# Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 8

## Exercice 1 : topologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

**1.** La suite $\left(\dfrac{1}{k}I_n\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une une suite de matrices inversibles convergeant vers $\mathrm{O}_n$ qui ne l'est pas. Donc $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé.}}$

**2.** $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \text{ est ouvert}}$ comme image réciproque d'un ouvert (complémentaire d'un fermé) par une application continue.

**3.** Comme $\mathrm{Sp}(M)\cap\mathbb{R}_*^+$ est fini (éventuellement vide), on a bien $\rho>0$ tel que $]0,\rho[\subset {}^c\,\mathrm{Sp}(M)$ : il suffit de prendre la plus petite valeur propre $>0$ si elle existe, et n'importe quel $\rho>0$ sinon. Donc $\boxed{\forall\lambda\in]0,\rho[,\quad M-\lambda I_n\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $M_k = M-\dfrac{1}{k}I_n$ est inversible et $M_k\to M$.

Donc, par caractérisation séquentielle, $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

**4.** Si $A$ est inversible, $BA = A^{-1}(AB)A$ et comme le polynôme caractérstique est un invariant de similitude, $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.
Donc $f : A\mapsto \chi_{AB}-\chi_{BA}$ est nulle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, il s'agit d'une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par continuité de $A\mapsto AB$ et $A\mapsto BA$ qui sont linéaires en dimension finie, et de $A\mapsto\chi_A$ car $\chi_A$ est un polynôme dont les cœfficients sont polynômiaux en $A$ vu la définition du déterminant ($\chi_A = \det(XI_n-A)$.)
Autre rédaction possible, peut-être plus simple : l'application det étant continue (car polynomiale), pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, comme $\lambda I_n - A_kB\to\lambda I_n-AB$ et $\lambda I_n - BA_k\to\lambda I_n - BA_k$, de l'égalité $\chi_{A_kB}(\lambda)=\chi_{BA_k}(\lambda)$ on déduit que $\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$, donc le polynôme $\chi_{AB}-\chi_{BA}$ a une infinité de racines, donc il est le polynôme nul.
Donc, par densité de la question précédente, $f$ est nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\boxed{\text{pour tout } (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \chi_{AB}=\chi_{BA}.}$

Puis avec $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, on calcule $AB=0_2$ et $BA=B$ donc $\boxed{\pi_{AB}=X\neq\pi_{BA}}$ car $BA\neq 0_2$.

**5.** Comme det est continue et $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))=\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs (on ne peut relier continûment un réel $<0$ à un réel $>0$, oubien ce n'est pas un intervalle), $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$

# Exercice 2 :

**1.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ : « $H_n$ est un polynôme unitaire de degré $n$. »

**Initialisation** On a bien $H_0$ unitaire et de degré $0$

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_n$ soit un polynôme unitaire de degré $n$.
On a $\deg(XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n > n - 1 \geqslant \deg(H_n')$
donc $\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n - H_n') = n+1$ et le cœfficient dominant de $H_{n+1}$ est celui de $XH_n$, soit $1$, d'où l'hérédité

**Conclusion** On a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}$

---

**2.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. soit $\mathcal{P}(n)$ : « $H_{n+1}' = (n+1)H_n$. »

**Initialisation** On a $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ donc on a bien $H_{0+1}' = (0+1)H_0$.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$. On a

$$H_{n+2}' = (XH_{n+1} - H_{n+1}')' = XH_{n+1}' + H_{n+1} - H_{n+1}'' = (n+1)XH_n + XH_n - H_n' - (n+1)H_n'$$

donc $H_{n+2}' = (n+2)(XH_n - H_n') = (n+2)H_{n+1}$.

