Probabilités

Exercices vus en cours

1 **CCINP 101** Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.

À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Solution de 1 : CCINP 101

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
   $P(A_{n+1})=P(A_{n+1}|A_n)P(A_n)+P(A_{n+1}|B_n)P(B_n)+P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.

   donc $a_{n+1}=0a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$.
   (b) De même, $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.
   (b) $A+\dfrac{1}{2}I_3=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc rg $\left(A+\dfrac{1}{2}I_3\right)=1$.
   Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A)=2$.
   L'expression de $A+\dfrac{1}{2}I_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   (c) Puisque $\mathrm{tr}(A)=0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
   A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3=E_{-\frac{1}{2}}(A)\overset{\perp}{\oplus}E_1(A)$, donc que $E_1(A)=\left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.
   Donc $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   En posant $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, on a alors $D=P^{-1}AP$.
3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   Et donc on prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   Or $A=PDP^{-1}$ donc $A^n=PD^nP^{-1}$.
   Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   Or, d'après l'énoncé, $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$ donc :

   $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 **CCINP 107** On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Solution de 2 : CCINP 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
(U_1, U_2) est un système complet dévénements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35} l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

3 CCINP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Solution de 3 : CCINP 105

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$.
   Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)

   Or $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

   Donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (2).
   (1) et (2) donnent le résultat souhaité.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

   $$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

   Donc $p_n = \dfrac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

   (c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.
   Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

4 On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.

Solution de 4 :

$\Omega = [\![1,6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).$$

5 **Indicatrice d'Euler** Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$.

1. Quelle est la probabilité de A_d ?
2. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.
   (a) Démontrer que $(A_p)_{p \in P}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

Solution de 5 : Indicatrice d'Euler

1. $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{|A_d|}{|\Omega|} = \dfrac{\frac{n}{d}}{n} = \dfrac{1}{d}$.
2. (a) Si $p_1, \ldots, p_\ell$ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de n, comme ils sont premiers, $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j} = A_{p_1 \cdots p_\ell}$.
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_\ell}) = \frac{1}{p_1 \cdots p_\ell} = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_{p_j}).$$
   (b) Les $\overline{A}_p$ sont aussi indépendant, $A = \displaystyle\bigcap_{p \in P} \overline{A}_p$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{p \in P}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

6 Si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

Solution de 6 :

- Direct,
- $A_1, \ldots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \ldots, \overline{A_n}$ sont indépendants, par le premier point, sont indépendants $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p+1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i}$ donc sont indépendants $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.
- idem avec $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_p}, \overline{A_{p+1}}, \ldots, \overline{A_n}$.

7 **CCINP 109** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Solution de 7 : CCINP 109

1. $X(\Omega)=[\![1,3]\!]$.
$\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
$\forall\, i\in[\![1,2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
On pose $E=\{B_1,B_2,...,B_n,N_1,N_2\}$.
Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega)=(n+2)!$.

$(X=1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=1)=\dfrac{n\times(n+1)!}{(n+2)!}=\dfrac{n}{n+2}$.
$(X=2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=2)=\dfrac{2\times n\times(n)!}{(n+2)!}=\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.
$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X=3)=\dfrac{2\times 1\times(n)!}{(n+2)!}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
Autre méthode :

Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.

$X(\Omega)=[\![1,3]\!]$.
$(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X=1)=\dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}}=\dfrac{n}{n+2}$.
$(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".

D'où $P(X=2)=\dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.
$(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X=3)=\dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{n}{n}=\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.
Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.
L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.
Donc $P(Y=k)=\dfrac{\dbinom{n}{k-1}\times(k-1)!\times 2\times(n+2-k)!}{(n+2)!}=\dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times(n+2-k)!}{(n+2)!}$
Donc $P(Y=k)=\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.
Autre méthode :

$Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.
On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.

On a : $(Y=k)=A_1\cap A_2\cap....\cap A_{k-1}\cap\overline{A_k}$.
Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y=k)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.
$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{(n+2)-1}\times\dfrac{n-2}{(n+2)-2}\times...\times\dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)}\times\dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$
$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n-2}{n}\times...\times\dfrac{n-k+2}{n-k+4}\times\dfrac{2}{n-k+3}$.
$P(Y=k)=2\,\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times\dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.
$P(Y=k)=\dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

7 **CCINP 104** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Solution de 7 : CCINP 104

1. $X(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
2. (a) Pour que l'événement $(X=2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
   De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
   Donc $P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
   (b) Déterminons $P(X=1)$.
   Pour que l'événement $(X=1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
   Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».
   Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$.

   On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».
   On a alors $A=\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k$.
   On a $\forall\, k\in[\![1,n-1]\!]$, $P(A_k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   Donc $P(X=1)=\binom{3}{1}P(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)=3\sum_{k=1}^{n-1}P(A_k)$ car $A_1,A_2,...,A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

   Donc $P(X=1)=3\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.
   Donc $P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.
   Enfin, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

   Donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega=3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.
(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2)=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$.
(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc 2^n-2 applications.
D'où $P(X=1)=\frac{3\times(2^n-2)}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.
   Donc $E(X)=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$.
   Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

8 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit.

Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X,Y).

Solution de 8 :

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	$1/36$	0	0	0	0	0	$1/36$
2	$1/18$	$1/36$	0	0	0	0	$1/12$
3	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	0	0	$5/36$
4	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	0	$7/36$
5	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	$9/36$
6	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	$11/36$
loi de Y	$11/36$	$9/12$	$7/36$	$5/36$	$3/36$	$1/36$	(1)

9 Soient X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$ et $X_3=X_1\times X_2$.

Montrer que X_1, X_2, X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

Solution de 9 :

$$\mathbb{P}(X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)+\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{2}$$

Donc $X_3\hookrightarrow\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.

Alors X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1\perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=-1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

Donc $X_1\perp X_3$ et par symétrie, $X_2\perp X_3$.
Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}.$$

10 **CCINP 98** Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p\in\,]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i}=\dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Solution de 10 : CCINP 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n,p).
   C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

   $$P(Y=k|X=i)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} \text{ si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

   (b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(Y=k-i|X=i)P(X=i)$.

   Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.
   Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   Donc $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.
   Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.
   On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.
   Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
   $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!(n-k)!\,i!}=\frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors, $E(Z)=np(2-p)$ et $V(Z)=np(2-p)\big(1-p(2-p)\big)=np(2-p)(p-1)^2$

11 Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, montrer que $Y=n-X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,q)$.

12 **CCINP 95** Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Solution de 12 : CCINP 95

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
   Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
   Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$).
   La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5,\frac{1}{5})$.
   C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,5]\!]$ et : $\forall\, k\in[\![0,5]\!]$, $P(X=k)=\binom{5}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X)=5\times\frac{1}{5}=1$ et $V(X)=5\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}=0,8$.

(b) D'après les hypothèses, on a $Y=2X-3(5-X)$, c'est-à-dire $Y=5X-15$.
On en déduit que $Y(\Omega)=\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,5]\!]\}$.
Et on a $\forall k\in[\![0,5]\!]$, $P(Y=5k-15)=P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

$Y=5X-15$, donc $E(Y)=5E(X)-15=5-15=-10$.

De même, $Y=5X-15$, donc $V(Y)=25V(X)=25\times\frac{4}{5}=20$.

2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
   (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X.
   $X(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
   Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
   Ω est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A. Donc $\operatorname{card}\Omega=\binom{10}{5}$.

   Soit $k\in[\![0,2]\!]$.
   L'événement $(X=k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne. Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.
   Donc : $\forall k\in[\![0,2]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.
   (b) On a toujours $Y=5X-15$.
   On en déduit que $Y(\Omega)=\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,2]\!]\}$.
   Et on a $\forall k\in[\![0,2]\!]$, $P(Y=5k-15)=P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

12 **CCINP 102** Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Soit $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

On considère N variables aléatoires $X_1,X_2,\cdots,X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i\leqslant n)$, puis $P(X_i>n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall\omega\in\Omega$, $Y(\omega)=\min(X_1(\omega),\cdots,X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y>n)$.
   En déduire $P(Y\leqslant n)$, puis $P(Y=n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Solution de 12 : CCINP 102

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$.
   $X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.
   Alors on a $P(X_i\leqslant n)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X_i=k)=\sum\limits_{k=1}^{n}pq^{k-1}=p\dfrac{1-q^n}{1-q}=1-q^n$.
   Donc $P(X_i>n)=1-P(X_i\leqslant n)=q^n$.
2. (a) $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   $P(Y>n)=P((X_1>n)\cap\cdots\cap(X_N>n))$
   Donc $P(Y>n)=\prod\limits_{i=1}^{N}P(X_i>n)$ car les variables $X_1,\cdots,X_N$ sont indépendantes.
   Donc $P(Y>n)=\prod\limits_{i=1}^{N}q^n=q^{nN}$.
   Or $P(Y\leqslant n)=1-P(Y>n)$
   donc $P(Y\leqslant n)=1-q^{nN}$.
   Calcul de $P(Y=n)$:

   Premier cas : si $n\geqslant 2$.
   $P(Y=n)=P(Y\leqslant n)-P(Y\leqslant n-1)$.
   Donc $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.

Deuxième cas : si $n=1$.
$P(Y=n)=P(Y=1)=1-P(Y>1)=1-q^N$.
Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\left(1-(1-q^N)\right)^{n-1}(1-q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1-q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y)=\dfrac{1}{1-q^N}$.

12 **CCINP 106** X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$ où $p\in]0,1[$ et $q=1-p$.

On considère alors les variables U et V définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $P(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Solution de 12 : CCINP 106

1. $(U,V)(\Omega)=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\geqslant n\}$. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\geqslant n$.
   Premier cas : si $m=n$
   $P((U=m)\cap(V=n))=P((X=n)\cap(Y=n))=P(X=n)P(Y=n)$ car X et Y sont indépendantes.
   Donc $P((U=m)\cap(V=n))=p^2q^{2n}$.
   Deuxième cas : si $m>n$
   $P((U=m)\cap(V=n))=P([[(X=m)\cap(Y=n)]\cup[(X=n)\cap(Y=m)]])$
   Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :
   $P((U=m)\cap(V=n))=P((X=m)\cap(Y=n))+P((X=n)\cap(Y=m))$.
   Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :
   $P((U=m)\cap(V=n))=2P(X=m)P(Y=n)=2p^2q^{n+m}$.
   Bilan : $P((U=m)\cap(V=n))=\begin{cases} p^2q^{2n} & \text{si } m=n\\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

2. $U(\Omega)=\mathbb{N}$ et $V(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $m\in\mathbb{N}$.
   $P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P((U=m)\cap(V=n))$. (loi marginale de (U,V))
   Donc d'après 1., $P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{m}P((U=m)\cap(V=n))\quad(*)$
   Premier cas : $m\geqslant 1$
   D'après $(*)$, $P(U=m)=P((U=m)\cap(V=m))+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}P((U=m)\cap(V=n))$.
   Donc $P(U=m)=p^2q^{2m}+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}2p^2q^{n+m}=p^2q^{2m}+2p^2q^m\sum_{n=0}^{m-1}q^n=p^2q^{2m}+2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q}=p^2q^{2m}+2pq^m(1-q^m)$
   Donc $P(U=m)=pq^m(pq^m+2-2q^m)$.
   Deuxième cas : $m=0$
   D'après $(*)$ et 1., $P(U=0)=P((U=0)\cap(V=0))=p^2$.
   Bilan : $\forall\, m\in\mathbb{N}$, $P(U=m)=pq^m(pq^m+2-2q^m)$.

