Partie I Un lien avec la loi de Poisson

1. $\big([X_n > k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
   Donc, par le théorème de continuité décroissante,
   $\mathbb{P}\big([X_n > k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_n > k\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   $[X_n > k-1] = [X_n > k] \bigcup [X_n = k]$ et les événements $[X_n > k]$ et $[X_n = k]$ sont incompatibles.
   Ainsi, $\mathbb{P}\big([X_n > k-1]\big) = \mathbb{P}\big([X_n > k]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$, ou encore
   $\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \mathbb{P}\big([X_n > k-1]\big) - \dfrac{n^k}{k!}\, e^{-n}.$
   (b) On montre le résultat par récurrence sur k.
   Initialisation : $k = 0$
   $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-n}$
   $\mathbb{P}(X_n > -1) = 1$, et $\displaystyle\int_0^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-n}.$
   L'égalité est vraie.
   Hérédité : Si on suppose le résultat au rang k, pour $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n > k+1) &= \mathbb{P}(X_n > k) - \frac{n^k}{k!}e^{-n} \\
&= \frac{1}{k!}\int_0^n t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{n^k}{k!}e^{-n} && \text{hypothèse de récurrence.} \\
&= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}e^{-t}\right]_0^n + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^n t^{k+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{n^k e^{-n}}{k!} && \text{intégration par parties.} \\
&= \frac{1}{(k+1)!}\int_0^n t^{k+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

   D'où le résultat pour tout k.

3. (a) D'après le préambule, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et sa valeur est $k!$.
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = 1.$
   (b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_n \leqslant k] &= 1 - \frac{1}{k!}\int_0^n t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k!}\int_n^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n^k}{k!}e^{-n} + \frac{1}{(k-1)!}\int_n^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t && \text{intégration par parties.}
\end{aligned}$$
   Or, en $+\infty$, $t^{k-1}e^{-t} = o(t^k e^{-t})$.
   Par intégration des relations de comparaison : $\displaystyle\int_n^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_n^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$
   et les intégrales sont convergentes.

Donc, $\mathbb{P}\big([X_n \leqslant k]\big) \sim \dfrac{n^k}{k!}e^{-n}$.

4. (a) $t \longrightarrow e^{-t}$ est décroissante sur $[0, n]$.
   Donc $t^{2n}e^{-n} \leqslant t^{2n}e^{-t} \leqslant t^{2n}$.
   Par croissance de l'intégrale : $\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}e^{-n} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}$.
   (b)
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2\,n+1}}{2\,n+1}e^{-n} &= \lim_{n\to+\infty} \exp\big(-n + (2\,n+1)\ln(n) - \ln(2\,n+1)\big) \\ &= +\infty \\ \text{Donc, } \lim_{n\to+\infty} I_n &= +\infty \qquad \text{par comparaison.} \end{aligned}$$
   (c) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant n_0$.
   $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \leqslant \mathbb{P}(X_{n_0} = k)$.
   Or, par (2), $0 \leqslant \dfrac{I_n}{(2n)!} = \mathbb{P}(X_n > 2n) \leqslant \mathbb{P}(X_{n_0} > 2n)$.
   Par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{(2n)!} = 0$ (d'après la question (1)).

Partie II La fonction Γ comme transformée intégrale

5. Soit $f_a = t \longrightarrow e^{at}$, pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, et $t \geqslant 0$, $t^p f_a^{(n)}(t) = t^p a^n e^{at}$.
   Pour $a \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t f_a(t) = +\infty$, donc $f_a \notin S$.
   Si $a < 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^p f_a^{(n)}(t) = 0$, et $t \longrightarrow t^P f_a^{(n)}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc, $f_a \in S$.
   Donc $f_a \in S \Longleftrightarrow a < 0$.
6. Soit $k > 0$.

