A. Norme d'opérateur d'une matrice

1. $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et S^{n-1} est évidemment une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
   C'est aussi une partie fermée ; en effet, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne par la seconde inégalité triangulaire, donc elle est continue, puis S^{n-1} est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par cette dernière application.
   Donc $\boxed{\mathrm{S}^{n-1} \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$
   On aurait pu prouver la fermeture par intersection d'une boule fermé et du complémentaire d'une boule ouverte.
   $x \mapsto \mathrm{M}x$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, car linéaire en dimension finie, et $y \mapsto \|y\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'où $x \mapsto \|\mathrm{M}x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, en particulier sur le compact S^{n-1} et à valeurs réelles.
   Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un maximum <u>ce qui justifie l'existence de</u> <u>$\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$</u>.

2. Soit M et N $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\begin{cases} (i) & \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \\ (ii) & \|\lambda \mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = |\lambda| \cdot \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \\ (iii) & \|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} + \|\mathrm{N}\|_{\mathrm{op}} \\ (iv) & \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = 0 \Rightarrow \mathrm{M} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{cases}$

   <u>**pour** (i) **:**</u> D'après la question précédente $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ est bien définie dans $\mathbb{R}^+$ car $\forall x \in \mathrm{S}^{n-1},\ \|\mathrm{M}x\| \geqslant 0$

   <u>**pour** (ii) **:**</u>

   Le théorème des bornes atteinte (dans 1), nous fournit $y \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que $\|\lambda \mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \|\lambda \mathrm{M}y\| = |\lambda|\|\mathrm{M}y\|$.
   Ayant $\|\mathrm{M}y\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ et $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit $\|\lambda \mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \leqslant |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$.
   Par ailleurs, il existe $z \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \|\mathrm{M}z\|$.
   Alors $|\lambda| \times \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = |\lambda| \times \|\mathrm{M}z\| = \|\lambda \mathrm{M}z\| \leqslant \|\lambda \mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$
   ce qui nous donne : $\|\lambda \mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$

   <u>**pour** (iii) **:**</u> Il existe $y \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que $\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|_{\mathrm{op}} = \|(\mathrm{M}+\mathrm{N})y\| = \|\mathrm{M}y + \mathrm{N}y\|$.
   Par l'inégalité triangulaire puis par définition de $\|.\|_{\mathrm{op}}$, $\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|\mathrm{M}y\| + \|\mathrm{N}y\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} + \|\mathrm{N}\|_{\mathrm{op}}$

   <u>**pour** (iv) **:**</u> On suppose que : $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = 0$.
   Alors l'ensemble $\{\|\mathrm{M}x\|, x \in \mathrm{S}^{n-1}\}$ est à la fois inclus dans $\mathbb{R}^+$ et majoré par 0.
   Donc $\forall x \in \mathrm{S}^{n-1}, \mathrm{M}x = 0$.
   La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est formée de vecteurs de S^{n-1}
   donc $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{M}e_k = 0$. Or $\mathrm{M}e_k$ est aussi la k-ième colonne de M. Donc $\mathrm{M} = 0$.

   On a bien montré que $\boxed{\|\cdot\|_{\mathrm{op}} \text{ est une norme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
   Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$.
   <u>Si $x = y$</u>, l'inégalité à démontrer est vraie car $0 \leqslant 0$
   <u>Si $x \neq y$</u>, alors $\|x-y\| \neq 0$ et $\frac{1}{\|x-y\|}(x-y) \in \mathrm{S}^{n-1}$, donc :

   $$\frac{1}{\|x-y\|}\,\|\mathrm{M}.(x-y)\| = \left\|\mathrm{M}.\frac{1}{\|x-y\|}(x-y)\right\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}.$$

   Comme $\|x-y\| > 0$, on obtient $\boxed{\|\mathrm{M}x - \mathrm{M}y\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}\,\|x-y\|\,.}$