3. $W(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   $P(W=n)=P(V=n-1)=pq^{2(n-1)}(1+q)=(1-q)q^{2(n-1)}(1+q)$.
   Donc $P(W=n)=(1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
   Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
   Donc, d'après le cours, $E(W)=\dfrac{1}{1-q^2}$. Donc $E(V)=E(W-1)=E(W)-1=\dfrac{q^2}{1-q^2}$.

4. $P((U=0)\cap(V=1))=0$ et $P(U=0)P(V=1)=p^3q^2(1+q)\neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

12 **CCINP 111** On admet, dans cet exercice, que $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Solution de 12 : CCINP 111

1. On remarque que $\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=k)\cap(Y=n)) \geqslant 0$.

   $(X,Y)(\Omega) = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } k \leqslant n\right\}$.
   Posons $\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $p_{k,n} = P((X=k)\cap(Y=n))$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} p_{k,n}$ converge (car un nombre fini de termes non nuls).
   Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n 2^n = p(1-p)^n$.
   De plus, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p(1-p)^n = p\sum_{n\geqslant 0}(1-p)^n$ converge (série géométrique convergente car $(1-p) \in]0,1[$).

   Et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$.
   Donc on définit bien une loi de probabilité.

2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $P(Y=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
   Donc, d'après les calculs précédents, $P(Y=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n$.
   C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y=n) = p(1-p)^n$.
   (b) Posons $Z = 1+Y$.
   $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p.
   (c) D'après la question précédente, $E(Z) = \dfrac{1}{p}$.
   Or $Y = Z-1$ donc $E(Y) = E(Z)-1$ et donc $E(Y) = \dfrac{1-p}{p}$.

3. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
   Donc $P(X=k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^{n-k}$.
   Donc, d'après les résultats admis dans l'exercice, $P(X=k) = p\left(\dfrac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}(1-p)\right)^{k+1}}$

   C'est-à-dire $P(X=k) = p\left(\dfrac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$.
   Donc, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$.

12 CCINP 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

Solution de 12 : CCINP 103

1. (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $(X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).
   Donc

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

   Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
   Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

   (b) $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P\left((X = k) \cap (Y = m)\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k) P(Y = m)$.
   Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{\left(\lambda(1-p)\right)^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda(1-p)\right)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

   Ainsi $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.

12 **CCINP 108** Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Solution de 12 : CCINP 108

1. $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$.
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $i \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}} \sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   Or $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   Conclusion : $\forall\, i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Soit $j \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \sum_{i\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.
   Or $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.
   Donc $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.
   Conclusion : $\forall\, j \in \mathbb{N},\ P(Y=j) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.
2. (a) On pose $Z = X+1$.
   $Z(\Omega) = N^*$.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=n) = P(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
   Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.

   Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
   C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

   (b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
   Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.
3. On a : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.
4. $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

   $$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$
   Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

12 **CCINP 97** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Solution de 12 : CCINP 97

On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.
   Soit $k\in\mathbb{N}$.
   $P(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}P\big((X,Y)=(j,k)\big)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
   Or, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

   $$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}\quad (*). \tag{$\star$}$$

   De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

   $$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}\quad (**). \tag{$\star\star$}$$

   Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
   $P(Y=k)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\frac{(\frac{1}{2}+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :
   $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\frac{(\frac{1}{2}+j)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

   Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
   $P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.
2. Posons $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{j,k}=2^{j+k}P\big((X,Y)=(j,k)\big)$.
   On a $a_{j,k}=\frac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}+\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
   $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}=\frac{1}{k!}$.
   De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{k}{k!}$.
   Ensuite, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}=\mathrm{e}$.
   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right]=2\mathrm{e}$.

12 CCINP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Solution de 12 : CCINP 99

1. Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2} V(S_n) = \dfrac{1}{n} V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

12 CCINP 100

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Solution de 12 : CCINP 100

1. On obtient $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
   $P(X \leqslant N) = \lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}\right)$
   Et donc, après télescopage, $P(X \leqslant N) = \lambda\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)}\right)$ c'est-à-dire :
   $P(X \leqslant N) = \lambda\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)}\right)$. (*)
   Or $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$.
   Donc d'après (*), $\lambda = 4$.
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} nP(X=n) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ converge car au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$.
   Donc X admet une espérance.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right) = 2 - \frac{4}{n+2}$.
   Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = 2$ et $E(X) = 2$.
4. Comme $E(X)$ existe, X admettra une variance à condition que X^2 admette une espérance.
   $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(X=n) = \sum_{n \geqslant 1}\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$.
   Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
   Donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(X=n)$ diverge.
   Donc X^2 n'admet pas d'espérance et donc X n'admet pas de variance.

12 CCINP 110

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Solution de 12 : CCINP 110

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-1,1]$, $|t^n P(X=n)| \leqslant P(X=n)$ et $\sum P(X=n)$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$).
   Donc $\forall t \in [-1,1]$, $\sum t^n P(X=n)$ converge absolument.
   On en déduit $R_X \geqslant 1$ et aussi $[-1,1] \subset D_{G_X}$. Au surplus, pour tout t dans $[-1,1]$, le théorème du transfert assure que la variable aléatoire t^X admet une espérance et $E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n) = G_X(t)$. G_X est la fonction génératrice de X.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_X \geqslant 1$.
   Donc, d'après le cours, G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[\subset]-R_X, R_X[$.
   De plus, $\forall t \in]-1,1[$, $G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} P(X=n)$.
   En particulier, $G_X^{(k)}(0) = k! P(X=k)$ et donc $P(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum t^n P(X=n) = \sum t^n \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et donc $D_{G_X} = \mathbb{R}$.
   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

   (b) On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   $D_{G_X} = D_{G_Y} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X+Y$, alors $[-1,1] \subset D_{G_Z}$.
   Alors, $\forall t \in [-1,1]$, $G_Z(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$ car X et Y sont indépendantes et donc, d'après le cours, t^X et t^Y sont indépendantes.
   Donc, d'après 2.(a), $G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.

   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   Donc, d'après 1.(b), comme Z a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$, alors $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

12 **CCINP 96** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(X=n)=p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t)=E[t^X]=\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S=X_1+X_2$.
   Démontrer que $\forall t\in]-1,1[$, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t)=E[t^X]$.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t\in]-1,1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Solution de 12 : CCINP 96

1. On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note R son rayon de convergence.
   La série $\sum p_n$ converge car $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n=1$.
   Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t=1$, donc $R\geqslant 1$.
   Notons D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   On a donc :$]-1,1[\subset D_{G_X}$
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S=X_1+X_2$.
   Prouvons que $\forall t\in]-1,1[$, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

   (a) **En utlisant le produit de Cauchy de deux séries entières** :

   Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1=n)t^n$.
   Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2=n)t^n$.

   Notons R le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n t^n$ avec $c_n=\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)$.
   On a, d'après le cours, $R\geqslant \min(R_1,R_2)$ et :
   $\forall t\in]-R,R[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_1=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_2=n)t^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)\right)t^n$
   Or, on a vu dans la question 1. que $R_1\geqslant 1$ et $R_2\geqslant 1$.

   Donc, $R\geqslant 1$.
   Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières,
   $\forall t\in]-1,1[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_1=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_2=n)t^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)\right)t^n$. (*)
   De plus, pour tout entier naturel n,

   $(S=n)=(X_1+X_2=n)=\bigcup_{k=0}^{n}((X_1=k)\cap(X_2=n-k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles).

   Donc : $P(S=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)$. (**)

   Donc, d'après (*) et (**), $\forall t\in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(S=n)t^n$.

   C'est-à-dire, $\forall t\in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=G_S(t)$.

   (b) **En utilisant uniquement la définition de de** $G_X(t)$:

   Soit $t\in]-1,1[$.
   D'après 1., t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance.
   De plus, $G_{X_1}(t)=E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t)=E[t^{X_2}]$.
   X_1 et X_2 sont indépendantes donc t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes.
   Donc $t^{X_1}t^{X_2}=t^S$ admet une espérance et $E[t^S]=E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
   C'est-à-dire, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

3. Soit S_n variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega) = \{0,1,2\}$.
De plus, $P(X_i = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_i = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(X_i = 2) = \frac{1}{4}$.
Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = E[t^{X_i}] = t^0 P(X_i = 0) + t^1 P(X_i = 1) + t^2 P(X_i = 2)$.

Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2$.
On a : $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

De plus, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \ldots G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.
Ou encore, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{4^n} t^k$.
Or, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k$.

Donc, par unicité du développement en série entière :
$S(\Omega) = [\![0,2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P(S_n = k) = \binom{2n}{k} \frac{1}{4^n} = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$
Donc, S_n suit une loi binomiale de paramètre $(2n, \frac{1}{2})$.

Dénombrements

13 Combien peut-on construire de nombres comportant 6 chiffres (en base décimale) et ne contenant aucune répétition ? une seule répétition ?

Solution de 13 :

- Sans aucune répétition, cela revient à choisir le premier chiffre non nul et à avoir tous les chiffres différents.
Soit $9 \times A_9^5 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$ nombre différents.
Vérification avec python :

Python
```python
def sans_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 6:
            compteur +=1
    return compteur

>>> sans_repetition()
136080
```

- Avec exactement une répétition, il faut faire une disjonction de cas.
  - Soit le chiffre répété est 0, ce n'est donc pas le premier, et il faut choisir les places de la répétition et tous les autres chiffres soit $\binom{5}{2} \times A_9^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ possibilités.
  - Soit le chiffre répété n'est pas 0, et il faut choisir ce chiffre : 9 possibilités, puis
    - si le premier chiffre est répété, il faut choisir la place de la répétition, et tous les autres chiffres soit
    $$5 \times A_9^4 = 5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$
    possibilités.
    - si le premier chiffre n'est pas répété, il faut choisir les places de la répétition, le premier chiffre et les autres chiffres soit $\binom{5}{2} \times 8 \times A_8^3 = 10 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6$ possibilités.

