

Fonctions vectorielles, équations différentielles

Exercices Banque CCINP

1 CCINP 31

3 CCINP 42

5 CCINP 75

2 CCINP 32

4 CCINP 74

Autres exercices vus en cours

6 Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.7 Résoudre $y^{(4)} = y$ en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.8 Soit $\Phi : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

où $A : J \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle J . Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).9 Soit T un réel > 0 , $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T -périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur \mathbb{R} de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$ *Indication : on remarquera que Φ est T -périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t + T)$.*

10 On souhaite déterminer un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

1. Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$, et conclure.2. Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + iy(t)$.

11 Dans des problèmes d'écrit...

1. Soit a une fonction continue sur \mathbb{R} , paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.2. Soit a, b deux fonctions T -périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$

est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.3. On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).12 Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.13 Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0 .14 EDL₂ newtoniennes Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite newtonienne)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

15 Oral Mines Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.16 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.17 Résoudre sur \mathbb{R}_*^+ $(H) \quad x^2 y'' - 3x y' - 5y = 0$ 18 Résoudre sur $]1, +\infty[$ $(H) \quad (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.19 Trouver les solutions DSE de l'équation $(H) \quad 2xy'' + y' - y = 0$.
Terminer la résolution sur \mathbb{R}_*^+ en posant $t = \sqrt{2x}$.

20 Trouver les solutions sur \mathbb{R} de $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$.

21 **Écrit CCP 2005** Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geq 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Révisions de MP2I

22 **EDL₁** Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur \mathbb{R}

- | | |
|--|---|
| 1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$ | 7. $ty' - y = \sqrt{ t }$ |
| 2. $y' + y = te^t + \sin t$ | 8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ |
| 3. $y' - \ln(x)y = x^x$ | 9. $(1+t)^2 y'' + (1+t)y' = 2$ |
| 4. $t^2 y' + 2ty = \frac{1}{1+t^2}$ | 10. $(x^2+1)y' + xy = 1$ |
| 5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$ | 11. $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 1$ |
| 6. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$ | 12. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ |

23 **EDL₂** Donner les solutions réelles ou complexes de

- | | |
|--|--|
| 1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8 \sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$ | 3. $y'' + y = \sin^2(t)$ |
| 2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$ | 4. $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x) \cos x$ |
| | 5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$ |

24 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

25 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Sujets d'écrits

26 **CCP 2016** On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de \mathbb{R} ?

27 **CCP 2014** a et b étant deux fonctions continues sur \mathbb{R} , on note l'équation différentielle :

$$(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, i[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur \mathbb{R} vérifiant (E) sur \mathbb{R} tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^- .
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J .
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où $(E) : x^2 y'' + xy' = 0$.
Déterminer S^+ et S^- .
Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
4. Dans cette question $(E) : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^- .
Déterminer S et donner la dimension de S .
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

28 **CCP 2013** On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t , donner l'expression de la matrice e^{tA} .
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

29 Mines 2011

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur \mathbb{C} et on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.

3. En déduire les solutions $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle $X' = AX$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + y = 0$ et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans \mathbb{R} .

On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

30 CCP 2009 On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. (E)

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$.

2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $] -1, 1[$.

31 Centrale 2008 λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe \mathcal{C}^1 , 2π -périodique paire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . et on considère l'équation différentielle d'inconnue $y : (E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$.

1. Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

2. Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.

3. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \rightarrow -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Autres exercices**32** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.**33** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$. Que dire de $\text{Sp}(e^A)$?**34** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A .

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire $e^A \in \mathbb{R}[A]$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $e^A = P(A)$.

35 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2 \sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.**36** Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + e^{-t} \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$ **37** On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.

2. Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

38 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos t \\ y' = x + 2ty + t \sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.

2. Résoudre le système en utilisant une méthode de variation des constantes.

3. Retrouver les solutions en posant $z = x + iy$.

39 Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.**40** Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.**41** Résoudre l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$ en déterminant les solutions développable en série entière.**42** Résoudre l'équation $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = e^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2y(x)$.**43** Résoudre l'équation $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement variable $t = x^2$.**44** Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g .

2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m(e_{-\lambda}f) = (D - \lambda \text{id}_E)^m(f)$.

3. En déduire $\text{Ker}(D - \lambda \text{id}_E)^m$.

4. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que

les solutions de $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P .