3. <u>**cas diagonale :**</u> On suppose dans un premier temps que $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
   Je prends $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{k_0}| = \mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{M})\}$ qui existe bien car $\sigma(\mathrm{M})$ est fini
   Soit $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{S}^{n-1}$. On a $\mathrm{M}x = {}^t(a_1x_1, \ldots, a_nx_n)$ et donc

   $$\|\mathrm{M}x\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_ix_i)^2} = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{k_0}|^2 x_i^2} = |a_{k_0}|\|x\|$$

   donc $\|\mathrm{M}x\| \leqslant |a_{k_0}|$ donc $|a_{k_0}|$ majore $\{\|\mathrm{M}x\|\,; x \in \mathrm{S}^{n-1}\}$
   Je note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$
   Ainsi on a $e_{k_0} \in \mathrm{S}^{n-1}$ et $\|\mathrm{M}e_{k_0}\| = |a_{k_0}|\|e_{k_0}\| = |a_{k_0}|$ et
   d'où $\mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{M})\} = |a_{k_0}| = \max\{\|\mathrm{M}x\|\,; x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$

cas symétrique : Je suppose maintenant que M est symétrique réelle,

Ainsi le théorème spectral nous fournit $\mathrm{D} \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M} = \Omega \mathrm{D}\,{}^t\Omega$

Comme M et D sont semblables, on a : $\mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{D})\} = \mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{M})\}$

De plus, $\{\|\mathrm{M}x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \{\|\Omega\mathrm{D}\,{}^t\Omega x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\}$

Les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ $x \mapsto {}^t\Omega x$ et $x \mapsto \Omega x$ étant des isométries vectorielles on a

$$\{\|\mathrm{M}x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \{\|\Omega\mathrm{D}\,{}^t\Omega x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \{\|\mathrm{D}\,{}^t\Omega x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \{\|\mathrm{D}y\|\,;y \in \mathrm{S}^{n-1}\}$$

À l'aide du cas précédent :

$$\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \mathrm{Max}\{\|\mathrm{M}x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \mathrm{Max}\{\|\mathrm{D}x\|\,;x \in \mathrm{S}^{n-1}\} = \|\mathrm{D}\|_{\mathrm{op}} = \mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{D})\}$$

On peut conclure alors que $\boxed{\text{Si M est symétrique alors } \mathrm{Max}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(\mathrm{M})\} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}}$.

4. On a $\mathrm{rg}(\mathrm{J}_n) = 1$ (colonnes non nulles identiques) donc à l'aide du théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{J}_n) = n-1$.
   Si $n \geqslant 2$, alors 0 est valeur propre de J_n et $\dim(\mathrm{E}_0(\mathrm{J}_n)) = n-1$.
   De plus comme J_n est symétrique réelle, J_n est diagonalisable donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$
   De plus $\mathrm{J}_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui permet de prouver que n est valeur propre de J_n
   Comme $n-(n-1) = 1$ alors n est valeur propre de J_n de multiplicité 1 et donc $\dim(\mathrm{E}_n(\mathrm{J}_n)) = 1$
   $\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ alors } \sigma(\mathrm{J}_n) = \{0, n\} \text{ et } \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}_n) = n-1 \text{ et } \dim \mathrm{E}_n(\mathrm{J}_n) = 1 \text{ et } \sigma(\mathrm{J}_1) = \{1\} \text{ et } \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{J}_1) = 1}$
   À l'aide de la question précédente, $\boxed{\|\mathrm{J}_n\|_{\mathrm{op}} = n}$
5. Comme en 3, on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   On a $\|\mathrm{M}e_j\| = \left\|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{k,j} e_k\right\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{k,j}^2}$ car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée
   donc $|\mathrm{M}_{i,j}| \leqslant \|\mathrm{M}e_j\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}$ car $e_j \in \mathrm{S}^{n-1}$
   Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Max}\{|\mathrm{M}_{i,j}|, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\} \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}}}$.
6. Soit $x \in \mathrm{S}^{n-1}$. On a

$$\|\mathrm{M}x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{M}x)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} x_j \right)^2$$

   Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} x_j \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2$$

   On en déduit que

$$\|\mathrm{M}x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2$$

   En passant à la racine carrée puis au maximum sur x, on a donc

$$\boxed{\|\mathrm{M}\|_{op} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2}}$$

Supposons qu'il y ait égalité. Il existe alors un $x \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que pour tout i les vecteurs $(\mathrm{M}_{i,1}, \dots, \mathrm{M}_{i,n})$ et x soient liés (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est à dire que toutes les lignes de M sont proportionnelles à x. M est donc de rang $\leqslant 1$.

Réciproquement, si M est de rang $\leqslant 1$, toutes les lignes de M sont multiples d'un vecteur x de norme 1.
Pour ce vecteur x, nos inégalités sont des égalités et le majorant trouvé est un maximum.

$$\boxed{\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{M}_{i,j})^2} \text{ si et seulement si } \mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant 1}$$

7. Soit $\mathrm{M} \in \Sigma_n$. On a $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{M}_{i,j})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n^2}$ donc $\boxed{\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \leqslant n}$

<u>**Analyse :**</u> On suppose que $\mathrm{M} \in \Sigma_n$ et $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = n$

comme $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{M}_{i,j})^2} \leqslant n$ alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1 - \mathrm{M}_{i,j}^2) = 0$

donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $|\mathrm{M}_{i,j}| = 1$

de plus d'après 6, $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant 1$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$

Je note $\mathrm{M} = (\mathrm{C}_1 | \cdots | \mathrm{C}_n)$ en colonne.

il existe $\beta_2, \dots, \beta_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $\mathrm{C}_j = \beta_j \mathrm{C}_1$

et il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ tel que $\mathrm{C}_1 = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

et ainsi $\mathrm{M} = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en ayant posé $\beta_1 = 1$

<u>**Synthèse :**</u> Prenons $\mathrm{M} = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\beta_1 = 1$ et $\beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$

On a bien $\mathrm{M} \in \Sigma_n$.

On a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$ donc d'après 6, $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i \beta_j)^2} = n$

<u>**Conclusion :**</u>

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les matrices M de } \Sigma_n \text{ telles que } \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = n \text{ sont les matrices de la forme} \\ \mathrm{M} = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ où } \beta_1 = 1 \text{ et } \beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1, 1\}\end{array}}$$

De plus en posant $\beta_1 = 1$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \{-1, 1\}^{2n-1} & \longrightarrow & \Sigma_n \\ (\beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) & \longmapsto & (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{array}$$

est surjective d'après ce qui précède.

Cette application est injective car les α_i sont déterminées par la première colonne et les β_i sont alors déterminés par un coefficient des colonnes correspondantes.

D'où le caractère bijectif de cette application.

donc $\boxed{\text{il y a exactement } 2^{2n-1} \text{ matrices M de } \Sigma_n \text{ telles que } \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} = n}$

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on a $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ et ainsi $\mathrm{e}^{-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!}$ avec convergence absolue. Ainsi

$$\mathrm{ch}\,(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left[1+(-1)^k\right] t^k}{k!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\left[1+(-1)^k\right] t^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\left[1+(-1)^k\right] t^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)\,!}$$

on a couper en deux la somme et effectuer un changement d'indice bijectif car il s'agit de familles sommables. De plus

$$\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n\,!}$$

or par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < 2^n \times n! \leqslant (2n)!$ et on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ t^{2n} \geqslant 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)}$

9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. On a $\frac{1+x}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1-x}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$
La fonction exp étant convexe sur $\mathbb{R}$ car de classe $\mathcal{C}^2$ et $\exp'' \geqslant 0$.
On a t et $-t \in \mathbb{R}$, donc $\exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$
d'où $\boxed{\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)}$.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $0 \leqslant \exp(t\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{e}^t\frac{1+\mathrm{X}}{2} + \mathrm{e}^{-t}\frac{1-\mathrm{X}}{2}$
Par hypothèse, X est d'espérance nulle, donc par linéarité