  Soit, dans ce cas, $9 \times (5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 10 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6) = 378000$ possibilités.

  On trouve finalement 408240 tels nombres (soit 3 fois plus).
  Vérification avec python :

Python
```python
def avec_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 5:
            compteur +=1
    return compteur

>>> avec_repetition()
408240
```

14 Combien y a-t-il de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$?

Solution de 14 :

On choisit les p éléments du cycle, on fixe le premier terme et on permute de toutes les manières possibles les autres termes. Il y a donc $\binom{n}{p}(p-1)!$ p-cycles.

15 Soit E un ensemble fini à n éléments, A une partie de E à p éléments. Combien peut-on trouver de parties de E ayant exactement un élément de A ?

Solution de 15 :

On choisit l'élément de A : p possibilité, puis une partie de $E \setminus A$: 2^{n-p} possibilités.
Ainsi, il y a $p2^{n-p}$ telles parties.

16 Montrer que dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Solution de 16 :

1re méthode Soit x un élément fixé de l'ensemble. L'application $A \mapsto A \cup \{x\}$ si $x \notin A$ et $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ est bien défini de l'ensemble des parties paires dans l'ensemble des parties impaires ou l'inverse, et ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre.

2e méthode Le cardinal de l'ensemble des parties de cardinal pair est $A = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$, celui de l'ensemble des parties de cardinal impair est $B = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.
Ces sommes se calculent classiquement en remarquant que $A + B = 2^n$ et $A - B = 0^n$ en utilisant le binôme.
Si $n \neq 0$, on obtient en particulier $A = B$.

17 **CCINP 112**

Solution de 17 : CCINP 112

1. On note $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On pose $F_p = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\}$.

   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathscr{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.
   Or $F = \bigcup_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, \dots, F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.
   Conclusion : $a = 3^n$.

   Autre méthode :

   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   À tout couple (A,B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :
   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$
   On note $\mathscr{A}(E,\{1,2,3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1,2,3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathscr{A}(E,\{1,2,3\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

   Le résultat en découle.

2. $\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\cap B=\varnothing\right\}=\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset \overline{B}\right\}$.

$$\begin{aligned}\text{Or card}\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset \overline{B}\right\} &= \text{card}\left\{(A,\overline{B})\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset \overline{B}\right\}\\ &= \text{card}\left\{(A,C)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset C\right\}\\ &= a.\end{aligned}$$

Donc $b=a$.

3. Compter tous les triplets (A,B,C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A\cup B\cup C=E$ revient à compter tous les couples (A,B) tels que $A\cap B=\varnothing$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A\cup B}$.
En d'autres termes, $c=\text{card}\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\cap B=\varnothing\right\}=b=3^n$.

18 Partitions d'un entier

1. Déterminer le nombre a_n d'écritures possibles de n comme somme d'au moins un entier naturels non nuls (l'ordre étant important).
2. Soit $n,p\in\mathbb{N}$. Déterminer le nombre N_n^p d'écritures de n comme somme de p entiers naturels.

On pourra essayer de placer des | parmi n ∘ et interpréter cela comme des mots sur u alphabet à deux lettres, ou bien trouver une formule de récurrence.

Solution de 18 : Partitions d'un entier

1. On fait une disjonction de cas suivant le premier terme de la somme qui est un entier entre 1 et n : on obtient alors $a_n=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2a_{n-1}$ et comme $a_1=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=2^{n-1}$.
2. N_n^p correspond au nombre de façon de placer $p-1$ « | » (les signes +) parmi n « ∘ » : par exemple, $7=1+0+0+1+2+0+2$ correspond à ∘|||∘|∘∘||∘∘.
Il s'agit donc du nombre de mots de $n+p-1$ lettres sur l'alphabet contenant les deux lettres « | » ou « ∘ » avec exactement $p-1$ « | ».
Cela se dénombre en plaçant les « | » : $\binom{n+p-1}{p-1}$ possibilités, le reste étant des « ∘ ».
On peut aussi commencer par placer les « ∘ » : $\binom{n+p-1}{n}$ possibilités.
Donc $N_n^p=\binom{n+p-1}{p-1}=\binom{n+p-1}{n}$.

19 Formule du crible

Soient $A_1,\ldots,A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=\sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|.$$

On peut raisonner par récurrence sur n, ou, plus simplement, s'intéresser à $\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mathbb{1}_{A_i}\right)$ sur $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ et la développer.

Solution de 19 : Formule du crible
Voir par exemple `https://fr.wikiversity.org/wiki/Formule_du_crible/D%C3%A9monstration_de_la_formule_du_crible`

Probabilités

20

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n,n+1,\ldots\})=\lambda a_n$.

Solution de 20 :

Si une telle probabilité existe, alors $1=\mathbb{P}(N)=\lambda a_0$ avec $a_0>0$ vu les hypothèses donc $\lambda=\dfrac{1}{a_0}$.

Réciproquement, avec un tel lambda, si $A_n=[\![n,+\infty[\![$, alors $\mathbb{P}(\{n\})=\mathbb{P}(A_n)-\mathbb{P}(A_{n+1})=\lambda(a_n-a_{n+1})\geqslant 0$ et $\sum\lambda(a_n-a_{n+1})$ télescopique de somme $\lambda(a-0-0)=1$ d'où l'existence de $\mathbb{P}$ d'après la propriété du cours.

21 Sur l'univers $\mathbb{N}^*$, muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$.

Solution de 21 :

On a bien que les $\dfrac{1}{n(n+1)}$ sont positifs et comment ils valent $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, ils sont sommables de somme (télescopique) $1-0=1$, d'où l'existence de $\mathbb{P}$.

Puis on calcule $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2$.

22 **Le problème des clés** Au lycée Leconte de Lisle, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.

De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.

Vous les essayez donc l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^{e} clé testée qui vous ouvre la porte ($1 \leqslant k \leqslant n$) ?

Solution de 22 : Le problème des clés

Soit A_j l'événement « la clé n° j est la bonne ».

L'événement auquel on s'intéresse est alors $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

D'après la formule des probabilités composées, sa probabilité est (en modélisant chaque situation par une probabilité uniforme)

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k\middle|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Logique ou non ?

23 Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^{e} tirage ?

24 **Poker**

Dans un jeu de 52 cartes classiques, on distribue des mains de 5 cartes. Calculer les probabilités des événements :

- QFR : « Avoir une quinte flush royale » (quinte à l'as et couleur),
- QF : « Avoir une quinte flush non royale » (quinte non royale et couleur),
- A_4 : « Avoir un carré » (les 4 cartes de même valeur),
- F : « Avoir un full » (un brelan et une paire),
- C : « Avoir une couleur qui ne soit pas une quinte » (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas),
- Q : « Avoir une quinte non flush » (5 cartes qui se suivent, pas toutes de la même couleur),
- A_3 : « Avoir un brelan » (exactement 3 cartes de même valeur),
- PP : « Avoir une double paire » (2 paires ne formant pas un carré),
- A_2 : « Avoir une paire » (exactement 2 cartes de même valeur),
- R : « Rien de tout ça ! ».

On devra trouver :

Événement	QFR	QF	A_4	F	C	Q	A_3	PP	A_2	R
Probabilité (%) ≈	0,00015	0,0014	0,024	0,14	0,20	0,40	2,1	4,8	42	50

Solution de 24 : Poker

$\Omega = \mathscr{P}_5(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ ensemble des cartes. $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$, proba uniforme.

- $|QFR| = 4$; $\mathbb{P}(QFR) = \dfrac{1}{649\ 740}$.
- $|QF| = 4 \times 9 = 36$; $\mathbb{P}(QF) = \dfrac{3}{216\ 580}$.
- $|A_4| = 13 \times 48 = 624$; $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{1}{4165}$.
- $|F| = 13 \times \binom{4}{1} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3\ 744$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{6}{4\ 165}$.
- $|C| = 4 \times \binom{13}{5} - 40 = 5\ 108$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1\ 277}{649\ 740}$.
- $|Q| = 4^5 \times 10 - 40 = 10\ 200$; $\mathbb{P}(Q) = \dfrac{5}{1\ 274}$.
- $|A_3| = 13 \times \binom{4}{1} \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\ 912$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{88}{4\ 165}$.

- $|PP| = \binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 44 = 123\ 552$; $\mathbb{P}(PP) = \dfrac{198}{4\ 165}$.
- $|A_2| = 13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\ 098\ 240$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{352}{833}$.
- $|R| = \left(\binom{13}{5} - 10\right)\left(4^5 - 4\right) = 1\ 302\ 540$; $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1\ 277}{2\ 548}$.

25 Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de $99\ \%$ lorsqu'elle est effectivement présente.
Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0{,}1\ \%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Solution de 25 :

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0{,}99$ et $\mathbb{P}\left(T \;\middle|\; \overline{M}\right) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T \;\middle|\; \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0{,}99 \cdot 10^{-5}}{0{,}99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9\ \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

26 **Le problème de Monty Hall** Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Solution de 26 : Le problème de Monty Hall

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».
Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.
On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.
Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».
On cherche $\mathbb{P}(F_2 \mid A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).
D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A \mid F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A \mid F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A \mid F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

27 **Distance la plus probable**

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour d compris entre 1 et $n-1$, calculer la probabilité que deux amis soient distants de d places (c'est-à-dire séparés par $d-1$ personnes.) Quelle est la distance la plus probable ?
Même question s'ils sont placés sur un cercle.

Solution de 27 : Distance la plus probable
$\Omega = \mathfrak{S}_n$, proba uniforme, $|\Omega| = n!$.
A_d : « la distance est d ».
$|A_d| = 2 \times (n-d) \times (n-2)!$
$\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2(n-d)}{n(n-1)}$ maximale lorsque $d = 1$ (amis côte à côte).
Autre possibilité : seulement la position des amis, $\Omega = \mathscr{P}_2([\![1, n]\!])$, proba uniforme. $|\Omega| = \binom{n}{2}$.
$|A_d| = n - d$ (choix du premier). D'où le résultat.
Sur un cercle : $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2n}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n-1}$ ne dépend pas de d, sauf si n est pair et $d = \frac{n}{2}$ auquel cas $\mathbb{P}(A_{n/2}) = \dfrac{1}{n-1}$.

28 Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2,..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1+\cdots+N_k=N$).

On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_i boules de couleur c_i pour chaque i (donc $n_1+\cdots+n_k=n$).

Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise et comparer les résultats.

Solution de 28 :

- $p=\dfrac{\binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$.
- $p=\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}\,\dfrac{N_1^{n_1}\cdots N_k^{n_k}}{N^n}$ (répartition pour les couleurs = comme les anagrammes).
- $p=\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}\,\dfrac{A_{N_1}^{n_1}\cdots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$ et on retrouve la première proba.

