41 Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock

Le nombre N de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente est supposé suivre une **loi de Poisson** [2] de paramètre $\lambda > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

1. Dans cette question, un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).
   Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.
   On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.
   On modélise la situation de la manière suivante : en plus de la variable aléatoire N, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.
   Déterminer la loi de T et la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendantes de N.

$T(\Omega) \subset \mathbb{N}$. $T = \sum_{n=1}^{N} X_n$ (0 si $N=0$) ⚠ le nb de termes de la somme est une variable aléatoire N.

sce $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$.

FPT : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T=k) = \sum_{n=\cancel{0}\,k}^{+\infty} \mathbb{P}(T=k \mid N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j}_{\sim \mathcal{B}(n,p)} = k\Big)\,\mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=\cancel{0}\,k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{k!\,(n-k)!} q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda q}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$$

$$\boxed{T \sim \mathcal{P}(\lambda p)}$$

Pas rupture de stock $\iff T \leq s$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \leq s) = \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}(T=k) = e^{-\lambda p} \sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.}$$

2. Dans cette question, les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
   Le nombre d'articles achetés pendant une journée est maintenant noté S.
   On définit cette fois une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que Y_n représente le nombre d'achats d'article A du n^{e} client.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_S de la variable aléatoire S, en tout $t \in [-1, 1]$.
   (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(S=3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
   (c) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y_n = 2) = \frac{1}{3}$. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vaiid
N indépendantes.

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

Soit $t \in [-1,1]$. $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=k)\, t^k$.

$$G_S(t) \underset{\substack{\text{FPT} \\ \text{sce } (N=n)_n}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S=k \mid N=n)}_{=\mathbb{P}(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} Y_j}_{=S_n} = k)} \mathbb{P}(N=n)\, t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, \mathbb{P}(N=n)\, t^k.$$

Sommabilité : Dans $[0,+\infty]$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k)\, \mathbb{P}(N=n)\, |t|^k \underset{\substack{\text{Fubini} \\ \geq 0}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k) \underbrace{|t|^k}_{\leq 1} \right] \mathbb{P}(N=n)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k) \right]}_{=1} \mathbb{P}(N=n)$$

$$\leq 1$$

$$< +\infty$$

ou mieux ? $\quad \| \quad G_S(\underbrace{|t|}_{\in[0,1]}) < +\infty$

D'où la sommabilité.

Par Fubini,

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) t^k \right] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} G_{S_n}(t)\, \mathbb{P}(N=n)$$

Or $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ avec les Y_j vaiid

donc $G_{S_n} = G_{Y_1} \times \dots \times G_{Y_n} = (G_{Y_1})^n$

Donc $G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) (G_{Y_1}(t))^n$

$$= G_N(G_{Y_1}(t)).$$

avec $G_N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$

$G_{Y_1}(t) = \mathbb{P}(Y_1=0) \times t^0 + \mathbb{P}(Y_1=1) t^1 + \mathbb{P}(Y_1=2) t^2$

$= \frac{1}{6} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}$

donc $\boxed{G_S(t) = e^{\lambda\left[-\frac{5}{6} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}\right]}}$

$\mathbb{P}(S=3) = \frac{G_S'''(0)}{3!}$ $\qquad f : t \mapsto \lambda\left(-\frac{5}{6} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}\right)$

$G_S = \exp \circ f$ $\qquad G_S' = f' \times e^f$ $\qquad G_S'' = [f'' + f'^2] e^f$

$G_S''' = [f''' + 3 f' f'' + f'^3] e^f$ $\qquad f' : t \mapsto \lambda\left[\frac{1}{2} + \frac{2t}{3}\right]$

$f'' : t \mapsto \frac{2\lambda}{3}$

$\mathbb{P}(S=3) = \frac{1}{6}\left[\cancel{3} \frac{\lambda}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{3}} + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3\right] \times e^{-\frac{5\lambda}{6}}$

donc $\boxed{\mathbb{P}(S=3) = \frac{\lambda^3 + 8\lambda^2}{48} e^{-\frac{5\lambda}{6}}}$

Pour $\lambda = 6$: $\mathbb{P}(S=3) = \frac{6^2 + 8\times 6}{8} e^{-5} = \frac{9+12}{2} e^{-5}$

$= \boxed{\frac{21}{2} e^{-5} \approx 7\,\%.}$

G_S est 2 fois dérivable en 1 donc S admet une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=k)\,k = G_S'(1) = f'(1)\,e^{f(1)}$$

$$= \frac{7\lambda}{6} e^0$$

$\boxed{\mathbb{E}(S) = \frac{7\lambda}{6}}$ Si $\lambda = 6$: $\boxed{\mathbb{E}(S) = 7}$

$$G_S''(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=k)\,k(k-1)\,1^{k-2} = \mathbb{E}(S(S-1)) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)$$

$$= \left(f''(1) + (f'(1))^2\right) e^{f(1)}$$

$$= \frac{2\lambda}{3} + \left(\frac{7\lambda}{6}\right)^2$$

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2$$

$$= \left[\frac{2\lambda}{3} + \cancel{\left(\frac{7\lambda}{6}\right)^2} + \frac{7\lambda}{6}\right] - \cancel{\left(\frac{7\lambda}{6}\right)^2}$$

$\boxed{\mathbb{V}(S) = \frac{11\lambda}{6}}$ Avec $\lambda = 6$: $\boxed{\mathbb{V}(S) = 11}$