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^t\frac{1+\mathrm{X}}{2} + \mathrm{e}^{-t}\frac{1-\mathrm{X}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^t\mathbb{E}(1) + \mathrm{e}^{-t}\mathbb{E}(1)}{2} + 0 + 0 = \mathrm{ch}(t)$$

Ainsi $\mathrm{e}^t\frac{1+\mathrm{X}}{2} + \mathrm{e}^{-t}\frac{1-\mathrm{X}}{2}$ est d'espérance finie et il en est de même pour $\exp(t\mathrm{X})$ et $\mathbb{E}(\exp(t\mathrm{X})) \leqslant \mathrm{ch}(t)$
Ayant également $\mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$ selon **8**, on obtient $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
ce qui donne : $\boxed{\text{X est 1-sous-gaussienne}}$
Supposons maintenant que X est bornée par α, et posons $\mathrm{Y} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{X}$.
Alors Y est centrée (linéarité de l'espérance) et bornée par 1.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha \times t \in \mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha t\mathrm{Y}}) \leqslant \exp((\alpha t)^2/2)$, ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha^2 t^2/2}$
donc $\boxed{\text{si X est bornée par } \alpha \text{ alors elle est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$

11. Soit $t \in \mathbb{R}$. L'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ implique l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\mathrm{e}^{t\mu_1\mathrm{X}_1}, \ldots, \mathrm{e}^{t\mu_n\mathrm{X}_n}$ par le lemme des coalitions, or elles sont d'espérances finies.
Ainsi on a l'existence des membres et l'égalité :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i\mathrm{X}_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i\mathrm{X}_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(t\mu_i\mathrm{X}_i)).$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $0 \leqslant \mathbb{E}(\exp(t\mu_i\mathrm{X}_i)) \leqslant \exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2)$. Donc par produit :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i\mathrm{X}_i\right)\right) \leqslant \prod_{i=1}^n \exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2) = \exp\left(\sum_{i=1}^n t^2\mu_i^2\alpha^2\right) = \exp\left(\alpha^2\frac{t^2}{2}\right)$$

donc on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i\mathrm{X}_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$.

12. Soit $t > 0$.
La variable aléatoire $\exp(t\mathrm{X})$ est à valeurs positives et d'espérance finie car X est sous-gaussienne
Alors l'inégalité de Markov nous donne :
$$\frac{\mathbb{E}\left(\exp(t\mathrm{X})\right)}{\exp(t\lambda)} \geqslant \mathbb{P}\left(\exp(t\mathrm{X}) \geqslant \exp(t\lambda)\right)$$
comme on a $\mathbb{E}\left(\exp(t\mathrm{X})\right) \leqslant \exp\left(\alpha^2 t^2/2\right)$ car X est α-sous-gaussienne et
l'égalité des événements : $(\exp(t\mathrm{X}) \geqslant \exp(t\lambda)) = (\mathrm{X} \geqslant \lambda)$ car $x \mapsto \exp(tx)$ est strictement croissante
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \geqslant \mathrm{e}^{t\lambda}) \leqslant \exp\left(\alpha^2 t^2/2 - t\lambda\right)}$
En choisissant $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$ (qui est bien un réel strictement positif et qui est le minimum de $t \mapsto \alpha^2 t^2/2 - t\lambda$) dans l'inégalité précédente, on obtient :
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$
Selon **Q11**, comme $(-1)^2 = 1$, alors $-\mathrm{X}$ est une variable aléatoire α-sous-gaussienne car X l'est.
En effet, si $t \in \mathbb{R}$, alors $-t \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{E}(\exp(-t\mathrm{X})) \leqslant \exp(\alpha^2(-t)^2/2)$, ce qui donne :
$$\mathbb{E}(\exp(t(-\mathrm{X}))) \leqslant \exp(\alpha^2 t^2/2).$$
Ainsi, d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(-\mathrm{X} \geqslant \lambda) \leqslant \exp(-\lambda^2/(2\alpha^2))$.
Enfin, l'événement $(|\mathrm{X}| \geqslant \lambda)$ est la réunion disjointe des évènements $(\mathrm{X} \geqslant \lambda)$ et $(-\mathrm{X} \geqslant \lambda)$, donc la somme des deux inégalités précédemment obtenues fournit :
$$\boxed{\mathbb{P}(|\mathrm{X}| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}.$$