29 Problème des anniversaires et des coïncidences

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons avec remise. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour (en supposant que personne n'est né le 29 février...) ?
   Application numérique pour $n\in\{10,20,30,40,50,60,70\}$. À partir de quelle valeur de n cet événement est-il plus probable que son contraire ?

Solution de 29 : Problème des anniversaires et des coïncidences

1. $\Omega=[\![1,M]\!]^n$, $A=\mathscr{A}_n([\![1,M]\!])$, $\mathbb{P}(A)=\dfrac{A_M^n}{M^n}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{M}\right)$
2. $M=365$, $B=\overline{A}$, $\mathbb{P}(B)=1-\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$. Pour les applications numériques à la calculatrice, utiliser plutôt la produit ci-dessus.

n	10	20	30	40	50	60	70
$\mathbb{P}(B)(\%)$	11	41	71	89	97	99,4	99,9

   Pour $n=22$, $\mathbb{P}(B)\approx 47,5\,\%$ et pour $n=23$, $\mathbb{P}(B)\approx 50,7\,\%$.

30 Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, à tour de rôle, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur (qui tire le premier) a une probabilité $p_1>0$ de toucher la cible, le second une probabilité $p_2>0$. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier tireur gagne puis celle que le second gagne.
2. En déduire qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Retrouver le résultat en utilisant une continuité monotone de la probabilité, en introduisant l'événement A_n : « Le jeu ne s'est pas arrêté au bout de n tirs de chaque joueur. »
4. On suppose que $p_2=\dfrac{3}{2}p_1$. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Solution de 30 :

1. Soit G_1 et G_2 de probabilités g_1 et g_2 les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur respectivement.
   Soit G_1^k et G_2^k les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur après k tirs, respectivement.
   Alors $\left(G_1^1,\overline{G_1^1}\right)$ est un système complet d'événements.
   L'idée est la suivante : si aucun des deux joueurs ne touche la cible, le jeu revient dans le même état que l'état initial.
   Par la formule des probabilités totales,
   $$g_1=\mathbb{P}\left(G_1\cap G_1^1\right)+\mathbb{P}\left(G_1\cap\overline{G_1^1}\right)=\mathbb{P}\left(G_1^1\right)+\mathbb{P}\left(\overline{G_1^1}\cap\overline{G_2^1}\right)\mathbb{P}\left(G_1|\overline{G_1^1}\cap\overline{G_2^1}\right)=p_1+(1-p_1)(1-p_2)g_1.$$
   les tirs des deux joueurs étant indépendants.
   D'où $g_1=\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$.
2. Même raisonnement pour calculer $g_2=(1-p_1)p_2+(1-p_1)(1-p_2)g_2$ qui donne $g_1+g_2=1$.
3. Probabilité de A_n : $(1-p_1)^n(1-p_2)^n$, suite décroissante.
4. $p_1=\dfrac{1}{3}$ et $p_2=\dfrac{1}{2}$.

31 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i^e tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre » et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i^e tirage ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Démontrer, en utilisant librement la formule de Poincaré (crible) que $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Applications :

- *Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?*
- *Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?*
- *Les étudiants de MPI décident de se faire des cadeaux pour Noël. Ils mettent tous un papier portant leur nom dans la poubelle de la salle R005 puis tirent successivement un papier chacun portant le nom de personne à qui ils doivent faire un cadeau. Quelle est la probabilité que personne ne doivent se faire soi-même un cadeau ?*
- *Dans un club de Bridge, n messieurs laissent leurs n cannes (toutes distinctes) au vestiaire. En repartant, ils reprennent au hasard une canne. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne reprenne sa propre canne ?*
- *Quelle est la proportion de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe (on parle de **dérangement**) ?*

Solution de 31 : Problème des rencontres

1. $\Omega = \mathfrak{S}_n$.
2. $\overline{E} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=k}} \frac{(n-k)!}{n!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Probabilités conditionnelles

32 Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec une probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0 < p < 1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres.
On notre x_0 le bit initial. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux, et p_n la probabilité que $x_n = x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

Solution de 32 :

Chaîne de Markov

1. Proba totales : $p_n = p p_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + 1 - p$.
2. $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$.
3. $\frac{1}{2}$.

33 Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- 2 % des personnes contrôlées sont en été d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété ;

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Même question si le résultat est négatif.
3. Quel est la probabilité que le résultat soit faux ?

Solution de 33 :

1. Bayes ($\mathbb{P}(E \mid T)$) : $49,2$ %.
2. Bayes ($\mathbb{P}\left(E \mid \overline{T}\right)$) : $0,1$ %.
3. $F = (T \cap \overline{E}) \sqcup (\overline{E} \cap T)$: $2,1$ %.

34 Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches.

On tire deux par deux sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Solution de 34 :
On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui soit tel qu'à chaque étape les tirages soient uniformes.
E_i : « au i^e tirage, on obtient une boule de chaque couleur ».
On va utiliser la formule des probabilités composées.
$\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{n^2}{\binom{2n}{2}}$ et $\mathbb{P}\left(E_{i+1} \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{i} E_j\right) = \dfrac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}$.
$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{(n-i)}{(2n-2i-1)} = \dfrac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Ou alors, vu le résultat obtenu : on distingue toutes les boules tirées successivement et on s'intéresse seulement aux numéros des boules rouges. $\Omega = \mathscr{P}_n([\![1, 2n]\!])$ avec probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{2n}{n}$ et si A est l'événement les couleurs sont alternées, pour chaque couple de tirage successif $(i, i+1)$ on a deux emplacements possibles pour la boule rouge donc $|A| = \left|\prod_{i=1}^{n} \{i, i+1\}\right| = 2^n$.

35 Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.
On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.
Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^e boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r, b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^e tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall\, n \geqslant 2,\quad p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
   On pourra noter $p_{m,n}(r, b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^e et n^e tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

Solution de 35 : Urne de Pólya

Indications :
1. Bayes : $\dfrac{r+c}{r+c+b}$.
2. Proba totales $(R_1, \bar{R}_1)$.
3. Récurrence.
4.
5. $\mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \dfrac{br}{(r+b)(r+b+c)}$.

Corrigé : 1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$

(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r+c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b+c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \dfrac{r}{r+b+c}$.

Au final, $\mathbb{P}(R_1|R_2) = \dfrac{\dfrac{r+c}{r+b+c}\cdot\dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r+c}{r+b+c}\cdot\dfrac{r}{r+b} + \dfrac{r}{r+b+c}\cdot\dfrac{b}{r+b}} = \dfrac{r+c}{r+c+b}$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}.}$

---

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r,b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^{e} tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n-1^{\text{e}}$ tirage à partir d'une urne contenant $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r+c,b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r,b+c)$.

Finalement, $\boxed{p_n(r,b) = \dfrac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \dfrac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c).}$

---

3. Par récurrence sur n, $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$ et si pour un $n \geqslant 2$, pour tous r et b, $p_{n-1}(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence. Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ \mathbb{P}(R_n) = \dfrac{r}{r+b}.}$

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

---

4. De la même manière, si $n > m \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1)$, avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r,b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c,b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1) = p_{m-1,n-1}(r,b+c)$. Donc

$$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$

On montre par récurrence sur $m \geqslant 1$ que pour tous r et b et tout $n > m$,

$$\boxed{p_{m,n}(r,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.}$$

Si $m = 1$, si $n > 1$, $p_{1,n}(r,b) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) = p_n(r+c,b)\dfrac{r}{r+b} = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n > m$, alors $n-1 > m-1$ et

$$\begin{aligned}
p_{m,n}(r,b) &= \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c) \\
&= \frac{r}{r+b}\cdot\frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} \\
&= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}
\end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence.
Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n et m.
Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n|R_m)$ ne dépendant ni de n, ni de m.

---

5. Comme (R_n, B_n) est un système complet d'événements,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_m \cap B_n)} = \mathbb{P}(R_m) - \mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r}{r+b} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}.}$$

Même remarque.

36 Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité,
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties de suite.

1. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Solution de 36 :

1. Soit A_n l'événement « le jeu dure au moins n parties ». $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \dfrac{1}{2}$.
   Avec les probas composées, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.
   Par continuité décroissante, A « événement on ne s'arrête pas », $\mathbb{P}(A) = 0$ en passant à la limite.
2. G_A, G_B, G_C les événements des gains de A, B, C.
   B_q « le jeu s'arrête à la q^e partie. »
   $B_q = A_q \setminus A_{q+1}$ de probabilité $\dfrac{1}{2^{q-1}}$.
   A_1 « A gagne la première partie ». On a alors un jeu en A, C, B, A, C, B, ...
   $\mathbb{P}(G_A|A_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/8} = \frac{4}{7}$.
   Puis, avec un jeu en B, C, A, B, C, A, ...
   $\mathbb{P}\left(G_A|\overline{A_1}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{3k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-1/8} = \frac{1}{7}$.
   Donc $\mathbb{P}(G_A) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{14}$.
   Puis $\mathbb{P}(G_B) = \mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_C) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(G_B)$.

Indépendance

37 **Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

Posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\mathbb{P}(B)$.
2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
4. Soit $I = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que $\mathbb{P}(I) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) < 1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

Solution de 37 : Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

1. La suite $(B_n)_n$ étant croissante pour l'inclusion, par propriété de continuité croissante,
   $$\boxed{\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(B).}$$
2. Soit $\mathbb{P}(A_n) \not\to 0$ et alors $\ln(1-\mathbb{P}(A_n)) \not\to 0$ et les deux séries divergent grossièrement, soit $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ et $\ln(1-\mathbb{P}(A_n)) \sim \mathbb{P}(A_n) \geqslant 0$ donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{les deux séries ont même nature.}}$
   C'est donc toujours le cas.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance des A_n,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k)) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)\right)$$
$$= \ln(1-\mathbb{P}(B_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \ln(1-\mathbb{P}(B)) & \text{si } \mathbb{P}(B)<1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec la question précédente, on a bien $\boxed{\mathbb{P}(B)<1 \text{ si et seulement si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge.}}$

---

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Alors $(C_n)_n$ est décroissante, donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(I)$.

Posons, pour $n, m \in \mathbb{N}$, $C_n^m = \bigcup_{k=n}^{m} A_k$. Par continuité croissante, $\mathbb{P}\left(C_n^m\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mathbb{P}(C_n)$.

