42 Loi de Pascal

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0<n<k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_n le numéro du n-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T_n (loi bde Pascal). Combien vaut l'espérance de T_n ?

   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi de Pascal », donne le temps d'attente de la n^e occurrence de cet événement.

1. $S_2 = X_1 + X_2$ donc $S_2(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$

$$\forall k\geq 2,\quad \mathbb{P}(S_2=k) = \sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_1=j, X_2=k-j)$$

$$\underset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_1=j)\,\mathbb{P}(X_2=k-j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} pq^{j-1}\,pq^{k-j-1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_2=k) = (k-1)p^2q^{k-2}}$$

2.

$$P(x) = \sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n = \sum_{1\leq n\leq j\leq k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1}\left(\sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}x^{n-1}\,{}^{j-1-(n-1)}_{\times 1}\right)x$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1}\left((1+x)^{j-1}x\right)$$

$$= x\sum_{j=0}^{k-2}(1+x)^j$$

Si $x \neq 0$,

$$P(x) = x \times \frac{1-(1+x)^{k-1}}{1-(1+x)} = (1+x)^{k-1} - 1$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k-1}{n} x^n$$

Deux polynômes coïncidant en une infinité de valeurs sont égaux : $\forall n,k \in \mathbb{N}$ tels que $0<n<k$,

$$\boxed{\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}}$$

3_ $S_1 = X_1$ $\quad S_1 \sim \mathcal{G}(p)$: $S_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$\forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(S_1 = k) = pq^{k-1}$

qu1 : $S_2(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$, $\forall k \geq 2$, $\mathbb{P}(S_2 = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}$

$S_3 = S_2 + X_3$ donc $S_3(\Omega) = [\![3;+\infty[\![$

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}(S_3 = k) = \sum_{j=2}^{k-1} \mathbb{P}(S_2 = j, X_3 = k-j)$$

$$\underset{\substack{S_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \\ \text{(coalitions)}}}{=} \sum_{j=2}^{k-1} (k-1) p^2 q^{j-2} p q^{k-j-1}$$

$$= \sum_{j=2}^{k-1} (k-1) \quad p^3 q^{k-3}$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} p^3 q^{k-3}$$

$1, \quad k-1, \quad \frac{(k-1)(k-2)}{2}, \quad \dots \qquad \binom{k-1}{n-1}$

$n=1 \qquad n=2 \qquad n=3$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \geq n$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ »

<u>Initialisation</u> : Faite pour $n \in \{1,2,3\}$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soit $k \geq n+1$ (on a bien $S_{n+1}(\Omega) = [\![n+1, +\infty [\![$)

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k-j)$$

($S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$; $S_n \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$)

$$\underset{HR}{=} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n}\, p\, q^{k-j-1}$$

$$= \left[\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \right] p^{n+1} q^{k-(n+1)}$$

$$\underset{2.}{=} \binom{k-1}{n} p^{n+1} q^{k-(n+1)}$$

Récurrence établie.

4. T_n = position du n^e pile

$T_n(\Omega) = [\![n, +\infty [\![$

$\forall k \geq n$, $(T_n = k)$ signifie avoir pile au k^e tirage et sur les $k-1$ tirage précédent, avoir exactement $n-1$ pile et $k-n$ face.

Il y a $\binom{k-1}{n-1}$ choix possibles pour ces tirages pile et chaque tirage arrive avec probabilité $p^n q^{k-n}$. (indépendance des tirages)

donc $\mathbb{P}(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$.

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(S_n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \frac{n}{p}}$