13. <u>$\Rightarrow$:</u> Supposons que X est d'espérance finie.
Alors, l'inégalité $0 \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor \leqslant \mathrm{X}$ assure que $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ est aussi d'espérance finie, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
D'après le résultat admis, la série $\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor \geqslant k)$ converge, et est de somme $\mathbb{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor)$.
Or, pour tout entier naturel k et par définition de la partie entière, l'événement $(\lfloor \mathrm{X} \rfloor \geqslant k)$ est exactement l'événément $(\mathrm{X} \geqslant k)$.
Donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) = \mathbb{P}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor \geqslant k)$ ce qui assure la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$
et donne également : $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) = \mathbb{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor)$.
L'inégalité $\lfloor \mathrm{X} \rfloor \leqslant \mathrm{X} \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$, et la croissance et la linéarité de l'espérance fournissent alors l'inégalité souhaitée, en remarquant que $\mathbb{E}(1) = 1$:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$$
<u>$\Leftarrow$:</u> Supposons que la série $\sum_{k=1} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$ converge.
Alors, ayant $\mathbb{P}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor \geqslant k) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$ pour tout k entier et $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ est d'espérance finie
donc $\lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$ également par linéarité
comme $0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$, on en déduit que X est d'espérance finie.

<u>**Conclusion :**</u>

X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$ converge
dans ce cas : $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par stricte croissance de la fonction $t \in [1, +\infty[\mapsto \sqrt{\frac{2\ln(t)}{\beta^2}} \in [0, +\infty[$,

on a l'égalité des evénemements : $\left(\exp(\beta^2 X^2/2) \geqslant k\right) = \left(|X| \geqslant \sqrt{\frac{2\ln(k)}{\beta^2}}\right)$

Si $k \geqslant 2$, alors $\sqrt{\frac{2\ln(k)}{\beta^2}} > 0$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question **12** :

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{2\ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta},$$

car $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

Si $k = 1$, l'inégalité est vraie car $\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2$

dans tous les cas $\boxed{\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}}$

En supposant $0 < \alpha\beta < 1$, on a alors $1 < (\alpha\beta)^{-2} = \eta$ par stricte décroissance de $u \mapsto u^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\eta}$. comme on a $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant \frac{2}{k^\eta}$

alors la série $\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right)$ converge par comparaison entre séries à termes positifs

D'après la question précédente, $\underline{\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \text{ est donc d'espérance finie}}$ et :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\eta}$$

On a bien $\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + 2\zeta(\eta)}$.

C. Recouvrements de la sphère

15. Par l'absurde, on suppose qu'il n'existe pas de sous ensemble fini A de K tel que : $K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$.

On va construire par récurrence une suite $(a_k)_{k \geqslant 0} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall m, p \in \mathbb{N},\ m \neq p \Longrightarrow \|a_m - a_p\| > \frac{\varepsilon}{2}$

<u>Initialisation :</u> Je peux choisir $a_0 \in K$ car $K \neq \emptyset$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$.

Je suppose avoir qu'il existe une suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $\forall m, p \in [\![0, n]\!],\ m \neq p \Longrightarrow \|a_m - a_p\| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\{a_k \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est fini, on a $K \not\subset \bigcup_{k=0}^{n} B_{a_k, \varepsilon/2}$. Ceci nous fournit $a_{n+1} \in K \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_{a_k, \varepsilon/2}\right)$

Et donc $\forall m, p \in [\![0, n+1]\!],\ m \neq p \Longrightarrow \|a_m - a_p\| > \frac{\varepsilon}{2}$.