Puis, comme dans la question précédente,

$$\sum_{k=n}^{m} \ln(1-\mathbb{P}(A_k)) = \ln\left(\prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)\right)$$
$$= \ln\left(1-\mathbb{P}\left(C_n^m\right)\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \begin{cases} \ln(1-\mathbb{P}(C_n)) & \text{si } \mathbb{P}(C_n)<1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

- Si $\mathbb{P}(B)<1$, alors par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(C_n)<1$ donc $\sum_{k\geqslant n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))$ converge et

$$1-\mathbb{P}(C_n) = \mathrm{e}^{\sum_{k=n}^{+\infty} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1$$

comme reste d'une série convergente. On a donc $\mathbb{P}(I)=0$ par unicité de la limite.
- Si $\mathbb{P}(B)=1$, avec les deux questions précédentes, $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ diverge, et c'est aussi le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\sum_{k\geqslant n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))$.
Comme c'est une série à terme négatifs, $\ln(1-\mathbb{P}(C_n^m)) \xrightarrow[m\to+\infty]{} -\infty$, donc $\mathbb{P}(C_n)=1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\mathbb{P}(I)=1$.

On a donc bien

$$\boxed{P(I)=0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}(B)<1, \text{ et } \mathbb{P}(I)=1 \text{ lorsque ce n'est pas le cas.}}$$

38 Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

Soit $s \in]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « n est multiple de m ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $\left(A_p\right)_{p\in\mathscr{P}}$ sont indépendants.
4. En déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
5. **Application de cette formule**
On se propose en application de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s>1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
Conclure.

Solution de 38 : Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

1. On peut définir une probabilité à condition que la famille $\left(\dfrac{\lambda}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable de somme 1. C'est le cas lorsque $\boxed{s>1 \text{ et } \lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}.}$

---

2. Il fallait plutôt lire « n est un multiple de m ».

$$\boxed{\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(mk)^s} = \frac{1}{m^s}.}$$

---

3. Si $p_1,\dots,p_n$ sont premiers, $A_{p_1}\cap\dots\cap A_{p_n}=A_{p_1\cdots p_n}$.
Avec la question précédente,
$$\mathbb{P}\left(A_{p_1}\cap\dots\cap A_{p_n}\right)=\mathbb{P}\left(A_{p_1\cdots p_n}\right)=\frac{1}{(p_1\cdots p_n)^s}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^s}=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_{p_k}\right).$$
donc $\boxed{\text{les } A_p \text{ pour } p\in\mathscr{P} \text{ sont indépendants.}}$

---

4. On souhaite montrer que $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}$.
Or $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\prod_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right)$ qui est un produit infini.
Mais les $\overline{A_p}$ sont indépendants, donc si on considère les n premiers nombres premiers $p_1,\dots,p_n$,
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{A_{p_k}}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_{p_k}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_{p_k}}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathscr{P}}\overline{A_p}\right)$$
par continuité décroissante.
Or $n\in\displaystyle\bigcap_{p\in\mathscr{P}}\overline{A_p}\iff n$ n'a aucun diviseur premier $\iff n=1$.
Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\mathbb{P}(\{1\})=\lambda=\frac{1}{\zeta(s)}$ et, finalement, $\boxed{\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.}$

---

5. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\ln u_n=-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ avec $\displaystyle\frac{1}{p_n}\to 0$ donc $\displaystyle-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\sim\frac{1}{p_n}$ donc $(\ln u_n)_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Donc, par continuité de l'exponentielle, $u_n\longrightarrow\ell$.
Puis, pour tout $s>1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0<1-\frac{1}{p_n}\leqslant 1-\frac{1}{p_n^s}$, donc $\displaystyle u_n\geqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et lorsque $n\to+\infty$, $\ell\geqslant\zeta(s)$.
Or il est classique que $\zeta(s)\xrightarrow[s\to1^-]{}+\infty$. En effet, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir[1] que $\displaystyle\zeta(s)\underset{s\to1^-}{\sim}\frac{1}{s-1}$.
Autre rédaction possible : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\leqslant\zeta(s)\leqslant\ell$ donc lorsque $s\to1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\ell$, ce qui est contradictoire.
Finalement, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{p_n} \text{ diverge.}}$

---

1. Le sujet CCINP 2021 le faisait remontrer quelques questions avant

39 **Marche aléatoire (écrit E3A)** Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

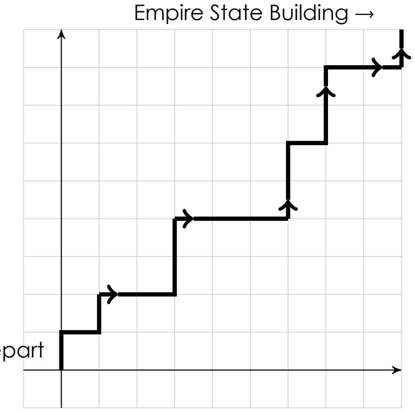
À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :

- $x_0 = y_0 = 0$
- Pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$, $(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1}+1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1}+1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



Le trajet est (N, E, N, E, E, N, N, E, E, E, N, N, E, N, N, E, E, N)

1. (a) écrire en langage Python une fonction `deplacement(L, a, b)` dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L =$ `"N"` et $(a+1, b)$ si $L =$ `"E"`.
   (b) écrire une fonction `chemin(m)` où `m` est une chaîne constituée des caractères `"N"` et `"E"` et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.
2. (a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$.
   (c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0,0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement « Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$. » On pourra noter N_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord » et E_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est. »
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.
   (b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.
   (c) Soit $n \geqslant 2$. Justifier brièvement que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. En déduire le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

   Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:
   $$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$
   puis que
   $$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.
   (a) Déterminer le réel a tel que :
$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :
$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$
   (c) En calculant de deux manières différentes la somme $\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :
$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Solution de 39 : Marche aléatoire (écrit E3A)

1. (a)

Python
```python
def deplacement(L, a, b):
    if L == "N":
        return (a, b + 1)
    else:
        return (a + 1, b)
```

(b) Version iérative :

Python
```python
def chemin(m):
    a, b = (0, 0)
    abscisses = [0]
    ordonnees = [0]
    for direction in m:
        a, b = deplacement(direction, a, b)
        abscisses.append(a)
        ordonnees.append(b)
    return abscisses, ordonnees
```

Version récursive :

Python
```python
def chemin(m, a=0, b=0, coordonnees=([0], [0])):
    indice = len(coordonnees[0]) - 1
    if indice == len(m):
        return coordonnees
    a, b = deplacement(m[indice], a, b)
    coordonnees[0].append(a)
    coordonnees[0].append(b)
    return chemin(m, a, b, coordonnees)
```

2. (a) D'après l'indication de l'énoncé, le nombre cherché est directement $\boxed{2^\ell.}$

   (b) Il suffit de placer, par exemple, les deux N parmi les cinq étapes : il y a $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = \boxed{10 \text{ trajets possibles.}}$

   (c) De même, $\boxed{\text{le nombre de chemins reliant l'origine à } M(a,b) \text{ est } \binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a}.}$

3. (a) Pour que le chemin traverse Δ pour la première fois à l'étape 2, les seuls chemins possibles sont « N, E » et « E, N », qui amènent en $(1,1)$ (remarquons que si on est en (a,b), on y est au bout de $a+b$ étapes car on ne fait que monter ou aller à droite).
   Le sujet semble sous-entendre que le choix du piéton à chaque croisement est uniforme.

   On calcule alors $\boxed{P(U_1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.}$

   (b) Par aller du point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$, il faut aller $n-1$ fois au Nord et $n-1$ fois à l'Est.

   Le nombre de chemin correspond au nombre de façon de placer les $n-1$ Nord parmi les $2n-2$ déplacement soit $\boxed{\left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1}.}$

(c) On remarque que chaque chemin reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ coupe nécessairement la droite $\Delta : y = x$. Soit (a,a) le point d'abscisse minimale sur ce chemin.

Alors en prenant le symétrique de la partie du chemin entre $(1,0)$ et (a,a) par rapport à Δ et en gardant la partie du chemin entre (a,a) et $(n-1,n)$ (à voir sur un dessin !), on obtient un chemin entre $(0,1)$ et $(n-1,n)$ coupant Δ, pour la première fois, en (a,a).

On obtient ainsi une bijection entre les chemins reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ et les chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,n)$ coupant Δ, dont les nombres sont égaux.

Ainsi, le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant Δ est $\boxed{\left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-2}}$ sur le même principe que la question précédente.

(d) Vu la question précédente, on a immédiatement que

$$\boxed{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| - \left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$$

(e) Par symétrie (par rapport à Δ), on a directement aussi $\boxed{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$

(f) Si le chemin passe pour la première fois par Δ à l'étape $2n$, c'est forcément au point de coordonnées (n,n) car le nombre d'étapes est toujours donné par la somme des coordonnées du point.

Il y a alors deux cas disjoints possible :

- Soit on a commencé par E et il faut relier le point $(1,0)$ au point $(n,n-1)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un N (événement A).
- Soit on a commencé par N et il faut relier le point $(0,1)$ au point $(n-1,n)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un E (événement B).

La formule des probabilités totales s'applique au système complet d'événements (N_1, E_1) et donne (avec P probabilité uniforme sur les chemins) :

$$\begin{aligned}
P(U_n) &= P(U_n|N_1)P(N_1) + P(U_n|E_1)P(E_1) \\
&= \frac{1}{2}(P(A)+P(B)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right|}{2^{2n-1}} + \frac{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right|}{2^{2n-1}}\right) \qquad \text{Après l'étape } 1, \text{ il reste } 2n-1 \text{ étapes.} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}n!(n-1)!}(n-(n-1))
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.}$ Puis

$$P(U_n) = \frac{2\cdot n\cdot(2n-2)!}{(2^n\cdot n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2} = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{(2n-1)(2\times 4\times\cdots\times 2n)}$$

Donc $\boxed{P(U_n) = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times 2n}.}$

4. (a) On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et enfin $\boxed{\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$

(b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, un résultat du programme corollaire à la comparaison série-intégrale nous dit que $w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente (avec $n \geqslant 2$). Appelons ℓ sa somme.

On a alors $\sum_{n=2}^{N} w_n = \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} = \ln N - \ln 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Ainsi, en notant $\gamma = 1-\ell$, on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \underset{N\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).}$

(c) D'une part, en tant que somme télescopique, on a déjà

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_N) - \ln(v_1) = \ln v_N - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln v_N + \ln 2$$

d'après la question 3.a.

D'autre part, avec la question 4.a, en notant $t_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) + \frac{3}{2n}$, on a $|t_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum t_n$ est absolument convergente donc convergente vers un réel S et $\sum_{n=1}^{N-1} t_n = S + \mathrm{o}(1)$.

Alors $\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + S + \mathrm{o}(1) = -\frac{3}{2}\ln(N-1) - \frac{3}{2}\gamma + S + \mathrm{o}(1)$ d'où finalement $\ln v_N = -\frac{3}{2}\ln(N-1) + a_n$ où $a_n \to -\frac{3}{2}\gamma + S - \ln 2$.

