Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

On rappelle que la **fonction Gamma** d'Euler est définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{dt} \tag{1}$$

qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie la formule récursive $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valable pour tout réel strictement positif x.

Cette fonction intervient à maintes reprises dans la suite.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I Un lien avec loi de Poisson

Dans cette partie, on considère une suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ et on suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre n .

1. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([X_n>k])$ tend vers 0 quand l'entier k tend vers l'infini.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   a) Justifier, pour tout entier naturel k, l'égalité :
$$\mathbf{P}([X_n>k])=\mathbf{P}([X_n>k-1])-\frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}\,.$$

   b) En utilisant le résultat précédent et une intégration par parties, établir que :
$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X_n>k])=\frac{1}{k!}\int_0^n t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{2}$$

3. Soit $k\in\mathbb{N}$.

   a) Préciser la limite de $\mathbf{P}([X_n>k])$ quand n tend vers l'infini.

   b) En utilisant (2), justifier que $\mathbf{P}([X_n\leq k])$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^n t^{2n}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   a) Justifier l'encadrement : $\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{e}^{-n}\leq I_n\leq\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}$.

   b) En déduire la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

   c) Démontrer que I_n est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers l'infini (on pourra utiliser la propriété (2)).

Partie II La fonction Γ comme transformée intégrale

On note S l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, telles que, pour tout couple (n,p) de nombres entiers positifs ou nuls, la fonction $t\longmapsto t^p f^{(n)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour quelles valeurs réelles de a la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{at}$ est-elle un élément de S?

6. Soit k un nombre entier strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k(t) = \exp(-t^k)\,.$$

a) Montrer que, pour tout entier positif n, il existe un polynôme $P_{k,n}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que la dérivée n-ième de f_k vérifie :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k^{(n)}(t) = P_{k,n}(t)\; f_k\,(t)\,.$$

b) En déduire que f_k est un élément de S.

7. Montrer que, pour tout élément f de S et tout réel $x > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{x-1} f(t)$ est intégrable sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour tout $f \in S$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $G(f)$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad G(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{dt} \tag{3}$$

8. a) Exprimer, pour tout entier strictement positif k, la fonction $G(f_k)$ à l'aide de la fonction Gamma.

b) Donner un équivalent de la fonction Γ en 0 et en déduire que, pour tout $x > 0$, $G(f_k)(x)$ tend vers $\dfrac{1}{x}$ lorsque k tend vers l'infini.

9. Montrer que, pour tout élément f de S, la fonction $G(f)$ est de classe C^∞ sur $]\,0, +\infty\,[$.

10. Dans cette question, on suppose que f est une fonction à valeurs strictement positives qui appartient à S.

a) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ est équivalent à $f(0)/x$ quand x tend vers 0.

c) Montrer que la fonction $G(f)$ admet un minimum global, atteint en un point unique.

Partie III Application au prolongement de la fonction ζ de Riemann

Pour tout élément f de l'espace S défini dans la deuxième partie du problème, on associe la fonction $Z(f)$ définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad Z(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{dt} \tag{4}$$

11. Soit f un élément de S .

a) Montrer que la dérivée f' de f appartient à S et vérifie :

$$\forall\, x > 0\,, \quad G(f')(x+1) = -\, x\, G(f)(x)\;.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall\, x > 0\,, \quad Z(f^{(n)})(x+n) = (-1)^n\, Z(f)(x)\;.$$

c) Montrer qu'on peut définir, de manière cohérente, un prolongement $\overline{Z(f)}$ de $Z(f)$ à $\mathbb{R}$, en posant, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n tel que $n > -x$:

$$\overline{Z(f)}(x) = (-1)^n\, Z(f^{(n)})(x+n)\;.$$

d) Montrer que $\overline{Z(f)}$, ainsi défini, est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{Z(f)}(-n) = (-1)^n\, f^{(n)}(0)\;.$$

12. Dans cette question, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

a) Justifier la validité des deux développements en série suivants :

(i) $\quad \forall\, t > 0\,, \quad f(t) = t\, \mathrm{e}^{-t} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$

(ii) $\quad \forall\, t \geq 0\,, \quad f(t) = \dfrac{1}{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(n+1)!}}$.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour tout nombre entier strictement positif k, montrer que la série de terme général $n^k \mathrm{e}^{-n}$ est convergente et que sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k \mathrm{e}^{-n}$ majore la valeur absolue de la dérivée k-ième de la fonction $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$ sur l'intervalle fermé $[1, +\infty[$.

d) En déduire que f est un élément de S.

13. On rappelle que la **fonction Zêta** de Riemann est définie par :

$$\forall\; x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \tag{5}$$

a) Démontrer que, pour l'élément f de S défini dans la question précédente, on a :

$$\forall\; x > 0, \quad Z(f)(x) = x\, \zeta(x+1)\;.$$

b) La propriété précédente permet de prolonger la fonction ζ à la droite réelle privée de 1 en posant :

$$\forall\; x \neq 1, \quad \overline{\zeta}(x) = \frac{1}{x-1}\, \overline{Z(f)}(x-1)\;.$$

En utilisant un développement limité de f, calculer ses valeurs en $\overline{Z(f)}(0)$ et $\overline{Z(f)}(-1)$.

Partie IV Un autre prolongement

Dans cette partie, P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, non nuls et **premiers entre eux**, et on note $E(P,Q)$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$P\ y'' + Q\ y' + (Q-P)\ y = 0 \tag{6}$$

Autrement dit, $E(P,Q)$ est l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad P(x)\, f''(x) + Q(x)\, f'(x) + \big(Q(x) - P(x)\big)\ f(x) = 0\ .$$

14. a) Montrer que $E(P,Q)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui contient la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

    b) Montrer que, si $E(P,Q)$ contient une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq -1$, les polynômes P et Q sont nécessairement constants.

    c) Trouver $E(P,Q)$ lorsque P et Q sont constants (non nuls) .

15. On suppose, dans cette question, que le polynôme P possède une unique racine réelle a et on note Φ l'application linéaire de $E(P,Q)$ dans $\mathbb{R}^4$ qui associe à tout élément f de $E(P,Q)$ le vecteur :

$$\Phi(f) = \big(f(a-1), f'(a-1), f(a+1), f'(a+1)\big)\ .$$

    a) En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer que l'application Φ est injective.

    b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément f de $E(P,Q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(a-1) = f'(a-1) = 0 \\ f(a+1) = -f'(a+1) = \mathrm{e}^{-(a+1)} \end{cases} .$$

    c) Déduire des résultats précédents que la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est au plus égale à 3.

    d) Montrer que, si $P(X) = X^3$ et $Q(X) = -1$, la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est égale à 3.

16. a) Montrer que la fonction $\Delta :\ x \longmapsto \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$, définie sur $]\,0,+\infty\,[$, vérifie la formule récursive :

$$\forall\ x > 0,\quad \Delta(x+2) = \frac{\Delta(x)}{2(x+1)}\ .$$

    b) En utilisant la fonction $f_2 : t \longmapsto \exp(-t^2)$ définie dans la deuxième partie, montrer que la fonction Δ admet un prolongement $\overline{\Delta}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \overline{\Delta}(x) = 2\,(x+1)\,\overline{\Delta}(x+2)\ .$$

    c) Comment utiliser une équation différentielle de la forme (6) pour trouver une formule récursive satisfaite à la fois par les fonctions constantes et par la fonction $\overline{\Delta}$?