<u>Conclusion :</u> J'ai ainsi construit une suite à valeurs dans K ayant la propriété voulue.

Comme K est compact, ceci nous fournit une suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ convergente.

Ainsi la suite $\left(\|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\|\right)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 or $\forall n \in \mathbb{N},\ \|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\| > \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\varepsilon = 0$ ce qui est absurde !

$\boxed{\text{il existe un sous ensemble fini A de K tel que : } K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}}$

16. On considère un sous ensemble fini A de K tel que : $\mathrm{K} \subset \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{B}_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

Comme les boules $\mathrm{B}(a, \varepsilon/2)$ recouvrent K quand a décrit A, chaque élément x de Λ est dans au moins une des boules. On peut ainsi construire

une application $f : \Lambda \longrightarrow \mathrm{A}$ telle que $\forall x \in \Lambda,\ x \in \mathrm{B}_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$

Soit $x, y \in \Lambda$ tels que $x \neq y$.
On a donc $\|x - y\| > \varepsilon$ ainsi $y \notin \mathrm{B}_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$ car $x \in \mathrm{B}_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$
donc $f(x) \neq f(y)$
On vient de montrer que l'application $f : \Lambda \longrightarrow \mathrm{A}$ est injective or A est fini
donc $\boxed{\Lambda \text{ est fini et } \mathrm{Card}(\Lambda) \leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{A})}$

Soit une telle partie Λ de K ayant un cardinal maximal.
Par l'absurde si on avait $\mathrm{K} \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} \mathrm{B}_{a,\varepsilon}$, ceci nous fournirait $a \in \mathrm{K} \setminus \left(\bigcup_{a \in \Lambda} \mathrm{B}_{a,\varepsilon} \right)$
Ainsi $\Lambda \cup \{a\} \subset \mathrm{K}$ et $\forall x, y \in \Lambda \cup \{a\},\ x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon$ et $\mathrm{Card}(\Lambda) < \mathrm{Card}\left(\Lambda \cup \{a\}\right)$
Absurde avec le caractère maximal du cardinal de Λ
Ainsi $\boxed{\text{Si } \Lambda \text{ est de cardinal maximal alors } \mathrm{K} \subset \bigcup_{a \in \Lambda} \mathrm{B}_{a,\varepsilon}}$

17. Soit $a \in \Lambda$. Soit $x \in \mathrm{B}_{a,\varepsilon/2}$. Comme $a \in \mathrm{S}^{n-1}$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|x\| \leqslant \|x - a\| + \|a\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1,$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{B}_{a,\varepsilon/2} \subset \mathrm{B}_{0,1+\varepsilon/2}}$.
Par ailleurs, donnons-nous $a \neq b$ dans Λ et supposons qu'il existe un $x \in \mathrm{B}_{a,\varepsilon/2} \cap \mathrm{B}_{b,\varepsilon/2}$. Alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|b - a\| \leqslant \|b - x\| + \|x - a\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Donc les $\mathrm{B}_{a,\varepsilon/2}$ sont deux à deux disjointes pour $a \in \Lambda$. Puisque Λ est fini, on peut écrire :

$$\mu\left(\mathrm{B}_{0,1+\varepsilon/2}\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} \mathrm{B}_{a,\varepsilon/2} \right) = \sum_{a \in \Lambda} \mu\left(\mathrm{B}_{a,\varepsilon/2}\right).$$

On en déduit : $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \times \mathrm{card}\,\Lambda$ ainsi $\boxed{\mathrm{card}\,\Lambda \leqslant \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