   (a) f_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. On montre par récurrence sur n l'existence d'un polynôme $P_{k,n}$ tel que $f_k^{(n)} = P_{k,n} f_k$.
   <u>Initialisation :</u> $n = 0$, $P_{k,n} = 1$ convient.
   <u>Hérédité :</u> Si le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} f_k^{(n)} &= P_{k,n} f_k \\ f_k^{(n+1)} &= P'_{k,n} f_k + P_{k,n} \times (-kt^{k-1}) f_k \\ &= (P'_{k,n} - kt^{k-1} P_{k,n}) f_k \\ \text{Ainsi, } P_{k,n+1} &= P'_{k,n} - kt^k P_{k,n} \qquad \text{est un polynôme et convient.} \end{aligned}$$
   (b) Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_k^{(n)}(t) = 0$ et $f_k^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc $f_k^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f_k \in S$.
7. Si $f \in S$, $t \longrightarrow t^{x-1} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $t \longrightarrow t^{2+x-1} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   Donc $t^{x-1} f(t) =_0 O(t^{x-1})$, et $|t^{x-1} f(t)| =_{+\infty} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc, $t \longrightarrow t^{x+1} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par comparaison avec une fonction de Riemann.

8. (a) Soit $k > 0$, et soit $x \in \mathbb{R}^+$, $G(f_k)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t^k)\,\mathrm{d}t$.

   On effectue le changement de variable $u = t^k$, qui est C^1, bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} G(f_k)(x) &= \int_0^{+\infty} u^{\frac{x-1}{k}} \exp(-u) \times \frac{1}{k}\, u^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} u^{\left(\frac{x}{k}-1\right)} \exp(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{k}\,\Gamma\Big(\frac{x}{k}\Big). \end{aligned}$$

   (b) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, Γ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma(1) = 1$.

   Donc $\Gamma(x) \sim_{x=0} \dfrac{1}{x}$.

   Ainsi, $\Gamma\Big(\dfrac{x}{k}\Big) \sim_{k\to+\infty} \dfrac{k}{x}$.

   Donc, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} G(f_k)(x) = \frac{1}{x}$.

9. Considérons
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longrightarrow t^{x-1} f(t) \end{aligned}$$

   $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   $\forall\, t \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(.,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $\forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall\, t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\partial^P g}{\partial x^P}(x,t) = \ln(t)^P t^{x-1} f(t)$.
   Ces dérivées sont continues par rapport à chacune de leurs variables. L'appartenance de f à S assure la domination de toutes ces dérivées partielles.

   Ainsi, par le théorème de Leibniz généralisé aux dérivées successives, $G(f)$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$.

10. (a) $G(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Soit $a \in]1,+\infty[$. $f_{|[1,a]}$ atteint un minimum en $t_0 \in [1,a]$.

$$\begin{aligned} G(f)(x) &> \int_1^a t^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(t_0) \times \Big[t^{x-1}\Big]_1^a \\ &= f(t_0)\Big[\frac{a^x-1}{x}\Big] \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

   (b) Soit $x > 0$,
$$\begin{aligned} G(f)(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f\big(u^{(1/x)}\big)\frac{\mathrm{d}u}{x} \\ u &= t^x \\ \mathrm{d}u &= x\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Donc, $x\,G(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f\big(u^{(1/x)}\big)\,\mathrm{d}u$

$$\lim_{x\to 0^+} f\big(u^{(1/x)}\big) = \lim_{x\to 0^+} f\big(e^{(\ln(u)/x)}\big) \begin{aligned}[t] &=0 \quad \text{si } u>1\\ &=f(1) \text{ si } u=1\\ &=f(0) \text{ si } u<1\end{aligned}$$

De plus, f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f_2 : x \longrightarrow x^2 f(x)$ aussi.

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\, u \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leqslant f(u^{1/x}) \leqslant \|f\|_\infty \text{ sur } [0,1].$$

$$0 \leqslant f(u^{1/x}) \leqslant \frac{\|f_2\|_\infty}{x^2} \text{ sur } [1,+\infty[.$$

Ainsi, par la version continue du théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,G(f)(x) = f(0) \neq 0$. Ainsi, $G(f)(x) \sim_0 \dfrac{f(0)}{x}$.

