{2x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{K}.$$

$$5. t \mapsto (A \cos t + B \sin t) e^{-t} + t - 1 + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \text{ avec } A, B \in \mathbb{K}.$$

24 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

Solution de 24 :

$$x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{2x-1}{4} = \lambda \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2x-1}{4}.$$

25 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Solution de 25 :

$$x \mapsto A \sin x + B \cos x - x + \frac{\cos x + x \sin x}{2}.$$

Sujets d'écrits

26 **CCP 2016** On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de \mathbb{R} ?

Solution de 26 : CCP 2016

Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $] -r, r[$ (avec $r > 0$), notée $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En dérivant deux fois cette série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in] -r, r[$:

$$(x^2 - x)y'(x) = (x^2 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

ainsi que

$$x^2 y''(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in]-r; r[$:

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + (x^2 - x)y'(x) + 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1}) x^n + 2a_0. \end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E) , on obtient par unicité du développement en série entière les relations

$$\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0 \end{cases}.$$

Puisque $n^2 - 2n + 2 = 1 + (n-1)^2 \neq 0$, ces relations se réécrivent $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2} a_{n-1} \end{cases}$, ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate.

En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle.

Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

27

CCP 2014 a et b étant deux fonctions continues sur \mathbb{R} , on note l'équation différentielle :

$$(E): \quad x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, i[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur \mathbb{R} vérifiant (E) sur \mathbb{R} tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^- .
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J .
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où $(E): \quad x^2 y'' + x y' = 0$.
Déterminer S^+ et S^- .
Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
4. Dans cette question $(E): \quad x^2 y'' - 6x y' + 12y = 0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^- .
Déterminer S et donner la dimension de S .
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E): \quad x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Solution de 27 : CCP 2014

1. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation (E) se réécrit sous forme résolue $y'' + \frac{a(x)}{x^2} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$.
Les fonctions $x \mapsto \frac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2.
Donc par théorème, S^+ est de dimension 2 et de même, S^- est de dimension 2.

2. Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur \mathbb{R}^* .

Par continuité de f en 0 , $f(0) = 0$.

Donc $f = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}(\varphi)$.

Or $\mathfrak{Im}(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2+2=4$.

Donc $\mathfrak{Im}(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\mathfrak{Im}(\varphi)) \leq 4$.

Etant isomorphe à $\mathfrak{Im}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.

3. • Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)

Sur I_0 , l'équation est équivalente à $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ soit au système $\begin{cases} z' + (1/x) \times z = 0 \\ y' = z \end{cases}$

• La première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle $\{x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$.

• Ainsi, y est solution de (E) ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \frac{K}{x}$ ssi $\exists (K, L) \in \mathbb{R}^2, y = K \ln(|x|) + L$.

• Conclusion : sur l'intervalle I ou l'intervalle J , l'ensemble solution est $\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|))$

• Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = k_1 \ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3 \ln(|x|) + k_4 \end{cases}$

f étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0 , on obtient $k_1 = k_3 = 0$.

La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.

Donc f est une fonction constante.

• Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de f .

Conclusion : $S = \text{Vect}(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.

4. • Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Alors f_α est solution de (E) ssi $\forall x > 0, x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$
4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+ .

• La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une famille libre à 2 éléments (vérification immédiate et laissée au soin du lecteur) d'éléments de S^+ et S^+ est de dimension 2.

Donc c'est une base de S^+ et $S^+ = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.

• On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J solutions de (E) . Elles forment également une famille libre à 2 éléments et $\dim(S^-) = 2$.
Donc $S^- = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.

• On vérifie que $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (k_1, \dots, k_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que S appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$...

On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1 x^3 + k_2 x^4$. La continuité de f en 0 donc à droite en 0 donne immédiatement $f(0) = \lim_0 k_1 x^3 + k_2 x^4 = 0$.

Soit f dans l'ensemble proposé.

Alors il existe $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut...

On vérifie que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} :

Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de α , f coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1 x^3 + k_2 x^4$. Donc f est deux fois dérivable en α , $f'(\alpha) = 3k_1 x^2 + 4k_2 x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1 x + 12k_2 x^2$.

De même, pour $\alpha < 0$, f coïncide au voisinage de α avec $x \mapsto k_3 x^3 + k_4 x^4$ donc f est deux fois dérivable en α et $f'(\alpha) = 3k_3 x^2 + 4k_4 x^3$, $f''(\alpha) = 6k_3 x + 12k_4 x^2$.

Ainsi, f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* et sa dérivée seconde f'' est clairement continue en tout point de \mathbb{R}^* .

Donc f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .

De plus, f est clairement continue à droite et à gauche en 0 donc continue en 0 ainsi qu'en tout point de \mathbb{R}^* .

Donc f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .

Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en 0 à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

D'après les expressions précédemment évoquées pour f'' et f' , ces limites existent et valent 0.