Finalement, $v_N = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln(N-1)+a_n} = \frac{\mathrm{e}^{a_n}}{N^{\frac{3}{2}}}$ et $\boxed{v_N \sim \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}}$ où $k = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma + S - \ln 2} > 0$, par continuité de l'exponentielle.

(d) Soit $n \geqslant 2$. Comme $v_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+2} v_n$, $(2n+2)v_{n+1} = (2n-1)v_n$ et on a bien

$$\boxed{v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}.}$$

Alors, la série $\sum v_n$ étant effectivement convergente par comparaison à une série de Riemann vu la question précédente, mais aussi par télescopage vu ce qui précède, la question précédente permettant de voir que $(2n-1)v_n \sim \frac{2k}{\sqrt{n}}$ donc $(2n-1)v_n \to 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+1} = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((2n-1)v_n - (2(n+1)-1)v_{n+1}\Big) = v_1 + v_2 + 3v_2 = v_1 + 4v_2$$

Et comme $v_1 = P(U_1) = \frac{1}{2}$ (question 3.a) et $v_2 = P(U_2) = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$ (question 3.f), on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1.}$

Comme les U_n sont deux à deux disjoints, $P\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1$.

On en déduit qu' $\boxed{\text{il est presque sûr que notre piéton passe par la droite } \Delta.}$

Variables aléatoires

40 Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z, T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

Solution de 40 :

1. (a) $\mathbb{E}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(XT - YZ)\right) = \frac{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{2} = 0$ par linéarité et indépendance.
   (b) On vérifie que $\det(M)(\Omega) = \{0, -1, 1\}$ et la définition de l'espérance (nulle) donne alors le résultat.
   Ou alors on vérifie que $\mathbb{P}(\det M = 1) = \mathbb{P}(XT = 1, ZY = -1)$ et $\mathbb{P}(\det M = 1) = \mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1)$ et les probabilités sont égales pour des raisons de symétrie.
   Ou alors on voit que $-\det(M)$ est la variable aléatoire obtenue en changeant X en $-X$ et Z en $-Z$ ce qui ne change pas la loi car $-X, Y, -Z, T$ sont indépendantes et de même loi uniforme que X, Y, Z, T.
   (c) Vu la première question, $\mathbb{V}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\det(M)^2\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(XYZT)) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T)) = \frac{1}{2}$ par indépendance.
2. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M \in \mathscr{O}(2)) &= \mathbb{P}\left(X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2 = 1, XY + ZT = 0\right) = \mathbb{P}(XY + ZT = 0) \\
&= \mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) + \mathbb{P}(XY = -1, ZT = 1) \\
&= 2\mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) && \text{par symétrie} \\
&= 2\mathbb{P}(XY = 1)\mathbb{P}(ZT = -1) && \text{par lemme des coalition}
\end{aligned}$$

   avec $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(ZT = -1) = \frac{1}{2}$ par symétrie.
   Finalement, $\mathbb{P}(M \in \mathscr{O}(2)) = \frac{1}{2}$.
   (b) $\mathbb{P}(M \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\det M = 1) + \mathbb{P}(\det M = -1) = 2\mathbb{P}(\det M = 1) = 2\mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1) = \frac{1}{2}$ par symétrie vu le calcul précédent.
   (c) $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(M)\lambda + \det M$.
   1^er^ cas $XT = 1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$ scindé simple donc M est diagonalisable.
   2^e^ cas $XT = 1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda + 1$ à discriminant < 0 : M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
   3^e^ cas $XT = -1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 1$ scindé simple donc M est diagonalisable.
   4^e^ cas $XT = -1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2$ donc M n'est pas diagonalisable car non nulle.
   Finalement, la probabilité que M soit diagonalisable est $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{3}{4}$ dans $\mathbb{C}$.
   Autre raisonnement possible :
   - Si $Y = Z$, la matrice symétrique réelle est diagonalisable cela arrive à probabilité $P(YZ = 1) = 1/2$.
   - Sinon, $(YZ = -1)$ et le polynôme caractéristique de $\sqrt{2}M$ est $\lambda^2 - (X+T)\lambda + (XT+1)$ et on sépare le cas $XT = 1$ (diagonalisable seulement dans $\mathbb{C}$) ou $XT = -1$ (non diagonalisable) ...

   D'où la probabilité d'être diagonalisable dans $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}$, et la probabilité de l'être dans $\mathbb{C}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

41 Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock

Le nombre N de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente est supposé suivre une **loi de Poisson**[2] de paramètre $\lambda > 0$.

1. Dans cette question, un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).
   Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.
   On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.
   On modélise la situation de la manière suivante : en plus de la variable aléatoire N, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.
   Déterminer la loi de T et la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock.
2. Dans cette question, les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles A sont $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.
   Le nombre d'articles achetés pendant une journée est maintenant noté S.
   On définit cette fois une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que Y_n représente le nombre d'achats d'article A du n^e client.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_S de la variable aléatoire S, en tout $t \in [-1, 1]$.
   (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(S = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
   (c) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

Solution de 41 : Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock

1. $T = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} X_j$ (qui est bien nul si $N = 0$). Attention ce n'est pas une somme classique de vaaid de même loi de Bernoulli car leur nombre est aussi une variable aléatoire (N).
   $\mathbb{P}(T = k) = \displaystyle\sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}(T = k | N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = k\right)\mathbb{P}(N = n)$ (formule des probabilités totales, sce associé à N) donne $\mathbb{P}(T = k) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$ car $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \mathscr{B}(n, p)$. Donc $T \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.
   $\mathbb{P}(T \leqslant s) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\displaystyle\sum_{k=0}^{s}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$.
2. (a) On trouve $G_S(t) = G_N(G_{Y_1}(t)) = \exp(\lambda(-5/6 + t/2 + t^2/3))$: on commence par réécrire $G_S(t)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec sce $(N = n)$, puis on utilise Fubini (la sommabilité ne posant pas de problème, quitte à rajouter des valeurs absolues, on obtient $G_S(|t|) < +\infty$), ce qui permet de reconnaître $G_n \circ G_{Y_1}$ après avoir utilisé $G_{S_n} = G_{Y_1}^n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Y_j$ somme de vaiid...
   (b) On trouve $\mathbb{P}(S = 3) = \dfrac{G_S'''(0)}{3!} = \dfrac{\lambda^3 + 8\lambda^2}{48}\mathrm{e}^{-\frac{5\lambda}{6}}$ soit, pour $\lambda = 6$, $\dfrac{21}{2}\mathrm{e}^{-5} \approx 0,07$.
   (c) La double dérivabilité de G_S en 1 donne l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$.
   On calcule alors $G_S'(1) = \mathbb{E}(S) = \dfrac{7\lambda}{6}$ et $G_S''(1) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S) = \dfrac{2\lambda}{3} + \left(\dfrac{7\lambda}{6}\right)^2$ donc $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = \dfrac{11\lambda}{6}$, ce qui donne respectivement 7 et 11 pour $\lambda = 6$.

2. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.

42 Loi de Pascal

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0<n<k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_n le numéro du n-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T_n (loi de Pascal). Combien vaut l'espérance de T_n ?

   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi de Pascal », donne le temps d'attente de la n^e occurrence de cet événement.

Solution de 42 : Loi de Pascal

1. S_2 est a valeurs dans $[\![2,+\infty]\!]$, et pour tout $k\in[\![2,+\infty]\!]$, X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(S_2=k)=\mathbb{P}(X_1+X_2=k)=\sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_1=j)\mathbb{P}(X_2=k-j)=\sum_{j=1}^{k-1}pq^{j-1}pq^{k-j-1}=(k-1)p^2q^{k-2}$$

.

2. Pour $x\neq 0$,

$$P(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant j\leqslant k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}x^n=\sum_{j=1}^{k-1}x(x+1)^{j-1}=x\frac{1-(x+1)^{k-1}}{1-(x+1)}=(x+1)^{k-1}-1=\sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-1}{n}x^n$$

   Puis deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs sont égaux, par unicité des cœfficient, on obtient la formule demandée.
   Remarque : c'est une technique de type série génératrice, mais avec des sommes finies !
3. On a $\mathbb{P}(S_1=k)=\mathbb{P}(X_1=k)=pq^{k-1}$ et $\mathbb{P}(S_2=k)=(k-1)p^2q^{k-2}$... On voit un pattern, mais quid du cœfficient ?
   On peut se rassurer avec, pour $k\geqslant 3$, avec $S_2\perp X_3$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_3=k)=\mathbb{P}(S_2+X_3=k)=\sum_{j=2}^{k-1}\mathbb{P}(S_2=j)\mathbb{P}(X_3=k-j)=\sum_{j=2}^{k-1}(j-1)p^2q^{j-2}pq^{k-j-1}=\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3q^{k-3}$$

   .
   Cette fois c'est plus clair et on conjecture, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\forall\, k\in[\![n,+\infty[\![,\ \ \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}$ » et le calcul précédent nous donne la marche à suivre pour l'hérédité.
   La récurrence est déjà initialisée trois fois et si on fixe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, alors, $\forall\, k\in[\![n+1,+\infty[\![,$, avec $S_n\perp X_{n+1}$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\mathbb{P}(S_n+X_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}\mathbb{P}(S_n=j)\mathbb{P}(X_{n+1}=k-j)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}p^nq^{j-n}pq^{k-j-1}=\binom{k-1}{n}2p^{n+1}q^{k-(n+1)}$$

   avec la question précédente.
4. T_n est à valeurs dans $[\![n,+\infty]\!]$ et si $k\in[\![n,+\infty]\!]$, avoir $T_n=k$, c'est avoir tiré pile au k^e tirage, et parmi les $k-1$ premiers tirages avoir tiré exactement $n-1$ fois pile et et $k-n$ fois face.
   En notant $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$ des résultats à chaque tirage,

$$\mathbb{P}(T_n=k)=\sum_{\substack{x_1,\dots,x_{k-1}\in\{0,1\}\\ \text{dont } n-1 \text{ valent } 1}}\mathbb{P}(X_1=x_1)\cdots\mathbb{P}(X_{k-1}=x_{k-1})\mathbb{P}(X_n=1)=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}$$

   Et vu le calcul des questions précédentes, on peut déterminer l'espérance (qui ne dépend que de la loi) en utilisant S_n :

$$\mathbb{E}(T_n)=\mathbb{E}(S_n)=n\mathbb{E}(X_1)=\frac{n}{p}.$$

43 Embranchement routier

Embranchement routier On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y=k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

Solution de 43 : Embranchement routier

Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

$\mathbb{P}(X_n|Y=k)=\mathrm{e}^{-\lambda q}\dfrac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$.