18. Pour utiliser **Q16**, on a besoin de l'existence d'un Λ de cardinal maximal.
On considère alors $\Gamma = \left\{ \mathrm{card}\left(\Lambda\right) / \Lambda \text{ fini et } \Lambda \subset \mathrm{S}^{n-1} \text{ et } \left(\forall x, y \in \Lambda,\ x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \frac{1}{2} \right) \right\}$
Γ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, car $0 \in \Gamma$ et majorée par $\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = 5^n$ avec la question précédente en $\varepsilon = \frac{1}{2}$
Ainsi Γ admet un plus grand élément M
il existe alors Λ_n partie de cardinal M du compact S^{n-1} telle que $\forall x, y \in \Lambda_n,\ x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \dfrac{1}{2}$
donc Λ_n est de cardinal maximal en appliquant **Q16**, au compact $\mathrm{K} = \mathrm{S}^{n-1}$.
On obtient $\boxed{\text{une partie } \Lambda_n \text{ de } \mathrm{S}^{n-1} \text{ de cardinal majorée } 5^n \text{ telle que } \mathrm{S}^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \mathrm{B}_{a,\frac{1}{2}}}$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $y_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^{(n)} x_j$, avec $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$.

    De plus, les variables aléatoires $(\mathrm{M}_{i,1}^{(n)}, \ldots, \mathrm{M}_{i,n}^{(n)})$ sont mutuellement indépendantes, car elles forment une sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

    La question 11 permet de conclure que $\boxed{y_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$.

    L'inégalité d'Orlicz (admise à la fin de la partie montre alors que :

    $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma y_i^2}\right) \leqslant 5.$$

    L'indépendance mutuelle des $\mathrm{M}_{i,j}^{(n)}$ fournit l'indépendance mutuelle des y_i, par le lemme des coalitions car chaque y_i s'écrit comme combinaison linéaire des $\mathrm{M}_{i,j}^{(n)}$, et les différentes combinaisons linéaires ont des supports deux à deux disjoints.

    Donc par produit on obtient : $\boxed{\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\gamma\|y\|^2}\right) \leqslant 5^n}$.

    Soit maintenant $r > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle et stricte positivité de γ on a :

    $$\mathrm{P}(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}) = \mathrm{P}\left(\mathrm{e}^{\gamma\|y\|^2} \geqslant \mathrm{e}^{\gamma r^2 n}\right).$$

    Puis en utilisant l'inégalité de Markov il vient : $\boxed{\mathrm{P}(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}) \leqslant (5\mathrm{e}^{-\gamma r^2})^n}$.

20. Soit $r > 0$ tel que $\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$.

    La question 1) nous fournit $t \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que : $\|\mathrm{M}^{(n)} t\| = \|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}}$

    La question 18) nous fournit $a \in \Lambda_n$ tel que : $t \in \mathrm{B}_{a,1/2}$.

    Par la question 2), on a :

    $$\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|\mathrm{M}^{(n)} t - \mathrm{M}^{(n)} a\| + \|\mathrm{M}^{(n)} a\| \leqslant \frac{1}{2}\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} + \|\mathrm{M}^{(n)} a\|,$$

    Ainsi $\|\mathrm{M}^{(n)} a\| \geqslant \frac{1}{2}\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}}$.

    On a montré que : $\boxed{\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n} \text{ implique l'existence d'un } a \in \Lambda_n \text{ tel que } \|\mathrm{M}^{(n)} a\| \geqslant r\sqrt{n}}$.

    Comme on a l'inclusion des événements :

    $$\left(\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\right) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \left(\|\mathrm{M}^{(n)} a\| \geqslant r\sqrt{n}\right)$$

    et comme Λ_n est fini, on obtient :

    $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}) &\leqslant \sum_{a \in \Lambda_n} \mathrm{P}\left(\|\mathrm{M}^{(n)} a\| \geqslant r\sqrt{n}\right) \\ &\leqslant \sum_{a \in \Lambda_n} \left(5\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n \qquad \text{d'après 19} \\ &= \left(5\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n \times \operatorname{card} \Lambda_n \\ \mathrm{P}(\|\mathrm{M}^{(n)}\|_{\mathrm{op}} &\leqslant \left(25\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n \qquad \text{d'après 18.} \end{aligned}$$