Conclusion : f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Les expressions déterminées plus haut pour f' et f'' assurent immédiatement que f est solution de (E).

- Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et S est clairement de dimension 4.

5. • Considérons l'équation (E) : $x^2 y'' + 4x y' + 2y$.

Alors $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont deux solutions de (E) (vérification immédiate) sur I et sur J .

Cette famille de fonctions est clairement libre. Donc comme précédemment, S^+ et S^- sont engendrés par ces deux fonctions.

- Soit $f \in S$ une solution de (E) sur \mathbb{R} .

Alors il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2}$ et $\forall x < 0, f(x) = \frac{k_3}{x} + \frac{k_4}{x^2}$.

Alors $\forall x > 0, x^2 f(x) - k_1 x = k_2$ donc la continuité de f en 0 à droite donne par passage à la limite en 0^+ : $0 = k_2$.

Donc $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x}$ d'où $\forall x > 0, x \times f(x) = k_1$ ce qui, par passage à la limite en 0 donne $0 = k_1$.

De même, la continuité de f à gauche en 0 donne $k_3 = k_4 = 0$.

Donc $f = 0$ ce qui démontre que S est l'espace vectoriel nul.

28

CCP 2013 On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable

$t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases} .$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t , donner l'expression de la matrice e^{tA} .
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

Solution de 28 : CCP 2013

1. $\chi_A(X) = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

D'après le théorème de Caley Hamilton (ou par vérification immédiate), $(A-2I_2)^2 = 0$ donc $A-2I_2$ est nilpotente.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tB} = e^{2t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k = e^{2t} \left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \right) = e^{2t} (I_2 + tB).$$

En effet, $B^2 = 0$ donc $\forall n \geq 2, B^n = 0$.

2. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système et les conditions initiales se réécrit matriciellement sous la forme équivalente suivante : $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = {}^t(1, 2) \end{cases}$.
- Par théorème de cours, ce problème de Cauchy linéaire à coefficients constants admet une unique solution : la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall t \in \mathbb{R}, X_0(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Simplifions cette dernière expression. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}.$$

Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1-3t); t \mapsto e^{2t}(2+3t))$.

29 Mines 2011

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur \mathbb{C} et on considère

la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle $X' = AX$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + y = 0$ et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans \mathbb{R} .

On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

Solution de 29 : Mines 2011

1. $1 + j^2 + j^4 = 1 + j + j^2 = 0$.
2. On a $\chi_A = X^4 + X^2 + 1$, d'après 1., j et $-j$ sont des racines et comme χ_A est à coefficients réels, \bar{j} et $-\bar{j}$ sont aussi des racines, Ainsi $\chi_A = (X-j)(X+j)(X-\bar{j})(X+\bar{j})$.
 χ_A étant scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - jI_4) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y & = & jx \\ z & = & jy \\ t & = & jz \\ -x - z & = & jt \end{cases} \text{ donc } \text{Ker}(A - jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$A \text{ étant une matrice réelle, } \text{Ker}(A - \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ \bar{j} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{De même, } \text{Ker}(A + jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \text{Ker}(A + \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \\ \bar{j} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ainsi } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & \bar{j} & -j & -\bar{j} \\ \bar{j} & j & \bar{j} & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{j} \end{pmatrix} \text{ conviennent.}$$

3. Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme :

$$X : t \mapsto \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{-jt} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -j \\ -1 \end{pmatrix} + \delta e^{-\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -j \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Si y est solution de $y^{(4)} + y'' + y = 0$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$ est solution du système $Y' = AY$, donc de la forme précédente, en particulier il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{C}, y(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \delta e^{-\bar{j}t}$$

Réciproquement : toute fonction de la forme ci-dessus est solution.

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $(\varphi_j, \varphi_{-j}, \varphi_{\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}})$ est libre, donc une solution est à valeurs réelles $\iff y = \bar{y} \iff \beta = \bar{\alpha}$ et $\delta = \bar{\gamma}$.

Donc les solutions à valeurs réelles sont de la forme $y(t) = \alpha e^{jt} + \bar{\alpha} e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \bar{\gamma} e^{-\bar{j}t}$.

Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = A e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + B e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + C e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + D e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Où A, B, C et D sont des réels.

30

CCP 2009 On considère l'équation différentielle $x y' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. (E)

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $] -1, 1[$.

Solution de 30 : CCP 2009

1. $I_1 =] -1, 0[$ et $I_2] 0, 1[$.

f est solution si et seulement pour tout $x \in I_k$, $(\text{id} \times f)(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ qui se primitive en $\text{Arcsin}(x^2) + C_k$.

Les solutions sur I_k sont les $x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x^2) + C_k}{x}$.