**Conclusion** On a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_{n+1}' = (n+1)H_n.}$

---

**3. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$**

**a)** Soit $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
Par croissance comparée on a $x^2P(x)Q(x)f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $P(x)Q(x)f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison à une fonction positive, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
De façon analogue, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.
Ainsi la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tous } P, Q \in \mathbb{R}[X], \text{ on a l'existence de l'intégrale qui définit } \langle P \mid Q\rangle.}$

---

**b)** Soit $P, Q$ et $R \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons $\begin{cases} (i) & \langle \lambda P + R \mid Q\rangle = \lambda\langle P \mid Q\rangle + \langle R \mid Q\rangle \\ (ii) & \langle P \mid Q\rangle = \langle Q \mid P\rangle \\ (iii) & \langle P \mid \lambda Q + R\rangle = \lambda\langle P \mid Q\rangle + \langle P \mid R\rangle \\ (iv) & \langle P \mid P\rangle \geqslant 0 \\ (v) & \langle P \mid P\rangle = 0 \Longrightarrow P = 0 \end{cases}$

**Pour** $(i)$ On a bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + R(x))Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Pour** $(ii)$ On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)P(x)f(x)\,\mathrm{d}x$

**Pour** $(iii)$ vrai avec $(i)$ et $(ii)$

**Pour** $(iv)$ On a $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\langle P \mid P\rangle \geqslant 0$

**Pour** $(v)$ On suppose $\langle P \mid P\rangle = 0$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ or la fonction $x \mapsto P^2(x)f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^2(x)f(x) = 0$ or $f$ ne s'annule pas, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^2(x) = 0$ ainsi $P$ admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

---

**4. Une famille orthogonale**

**a)** On va encore effectuer une démonstration par récurrence de $\mathcal{P}(n)$ :

$$\text{« } \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle \text{ »}$$

**Initialisation** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P \mid H_0\rangle = \langle P^{(0)} \mid H_0\rangle$.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P \mid XH_n - H_n'\rangle = \langle P \mid XH_n\rangle - \langle P \mid H_n'\rangle$

Sous réserve d'existence, on effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ : $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto P(x)H_n(x)$, pour $A < B$,

$$\int_A^B xf(x)(P(x)H_n(x))\,\mathrm{d}\,x = \Big[-f(x)(P(x)H_n(x))\Big]_A^B + \int_A^B f(x)(P'(x)H_n(x)+P(x)H_n'(x))\,\mathrm{d}\,x$$

On a $P(B)H_n(B)f(B) - P(A)H_n(A)f(A)$ qui tend vers $0$ lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$ par croissance comparée, donc $\langle P \mid XH_n\rangle = \langle P \mid H_n'\rangle + \langle P' \mid H_n\rangle$, puis $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P' \mid H_n\rangle = \langle (P')^{(n)} \mid H_0\rangle$ par hypothèse de récurrence donc $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P^{(n+1)} \mid H_0\rangle$ d'où l'hérédité.

**Conclusion** On a montré par récurrence que

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$.

---

**b)** D'après la question précèdente, pour tout $P$ tel que deg $P < n$, on a

$$\langle P \mid H_n\rangle = \langle 0 \mid H_0\rangle = 0,$$

donc si $0 \leqslant i < j$, on a deg$(H_i) = i < j$ d'après **1**. Ainsi $\langle H_i \mid H_j\rangle = 0$.

La famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc orthogonale et formée de $n+1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ donc libre. Comme dim $\mathbb{R}_n[X] = n+1$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|H_n\|^2 = \langle H_n \mid H_n \rangle = \langle H_n^{(n)} \mid H_0 \rangle$ d'après **a**.
En utilisant **2**, $H_n^{(n)} = (H_n')^{(n-1)} = n(H_{n-1}')^{(n-1)} = \cdots = n!H_0^{(0)} = n!H_0$ donc

$$\|H_n\|^2 = n!\langle H_0 \mid H_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} f = 1$$

d'après le *rappel* donc $\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

---

**d)** On a $\boxed{H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1 \text{ et } H_3 = X^3 - 3X}$ car $H_3 = X(X^2-1) - 2X$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{i!}} H_i\right)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ d'après **b** et **c**.
Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et comme les vecteurs sont non nuls, il s'agit d'une base orthonormée de $\dim \mathbb{R}_3[X]$.
On a $P = a_0H_0 + a_1H_1 + a_2H_2 + a_3H_3$. Par unicité des cœfficients du polynôme,

on a $\begin{cases} 1 = a_3 \\ 1 = a_2 \\ 1 = a_1 - 3a_3 \\ 1 = a_0 - a_2 \end{cases}$ d'où $\boxed{P = 2H_0 + 4H_1 + H_2 + H_3.}$