44 Un peu de théorie préhilbertienne

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que $\forall\omega\in\Omega\quad\mathbb{P}(\{\omega\})\neq 0$.

1. Montrer que L^2 est un espace vectoriel, et que $(X|Y)=\mathbb{E}(XY)$ définit un produit scalaire sur cet espace.
2. Si $X\in L^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.
3. À partir de la question précédente, retrouver la formule $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$.
4. Si X et Y sont deux éléments de L^2, X non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY+b\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de L^2, on définit leur coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
   Montrer que $\rho(X,Y)\in[-1,1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ±1 ?
6. Soit X,Y deux éléments de L^2. On note $F=\left\{Z\in L^2\ ;\ \exists(a_x)_{x\in X(\Omega)}\in\mathbb{R}^{X(\Omega)}\quad Z=\sum_{x\in X(\Omega)}a_x\mathbb{1}_{(X=x)}\right\}$.
   Déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $\mathbb{P}(X=x)\neq0$).

Solution de 44 : Un peu de théorie préhilbertienne

1. L'inégalité

$$|XY|\leqslant\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2\right)$$

fait que le produit de deux éléments de L^2 est d'espérance finie. Et donc, si X et Y sont dans L^2, $X+Y$ y est aussi, en vertu de

$$(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$$

le membre de droite ne contenant que des termes d'espérance finie. Comme λX y est évidemment, L^2 est bien un espace vectoriel. Et $(X,Y)\mapsto\mathbb{E}(XY)$ est bien défini dessus. Les propriétés d'un produit scalaire sont sans problème, on remarque seulement que si $(X|X)=0$,

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X^2(\omega)=0$$

ce qui vu l'hypothèse de départ donne $X=0$. *Sans l'hypothèse de départ, on peut toujours construire ce genre de produit scalaire, mais on a seulement $(X|X)=0\Rightarrow X=0$ presque sûrement. Ce qui n'est dans le fond pas gênant, mais oblige à déborder un peu du strict cadre du programme.*

2. L'existence et l'unicité est assurée par le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit a la projection cherchée : on a $X-a\perp1$, donc

$$\mathbb{E}((X-a)\times1)=0$$

et cela donne $a=\mathbb{E}(X)$. Pas si étonnant si on y réfléchit. Et notant $F=\mathrm{Vect}(1)$,

$$\mathrm{d}(X,F)=\sqrt{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)}=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. On a

$$p(aX+b)=ap(x)+p(b)=ap(X)+b$$

et donc

$$(aX+b)-p(aX+b)=a(X-p(X))$$

Prenant le carré de la norme des deux membres, on obtient bien par la question précédente

$$\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$$

4. Notons $\alpha Y+\beta$ la projection cherchée. Alors $\left(X-\alpha Y-\beta|1\right)=\left(X-\alpha Y-\beta|Y\right)=0$. Ce qui donne le système

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y^2)\alpha & + & \mathbb{E}(Y)\beta & = & \mathbb{E}(XY)\\ \mathbb{E}(Y)\alpha & + & \beta & = & \mathbb{E}(X)\end{cases}$$

On remarque que le déterminant est $\mathbb{V}(Y)$, non nul car Y n'est pas constante. Et on trouve

$$\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(Y)} \qquad , \qquad \beta = \frac{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{V}(Y)}$$

Pour le calcul de la distance, il est utile de remarquer que $\left(1, \frac{1}{\sigma(Y)}(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$ est une base orthonormale du plan Vect$(1, Y)$ (facile à voir si on a compris la deuxième question). Donc avec les notations précédentes,

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \|X\|^2 - \left[(X|1)^2 + \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}(X|Y - \mathbb{E}(Y))^2\right]$$

ou encore

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}(\mathrm{Cov}(X,Y))^2$$

D'où finalement

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}\left[\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) - (\mathrm{Cov}(X,Y))^2\right]$$

5. De la question précédente, ou de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en effet, on remarque que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = (X - \mathbb{E}(X)|Y - \mathbb{E}(Y)) \qquad)$$

on déduit l'encadrement proposé. Avec égalité si et seulement si Y est constante ou X est de la forme $aY + b$.

45 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images $(2 \leqslant k \leqslant n)$. On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution de 45 : Le problème du collectionneur

1. Les achats de pochettes sont supposés indépendants, et un achat est un succès avec la probabilité $\frac{n-k+1}{n}$. Donc L_k suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$.

2. Et donc l'espérance est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}$$

Un équivalent est donc $n \ln n$.

3. Les L_k sont considérés deux à deux indépendants. On a

$$V(L_1 + \cdots + L_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)\frac{n^2}{(n-k+1)^2} = n^2\sigma_n - nH_n$$

où (σ_n) converge vers $\pi^2/6$. Un équivalent est donc $\frac{\pi^2}{6}n^2$.

46 L'espérance via une loi conditionnelle

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X=x)\neq 0} \mathbb{E}(Y|X=x)\mathbb{P}(X=x)$$
où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.
2. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$
3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n-j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution de 46 : L'espérance via une loi conditionnelle

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:
$$\mathbb{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbb{P}(Y=y|X=x)$$
(il faut supposer $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$, oubli de l'énoncé).

Commençons par supposer $Y \geqslant 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, la famille
$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$$
est sommable, de somme $y\mathbb{P}(Y=y)$ (formule des probabilités totales). Et la famille $\big(y\mathbb{P}(Y=y)\big)_{y\in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille
$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$
est sommable. Et donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille
$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{y\in Y(\Omega)}$$
est sommable, donc aussi la famille
$$\big(y\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{y\in Y(\Omega)}$$
ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est d'espérance finie. Et on a
$$\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x)$$
ce qui permet de dire que la famille $(\mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et la formule
$$\sum_{x\in X(\omega)} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in Y(\omega) y\mathbb{P}(Y=y)}$$
donne le résultat.

Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille
$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$
est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\sum_{j=1}^{n} j^k (n-j)^{r-k}}{n^{r+1}} \text{ et } \mathbb{E}(X) = \frac{r(n+1)}{2n}.$$

47 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPFPFFF\ldots \qquad FFFPFPPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1)\geqslant\mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1)\geqslant\mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1,L_2)$.
5. Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty}\mathbb{P}(L_2=n|L_1=m)$

Solution de 47 : Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPFPFFF\ldots$$

$$FFFPFPPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
   On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le ième lancer donne Pile, égale à 0 sinon. Comme d'habitude, la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
   La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}_*$. Par probabilités totales, pour tout $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1=n)&=\mathbb{P}(L_1=n,X_1=0)+\mathbb{P}(L_1=n,X_1=1)\\&=\mathbb{P}(X_1=0,\ldots,X_n=0,X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_1=1,\ldots,X_n=1,X_{n+1}=0)\\&=(1-p)^n p+p^n(1-p)\end{aligned}$$

   Ce qui donne, l'espérance étant manifestement finie,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1)&=p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^{n-1}\ +\ p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}np^{n-1}\\&=p(1-p)\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(1-p)^2}\right)\\&=\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

   On est rassuré de voir que cette espérance est symétrique en p et $1-p$, qu'elle est minimale quand $p=1/2$ (étudier les variations de $x+1/x$ quand $x>0$), qu'elle tend vers l'infini quand p tend vers 0 ou 1…
   Maintenant,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1(L_1-1))&=p(1-p)^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)(1-p)^{n-2}\ +\ p^2(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)p^{n-2}\\&=p(1-p)\left((1-p)\frac{2}{p^3}+p\frac{2}{(1-p)^3}\right)\\&=2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)\end{aligned}$$

   et donc, $\mathbb{V}(L_1)=2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\right)^2$ ou, en simplifiant un peu,

$$\mathbb{V}(L_1)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-2$$

2. Le plus simple est de calculer la loi conjointe de (L_1,L_2), i.e. de calculer

$$\mathbb{P}(L_1=n,L_2=m)$$

pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{N}_*^2$, puis d'utiliser les probabilités totales. On peut aussi utiliser le caractère sans mémoire de la loi géométrique.
Si on ne veut rien utiliser, on peut, par probabilités totales, la variable L_2 étant à valeurs dans $\mathbb{N}_*$, écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2=m) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=0,L_1=n,L_2=m)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=1,L_1=n,L_2=m)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=\ldots=X_n=0,X_{n+1}=\ldots=X_{n+m}=1,X_{n+m+1}=0)+\\ &\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=1,\ldots,X_n=1,X_{n+1}=\ldots=X_{n+m}=0,X_{n+m+1}=1)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n p^m(1-p)+\sum_{n=1}^{+\infty}p^n(1-p)^m p\\ &= (1-p)^2p^{m-1}+p^2(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

Donc, facilement,

$$\mathbb{E}(L_2)=2$$

Surprenant ? nullement si $p=1/2$ (il est clair que dans ce cas les lois de L_1 et de L_2 sont les mêmes). Si p est proche de 0 ou 1 : avec une probabilité forte, la première séquence est longue, et la deuxième courte. Et avec une probabilité faible, la première séquence est courte, la deuxième longue. On peut donc accepter que cela se compense en moyenne.
De

$$\mathbb{E}(L_2(L_2-1))=p(1-p)^2\sum_{m=2}^{+\infty}m(m-1)p^{m-2}+p^2(1-p)\sum_{m=2}^{+\infty}m(m-1)(1-p)^{m-2}$$

on déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(L_2) &= p(1-p)^2\frac{2}{(1-p)^3}+p^2(1-p)\frac{2}{p^3}+2-4\\ &= 2\left(\frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p}-1\right)\end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathbb{V}(L_1)\geqslant\mathbb{V}(L_2)$ revient alors à montrer que, si $x>0$,

$$\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant x+\frac{1}{x}$$

ou encore, en posant $y=x+1/x$, que

$$y^2-2\geqslant y$$

si $y\geqslant 2$, ce qui est vrai.

4. Par transfert, on calcule

$$\begin{aligned}E(L_1L_2) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2} mnP(L_1=n,L_2=m)\\ &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2} mn\left(p^n(1-p)^m p+(1-p)^n p^m(1-p)\right)\\ &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2} mn\left(p^{n+1}(1-p)^m+(1-p)^{n+1}p^m\right)\\ &= (1-p)\frac{1}{p^2}p^2\frac{1}{(1-p)^2}+p\frac{1}{(1-p)^2}(1-p)^2\frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

(suites doubles produits de deux suites sommables…). Donc, après simplifications,

$$\mathrm{Cov}(L_1,L_2)=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{p}-2\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\right)$$

que l'on arrange un peu, pour vérifier :

$$\mathrm{Cov}(L_1,L_2)=\frac{1-2p}{1-p}+\frac{2p-1}{p}=-\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$$

la covariance est nulle si $p=1/2$, attendu car L_1 et L_2 sont intuitivement indépendantes dans ce cas. Elle est en général négative, ce qui est aussi assez intuitif (si la première séquence est particulièrement longue, c'est en général qu'elle est obtenue avec le côté de la pièce qui a le plus de chance de se montrer, la deuxième séquence aura tendance à être courte…).