(c) $G(f)''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Donc, f est convexe sur $\mathbb{R}^+$. $f(x) \sim \dfrac{f(0)}{x}$ en 0^+. Le tableau de variation est donc de la forme :

		t_0	
$G(f)''$		$+$	
$G(f)'$	$-$		$+$
$G(f)$	$+\infty \searrow$		$\nearrow +\infty$

$G(f)$ atteint un minimum global, atteint en t_0 uniquement.

Partie III Application au prolongement de la fonction ζ de Riemann

11. (a) Si $f \in S$, $\{f'_{n,p}, (n,p) \in \mathbb{N}^2\} \subset \{f_{n,p}, (n,p) \in \mathbb{N}^2\}$.

Donc $f' \in S$.

Soit $x > 0$. Par intégration par parties,

$$G(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x} f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, $x\,G(f)(x) = -G(f')(x+1)$.

(b) La relation précédente combinée avec celle rappelée dans le préambule $\big(\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\big)$ conduit à $Z(f')(x+1) = -Z(f)(x)$, et par une récurrence immédiate $Z\big(f^{(n)}\big)(x+n) = (-1)^n Z(f)(x)$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit n et m tels que $m > n > -x$.

$$\begin{aligned}(-1)^m Z\big(f^{(m)}\big)(x+m) &= (-1)^m Z\big(f^{(n+(m-n))}\big)(x+m)\\ &= (-1)^m \times (-1)^{n-m} Z\big(f^{(n)}\big)\big(x+m-(m-n)\big)\\ &= (-1)^n Z\big(f^{(n)}\big)(x+n).\end{aligned}$$

On peut donc poser de manière cohérente :

$$\overline{Z}(f)(x) = (-1)^n Z\big(f^{(n)}\big)(x+n).$$

(d) $\overline{Z(f)}$ est C^∞ car G et Γ le sont.

Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\overline{Z}(f)(-n) &= \lim_{x\to 0} \overline{Z} f(-n+x)\\ &= \lim_{x\to 0} (-1)^n Z\big(f^{(n)}\big)(x)\end{aligned}$$

Or en 0, $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ et $Z\big(f^{(n)}\big)(x) \sim \dfrac{f^{(n)}(0)}{x}$.

Ainsi, $\overline{Z}(f)(-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

12. (a) i. Pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Or $\forall\, t > 0$, $e^{-t} \in]0,1[$ et $\forall\, x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_0^{+\infty} x^n$.

Donc, $\forall\, t > 0$, $f(t) = te^{-t} \displaystyle\sum_0^{+\infty} e^{-nt}$.

ii. Pour $t \in \mathbb{R}$, $e^t - 1 = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Donc, $f(t) = \dfrac{t}{e^t-1} = \dfrac{t}{\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{t^n}{n!}} = \dfrac{1}{1+\displaystyle\sum_2^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}} = \dfrac{1}{1+\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}}$.

(b) L'expression du ii. assure le caractère C^∞ de f comme composée de fonctions C^∞

(c) $\dfrac{(n+1)^k e^{-(n+1)}}{n^k e^{-n}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k e^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1$.

Donc, par la règle de d'Alembert, la série converge.

Soit $\varphi = t \longrightarrow \displaystyle\sum_0^{+\infty} e^{-nt}$.

φ est la composée de $x \longrightarrow \displaystyle\sum_0^{+\infty} x^n$ et $t \longrightarrow \exp(-t)$.

Donc φ est C^∞.

$\varphi = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \varphi_n$, où $\varphi_n : t \longrightarrow e^{-nt}$.

$\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^{(k)} = (-1)^k n^k \varphi_n$.

$\forall\, t \in [1,+\infty[$, $\big|\varphi_n^{(k)}(t)\big| = n^k \varphi_n(t) \leqslant n^k e^{-n}$.

Ainsi $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$ et $\forall\, t \in [1,+\infty[$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\big|\varphi_n^{(k)}(t)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k n^k \varphi_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} n^k e^{-n}.$$

(d) $f = t \longrightarrow te^{-t}\varphi(t) = \psi(t)\varphi(t)$.