2. Raccord de solution, si on a une solution sur $] -1, 1[$, elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que si $x \in I_k$, $f(x) = \frac{\text{Arcsin}(x^2) + C_k}{x}$. Par continuité, les limites en 0 doivent être finies, donc $C_1 = C_2 = 0$.

Réciproquement, $x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x^2)}{x}$ est bien dérivable sur $] -1, 1[$ et solution sur cet intervalle de (E), c'est la seule.

31

Centrale 2008 λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe \mathcal{C}^1 , 2π -périodique paire de

\mathbb{R} dans \mathbb{R} . et on considère l'équation différentielle d'inconnue $y : (E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$.

1. Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

2. Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.
3. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \rightarrow -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Solution de 31 : Centrale 2008

1. L'équation étant linéaire (et ses coefficients des fonctions continues définies sur \mathbb{R}), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce :
Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y définie sur \mathbb{R} vérifiant $y(0) = u$ et $y'(0) = v$.
Soit maintenant y une solution vérifiant $y(0) = 0$. Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z''(x) = y''(-x)$ et, par parité de q :
$$z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) = y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x) = 0.$$
Donc z est solution de (E_λ) et, puisque $z(0) = 0 = y(0)$, $z'(0) = -y'(0)$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz atteste de l'égalité $z = -y$, c'est-à-dire que y est impaire. La réciproque est facile.
2. Soient y et z deux solutions. Leur wronskien vaut $w = yz' - y'z$. Si y et z sont toutes deux paires, on a $y'(0) = z'(0) = 0$. Si elles sont toutes deux impaires, $y(0) = z(0) = 0$. Dans les deux cas, $w(0) = 0$, ce qui prouve que (y, z) n'est pas une base de solutions.
3. Soit alors λ une valeur propre de Q . L'espace propre correspondant est égal à $E_2 \cap S_{E_\lambda}$ (où S_{E_λ} est l'espace des solutions de E_λ). Il est non réduit à $\{0\}$ par définition. On sait de plus que $\dim S_{E_\lambda} = 2$ et on vient de voir que S_{E_λ} ne peut être contenu dans E_2 . Donc $\dim(E_2 \cap S_{E_\lambda}) = 1$.

Autres exercices

- 32** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.
- 33** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$. Que dire de $\text{Sp}(e^A)$?
- 34** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A .
1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 2. En déduire $e^A \in \mathbb{R}[A]$.
 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $e^A = P(A)$.
- 35** Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2 \sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.

Solution de 35 :

Poser $u = x - y$. On trouve alors $u(t) = \lambda e^{2t} + \sin t$, puis $y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3 \sin t$.
D'où $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t} - \frac{3 \cos t + 6 \sin t}{5}$ et $x(t) = (\lambda t + \mu + \lambda)e^{2t} - \frac{3 \cos t + \sin t}{5}$.

36 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + e^{-t} \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$

Solution de 36 :

Système fondamental de solutions du système homogène : $\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}$.

Puis solution évidente $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

37 On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.
2. Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

Solution de 37 :

Pour 1 : trigonaliser.

Pour 2 : Écrire $A = I_3 + N$ avec N nilpotente.

38 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos t \\ y' = x + 2ty + t \sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
2. Résoudre le système en utilisant une méthode de variation des constantes.
3. Retrouver les solutions en posant $z = x + iy$.

Solution de 38 :

Pour 2 : variation des constantes. $\begin{cases} x(t) = (a \cos t - b \sin t)e^{t^2} - \frac{\cos t}{2} \\ y(t) = (a \sin t + b \cos t)e^{t^2} - \frac{\sin t}{2} \end{cases}$

39 Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.

Solution de 39 :

Méthode de variation des constantes.

40 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

Solution de 40 :

$a = -2$, puis variation de la constante, on trouve une autre solution $x \mapsto 4x^2 + 1$: on peut aussi chercher directement une solution polynomiale...

41 Résoudre l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$ en déterminant les solutions développable en série entière.

Solution de 41 :

$x \mapsto a_0 \operatorname{ch} \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $a_0 \cos \sqrt{-x}$ sinon.

On « devine » d'autres solutions en $x \mapsto \operatorname{ch} \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \cos \sqrt{-x}$ sur \mathbb{R}_-^* .

Raccord : les seules solutions sur \mathbb{R} sont les solutions DSE trouvées ci-dessus.

42

Résoudre l'équation $x^2 y'' + 4x y' - (x^2 - 2)y = e^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2 y(x)$.

Solution de 42 :

On trouve $z''(x) - z(x) = e^x$

$$\text{Puis } y(x) = \frac{e^{2x}}{2x} + A \frac{e^x}{x^2} + B \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

43

Résoudre l'équation $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement variable $t = x^2$.

44

Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g .
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m(e_{-\lambda} f) = (D - \lambda \operatorname{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(D - \lambda \operatorname{id}_E)^m$.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P .