38 **Loi Zeta ; grand classique de l'écrit** Soit $s \in]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « n est multiple de m ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ sont indépendants.
4. En déduire que $\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
5. **Application de cette formule**

   On se propose en application de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
   Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Conclure.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\lambda}{n^s} \in [0,1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = 1$ (CV dk avec $s>1$)

proba ssi $\lambda = \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

2. $$\mathbb{P}(A_m) = \sum_{n\in A_m} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{mk\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(mk)^s}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \times \frac{1}{m^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{m^s}.$$

3. Soit $p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}$, distincts. $p_1 | m, \dots, p_n | m \Leftrightarrow p_1 \times \dots \times p_n | m$

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_n}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_n}) \underset{2.}{=} \frac{1}{p_1^s \cdots p_n^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \dots \times \frac{1}{p_n^s}$$

$$\underset{2}{=} \mathbb{P}(A_{p_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{p_n}).$$

Donc $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ indépendants.

4. $$\prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{P}(\overline{A_p}) \quad \text{(d'après 2.)}$$

$$\underset{\text{les } (\overline{A_p})_{p\in\mathscr{P}} \text{ sont indépendants}}{"="} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{A_p}\right) \quad ⚠ \text{ infinité d'événements..}$$

On ordonne les nb premiers : $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right)$$

continuité décroissante

Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p}\right)$.

$$n \in \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_p} \iff \forall p\in\mathcal{P},\ n\notin A_p \iff \forall p \in\mathcal{P},\ p \nmid n$$

$$\underset{(n\in\mathbb{N}^*)}{\iff} n = 1$$

Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{\lambda}{1^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

donc $\boxed{\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \zeta(s)}$

5_ $\displaystyle u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ donc $\displaystyle \ln u_n = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

avec $\displaystyle\frac{1}{p_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\displaystyle -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$

En supposant que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ cv, par CSTGP, $(\ln(u_n))_n$ cv

Par continuité de exp, $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $s>1$, $\displaystyle 0 < 1-\frac{1}{p_n} \leq 1-\frac{1}{p_n^s}$ $(p_n > 1)$

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$ et si $n\to+\infty$: $\ell \geq \zeta(s)$.

Or $\zeta(s) \xrightarrow[s \to 1^-]{} +\infty$ (classique... CSI : $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$)

Contradiction.

<u>Ou</u> : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \zeta(s) \leq l$

$s \to 1$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \leq l$ et si $n \to +\infty$:

<u>contradiction</u>.

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n} \text{ DV.}}$$

($\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{P}}$ n'est pas sommable.).