$\psi \in S$, car $t \longrightarrow e^{-t} \in S$.

$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \psi^{(k,l)}\varphi^{(l)}$.

Donc, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $t \longrightarrow t^{(p)} f^{(k)}$ est bornée. Donc $f \in S$.

13. (a) Soit $x > 0$.

$G(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \int_0^{+\infty} \big(t^x \sum_1^{+\infty} e^{-nt}\big)\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^x}{n^{x+1}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^{x+1}}\,\Gamma(x+1)$.

$u = -nt$, $\mathrm{d}u = -n\mathrm{d}t$, et $\displaystyle\sum \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit,

$$G(f)(x) = \Gamma(x+1)\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} = \Gamma(x+1)\zeta(x+1) = x\,\Gamma(x)\zeta(x+1).$$

Donc, $Z(f)(x) = x\,\zeta(x+1)$.

(b) On prolonge donc ζ à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $\overline{\zeta}(x) = \dfrac{1}{x-1}\,\overline{Z(f)}(x-1)$.

$\overline{Z(f)}(-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Alors,
$$\overline{Z(f)}(0) = f(0) = 1$$
$$\overline{Z(f)}(-1) = -f'(0) = \frac{1}{2}$$

car, $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\,t + \circ(t)$

Partie IV Un autre prolongement

14. (a) $E(P,Q)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car il contient 0 et est stable par combinaison linéaire.

De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\big(P(x) - Q(x) + Q(x) - P(x)\big)e^{-x} = 0$.

Donc, $x \longrightarrow \exp(-x)$ est élément de $E(P,Q)$.

(b) Si $x \longrightarrow e^{\lambda x}$ est élément de $E(P,Q)$ avec $\lambda \neq -1$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 P(x) + \lambda Q(x) + Q(x) - P(x) = 0$

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(\lambda^2 - 1)P(x) + (\lambda+1)Q(x) = 0$, ou encore, $\forall\,(x)$, $Q(x) = (1-\lambda)P(x)$.

Or, $P \wedge Q = 1$, donc P et Q sont constants.

(c) Si P et Q sont constants, $P = p \in \mathbb{R}^*$ et $Q = q \in \mathbb{R}^*$, l'équation devient
$$py'' + qy' + (q-p)y = 0.$$

L'équation est à coefficients constants. Son équation caractéristique est
$$pr^2 + qr + (q-p) = 0.$$

$$\Delta = q^2 - 4\,p(q-p) = q^2 + 4\,p^2 - 4\,pq = (2p-q)^2.$$

Les racines sont
$\lambda_1 = \dfrac{-q+(2p-q)}{2p} = \dfrac{2(p-q)}{2p} = \dfrac{p-q}{p}.$
$\lambda_2 = \dfrac{-q-(2p-q)}{2p} = -2p = -1.$
Alors
si $q = 2p,\ E(P,Q) = \{t \longrightarrow (\alpha t+\beta)e^{-t}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$
si $q \neq 2p,\ E(P,Q) = \{t \longrightarrow \alpha e^{-t} + \beta e^{(\frac{p-q}{p})t}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$

15. (a) Si P possède une unique racine réelle a, le théorème de Cauchy linéaire s'applique sur $]-\infty,a[$, et sur $]a,+\infty[$.

Il existe une unique solution de (6) sur $]-\infty,a[$ vérifiant $f(a-1) = f'(a-1) = 0$ et une unique sur $]a,+\infty[$ vérifiant $f(a+1) = f'(a+1) = 0$.

Ainsi, pour $f \in E(P,Q)$, si $\Phi(f) = (0,0,0,0)$, $f_{|\,]a,+\infty[} = 0$ et $f_{|\,]-\infty,a[} = 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f \equiv 0$. Ainsi, Φ est injective.

(b) Si $\Phi(f) = \big(0,0,e^{-(a+1)},-e^{-(a+1)}\big)$, $f_{|\,]-\infty,a[} = 0$ et $f_{|\,]a,\infty[} = t \mapsto e^{-t}$.