5. Calculons enfin une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P(L_2=n,L_1=m)}{P(L_1=m)}=\frac{p^{m+1}(1-p)^n+(1-p)^{m+1}p^n}{p^m(1-p)+(1-p)^m p}$$

que l'on peut légèrement simplifier, et qui tend, quand m tend vers $+\infty$, vers $p(1-p)^{n-1}$ si $p>1/2$, vers $(1-p)p^{n-1}$ si $p<1/2$, les deux si $p=1/2$…de nouveau, ce n'est par complètement contre-intuitif…

48 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x\in[0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha>0, P(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right]=B_n(f)(x)$.
2. (a) Soit $\varepsilon>0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(a,b)\in[0,1]^2$, $|a-b|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbb{P}(S_n=k)\right|\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|<2\varepsilon$, puis conclure.

Solution de 48 : Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

1. (a) C'est Bienaymé-Tchebychev, comme dans la démonstration de la loi faible des grands nombres.
   (b) C'est $B_n(f)(x)$ par la formule de transfert.
2. (a) C'est une conséquence de l'uniforme continuité de f continue sur le segment $[0,1]$ (théorème de Heine).
   (b)
   (c)

49 E3A 2023 MP

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r\in\mathbb{N}$.
   (a) Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.
   (b) Donner les spectres possibles de W.
   (c) Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.
   (d) Calculer $\det(W)$.

****

On considère la famille $X_1,\dots,X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega)=\mathrm{diag}(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.
   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.
3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R=\mathrm{rg}(M)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.
   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.
5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   « les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »
   (a) On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.
   (b) On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.
   (c) On suppose n pair et on pose $n=2r$. Calculer $\mathbb{P}(T=r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

6. Pour tout $\omega\in\Omega$, on note $U(\omega)=\begin{pmatrix} X_1(\omega)\\ \vdots \\ X_n(\omega)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega)=U(\omega)\times(U(\omega))^\top=\left(a_{ij}(\omega)\right)_{[\![1,n]\!]^2}$.

   (a) Soit $\omega\in\Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
   (c) Montrer que $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$.
   (e) Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
   (f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$.

Solution de 49 : E3A 2023 MP

1. Soit p une projection vectorielle d'un espace vectoriel E de dimension n et $\operatorname{rg}p=r\in\mathbb{N}$.
   On peut avoir $p=0$ ou id_E .

   (a) On a $E=\operatorname{Ker}p\oplus\operatorname{Im}p$, $\dim\left(\operatorname{Im}p\right)=r$ et pour tout x dans $\operatorname{Im}p$ on a $p(x)=x$, dans une base adaptée à la somme directe la matrice W de p s'écrit :
   $$W=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$
   avec I_r la matrice identité d'ordre r.
   (b) $Sp(W)\subset\{0,1\}$.
   (c) On a $\operatorname{tr}(W)=\operatorname{rg}(W)$.
   (d) $\det(W)=1$ si $p=id_E$ et $\det(W)=0$ sinon .

2. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ on a $X_i\sim\mathcal{B}(p)$,donc $X_i(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X_i=1)=p$.

   (a) Pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega)=\operatorname{diag}(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$, donc $T(\omega)=\operatorname{tr}(\Delta(\omega))=X_1(\omega)+\ldots+X_n(\omega)$, par suite $T(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
   (b) Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Posons $\mathcal{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k , on a $\operatorname{Card}\mathcal{P}_k=\binom{n}{k}$.
   L'événement $[T=k]$ contient les $\omega\in\Omega$ pour lesquels il existe une partie $I\in\mathcal{P}_k$ telle que $X_i(\omega)=1$ si $i\in I$ et $X_i(\omega)=0$ sinon . On alors
   $$[T=k]=\bigcup_{I\in\mathcal{P}_k}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}[X_i=0]\right)\right)$$
   Cette réunion est disjointe et les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes donc :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k}\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=1)\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}\mathbb{P}(X_i=0)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k}p^kq^{n-k}\ \ (\ q=1-p)\\ &= |\mathcal{P}_k|\\ &= \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\end{aligned}$$
   T suit la loi et l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
   Par suite $\mathbb{E}(T)=np$.

3. On a pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega)=\operatorname{diag}(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]\ \ X_i(\Omega)=\{0,1\}$, donc $M(\omega)$ est la matrice d'une projection $(M(\omega)^2=M(\omega))$, par suite $\operatorname{tr}(M(\omega))=\operatorname{rg}(M(\omega))$ et $R=T$.
   D'où $R\sim\mathcal{B}(n,p)$.

4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

   (a) Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection donc $\det(M(\omega))=1$ ou 0 et $D(\Omega)=\{0,1\}$.
   (b) L'événementde $[D=1]$ contient les ω tels $M(\omega)=\Delta(\omega)=I_n$ donc
   $$[D=1]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=1]$$
   l'indépendance des X_i donne :
   $$\mathbb{P}(D=1)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=1)=p^n$$
   Par suite
   $$\mathbb{P}(D=0)=1-\mathbb{P}(D=1)=1-p^n$$
   D'où $D\sim\mathcal{B}(p^n)$ et $\mathbb{E}(D)=p^n$.

5. Soit Z l'évènement :
« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »
Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection , ses sous espaces propres possibles sont $E_0(M(\omega)) = \operatorname{Ker} M(\omega)$ et $E_1(M(\omega)) = \operatorname{Im} M(\omega)$.

 (a) L'évènement V : « M ne possède qu'une seule valeur propre » est équivalent à $M=0$ ou I_n on écrit donc $V=[M=0]\cup[M=I_n]$, ces deux événements sont disjoints donc
 $$\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}(M=0)+\mathbb{P}(M=I_n)$$
 Et on a
 $$[M=0]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=0] \text{ et } [M=I_n]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=1]$$
 l'indépendance des X_i donne :
 $$\mathbb{P}(M=0)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=0)=q^n \text{ et } \mathbb{P}(M=I_n)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=1)=p^n$$
 D'où $\boxed{\mathbb{P}(V)=p^n+q^n}$.

 (b) On suppose n impair .
 Pour tout ω dans Ω , on a $\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}M(\omega)\oplus\operatorname{Im}M(\omega)$, si $\omega\in Z$ alors $\dim\operatorname{Ker}M(\omega)=\dim\operatorname{Im}M(\omega)$.
 Forcement on a un seul sous espace propre , car sinon $n=\dim\mathbb{R}^n=2\dim\operatorname{Im}M(\omega)$, contredit le fait que n est paire . Ainsi si n impair alors $Z=V$ et $\boxed{\mathbb{P}(Z)=p^n+q^n}$.

 (c) $n=2r$. D'après la question 2. on a $\mathbb{P}(T=r)=\binom{2r}{r}p^rq^r$.
 On a $\omega\in Z$ alors $\dim\operatorname{Ker}M(\omega)=\dim\operatorname{Im}M(\omega)=r$ donc $Z=[R=r]=[T=r]$.
 Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(Z)=\binom{2r}{r}p^rq^r}$.

6. .

 (a) Soit $\omega\in\Omega$,on a
 $$A=\begin{pmatrix}X_1(\omega)\\ \vdots\\ X_n(\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(\omega) & \cdots & X_n(\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1(\omega)^2 & X_1(\omega)X_2(\omega)\cdots\cdots & X_1(\omega)X_n(\omega)\\ X_1(\omega)X_2(\omega) & X_2(\omega)^2\cdots\cdots & X_2(\omega)X_n(\omega)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ X_1(\omega)X_n(\omega) & X_2(\omega)X_n(\omega)\cdots\cdots & X_n(\omega)^2\end{pmatrix}$$
 pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on a $\boxed{a_{i,j}(\omega)=X_i(\omega)X_j(\omega)}$.

 (b) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $X_i(\Omega)=X_j(\Omega)=\{0,1\}$ donc $a_{i,j}(\Omega)=\{0,1\}$.
 On a :
 ▹ $\left[a_{i,j}=1\right]=[X_i=1]\cap\left[X_j=1\right]$, X_i et X_j sont indépendantes donc :
 $$\mathbb{P}(a_{i,j}=1)=\mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{P}(X_j=1)=p^2$$
 ▹ $\mathbb{P}(a_{i,j}=0)=1-\mathbb{P}(a_{i,j}=1)=1-p^2$.
 D'où $\boxed{a_{i,j}\sim\mathscr{B}(p^2)}$.

 (c) Soit $\omega\in\Omega$, on a $\operatorname{tr}(A(\omega))=\sum_{i=1}^n X_i^2(\omega)$, or les $X_i(\omega)\in\{0,1\}$ donc $X_i^2(\omega)=X_i(\omega)$, d'où $\operatorname{tr}(A(\omega))=\sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ et $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^n X_i$.

 (d) Soit $\omega\in\Omega$. Remarquons que les colonnes de $A(\omega)$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix}X_1(\omega)\\ \vdots\\ X_n(\omega)\end{pmatrix}$, si ce vecteur est non nul alors $rgA(\omega)=1$ sinon $rgA(\omega)=0$. Donc la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.

 (e) Soit ω dans Ω .
 ▹ Si $A(\omega)=0$ alors $Sp(A(\omega))=\{0\}$.
 ▹ Si $A(\omega)\neq0$ alors $\operatorname{rg}(A(\omega))=1$ .Le noyau est de dimension $n-1$, on prend une base de $\operatorname{Ker}A$ est on la complète par un vecteur en une base de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est égale à $\operatorname{diag}(\lambda,0,\dots,0)$, cette dernière matrice est semblable à $A(\omega)$, ce qui donne $\lambda=\operatorname{tr}A(\omega)$ et $Sp(A(\omega))=\{0,\operatorname{tr}A(\omega)\}$.

 (f) La variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.
 Soit ω dans Ω . $\operatorname{rg}(A(\omega))=0$ est équivalent à $A(\omega)=0$ et à $X_1(\omega)=\dots=X_n(\omega)=0$, donc
 $$\left[\operatorname{rg}(A)=0\right]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=0]$$
 l'indépendance des X_i donne
 $$\mathbb{P}\left(\operatorname{rg}(A)=0\right)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}[X_i=0]=q^n$$
 Donc $\mathbb{P}\left(\operatorname{rg}(A)=1\right)=1-\mathbb{P}\left(\operatorname{rg}(A)=0\right)=1-q^n$.
 La variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ suit la loi $\mathscr{B}(1-q^n)$.