Or, ces deux solutions ne se raccordent pas continûment en a. Donc il n'existe pas de $f \in E(P,Q)$ telle que $\Phi(f) = \big(0,0,e^{-(a+1)},-e^{-(a+1)}\big)$.

(c) Ainsi, Φ n'est pas surjective.

$\dim E(P,Q) = \dim \mathrm{Im}(\Phi) \leqslant 3.$

(d) On s'intéresse ici l'équation :

$$x^3y'' - y' - (1+x^3)\,y = 0 \qquad (E)$$

$x \longrightarrow \exp(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}$.

Sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, on cherche une autre solution formant avec celle-ci un système fondamental.

On pose
$$y = e^{-x}z.$$
$$y' = -e^{-x}z + e^{-x}z'.$$
$$y'' = e^{-x}z + (-2)e^{-x}z' + e^{-x}z''.$$

(E) devient
$$-2x^3z' + x^3z'' - z' = 0$$
$$-(1+2x^3)z' + x^3z'' = 0$$

$$z'' = \frac{1+2x^3}{x^3}z'$$
$$z' = \exp\Big(-\frac{1}{2x^2} + 2x\Big) = \exp\Big(\frac{4x^3-1}{2x^2}\Big)$$

Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont les
$$x \longrightarrow C_\perp \exp(-x) + D_\perp \exp(-x) \int_{a_\perp}^{x} \exp\left(\frac{4t^2-1}{t^2}\right) \mathrm{d}t,$$
où $a_\perp$ est dans $\mathbb{R}^{\perp *}$.

Le raccordement en 0 conduit à un système montrant que l'ensemble des solutions est de dimension 3.

16. (a) Soit $\Delta : x \longrightarrow \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$.

$\Delta(x+2) = \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2}+1)}{\Gamma(x+2)} = \dfrac{\frac{x}{2}\,\Gamma(\frac{x}{2})}{(x+1)\,x\,\Gamma(x)} = \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{2(x+1)\Gamma(x)} = \dfrac{\Delta(x)}{2(x+1)}$.

(b) Par la question 8a, on peut dire que $\Delta(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)} \times 2G(f_2)(x) = 2Z(f_2)(x)$.

Par la question (11), on peut prolonger $\Delta(x)$ en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ par : si $n > -x$, $\overline{\Delta}(x) = (-1)^n 2Z\big(f_2^{(n)}\big)(x+n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_2'(x) = -2f_2(x)$. Par la formule de Leibniz, $f_2^{(n+1)}(x) = -2xf_2^{(n)}(x) - 2nf_2^{(n-1)}(x)$.

Alors $G(f_2^{(n+1)})(x) = -2G(f_2^{(n)})(x+1) - 2nG(f_2^{(n-1)})(x) = 2(x-n)G(f_2^{(n-1)})(x)$.

Ainsi si $x > -n$,

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(x+2) &= \overline{Z(f_2)}(x+2) \\
&= (-1)^{n+1} Z(f_2^{(n-1)})(x+n+1) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{G(f_2^{(n-1)})(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+1)} \frac{G(f_2^{(n+1)})(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\
&= \frac{1}{2(x+1)} \overline{\Delta}(x)
\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_2'(x) = -2xf_2(x)$.

$f_1''(x) = -2f_2(x) + 4x^2 f_2(x)$.

f_2 est solution de $-(2x-1)y'' + (4x^2-3)y' + (4x^2-2x-4)y = 0$.

En appliquant Z à cette relation on obtient :

$Z(f_2'')(x) - 2Z(f_2'')(x+1) + 4Z(f_2')(x+2) - 3Z(f_2')(x) + 4Z(f_2)(x+2) + 2Z(f_2)(x+1) - 4Z(f_2)(x) = 0$

La question (11) conduit à :

$4\Delta(x+2) - 2\Delta(x+1) - 4\Delta(x) + \Delta(x-1) + \Delta(x-2) = 0$.

Cette relation est aussi satisfaite par les constantes.