Ainsi le projeté orthogonal de $P$ sur $\mathbb{R}_0[X]$ est $2H_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ car $4H_1 + H_2 + H_3 \in \mathbb{R}_0[X]^{\perp}$ donc la distance cherchée est $\|4H_1 + H_2 + H_3\| = \left\|\frac{4}{\sqrt{1!}}H_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}H_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}H_3\right\|$.

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{1!}}H_1, \frac{1}{\sqrt{2!}}H_2, \frac{1}{\sqrt{3!}}H_3\right)$ est une famille orthonormale, on a

$$\|4H_1 + H_2 + H_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}.$$

Ainsi $\boxed{d = \sqrt{24}.}$

# Problème (CCINP) : Algèbre bilinéaire – CCP 2014 Maths 2

**1.a** Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $s$ : $\boxed{s \text{ est orthodiagonalisable.}}$

Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P$ orthogonale et une matrice $D$ diagonale telles que $\boxed{S = PDP^{-1} = PDP^{\intercal}.}$

---

**1.b** $\chi_S(X) = X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\text{Sp}(S) = \{0\}$ et si $S$ était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi $\boxed{S \text{ est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.}}$

---

**2.a** Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$.

Or la base $\beta$ est orthonormée, donc $\boxed{R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.}$

---

**2.b** Supposons que $x \in S(0,1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.

On a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } x \in S(0,1),\ R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n].}$

---

**3.a** Supposons que $s$ est symétrique défini positif.
Soit $\lambda$ une valeur propre de $s$. Il existe un vecteur propre $x$ : $x$ est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x)|x\rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\boxed{\lambda > 0.}$

Si maintenant $s$ est seulement symétrique positif, on a $0 \leqslant \lambda \|x\|^2$ donc $\boxed{\lambda \geqslant 0.}$

---

**3.b** $s_{i,j}$ est la $i$-ème coordonnée dans la base $B$ du vecteur $s(e_j)$, or $B$ est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $s_{i,j} = \langle e_i|s(e_j)\rangle$.
En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i|s(e_i)\rangle$, or $e_i$ est un vecteur unitaire, donc d'après la question 2.b, $\boxed{s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n].}$

## Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

**4.** Les coefficients de $M^\intercal M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de $M$, donc d'après le cours, $\boxed{\text{l'application } M \mapsto M^\intercal M - I_n \text{ est continue.}}$

---

**5.** D'après le cours, les colonnes de $A$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : $\boxed{\text{pour tout } i \in \{1, \cdots, n\},\ |a_{i,j}| \leqslant 1.}$

---

**6.** Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelle que soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si l'on note $f$ l'application $M \mapsto M^\intercal M - I_n$ de la question 4, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_n\})$, or le singleton $\{0_n\}$ est un fermé et $f$ est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

**7.a** D'après la question 1.a, il existe une matrice $P$ orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^{\intercal}$.

Ainsi, $\boxed{T(A) =}$ $\text{Tr}\left([AP\Delta]P^{-1}\right) = \text{Tr}\left(P^{-1}[AP\Delta]\right) = \boxed{\text{Tr}(B\Delta)}$ en posant $B = P^{-1}AP$.

$A$ et $P$ sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc $\boxed{B \text{ est orthogonale.}}$

**7.b** On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}((\lambda C+D)S) = \lambda\text{Tr}(CS)+\text{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \text{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction $T$ sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc $T$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

**7.c** Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$

le $(i, j)$-ème coefficient d'une matrice $M$, $T(A) = \sum_{i=1}^{n}(B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i}$, mais $\Delta$

est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. D'après la question 5, et les $\lambda_i$ étant positifs,

$T(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leqslant \text{Tr}(S)$, mais de plus $\text{Tr}(S) = T(I_n)$ et $I_n$ est une matrice orthogonale, donc $\boxed{t = \text{Tr}(S).}$

## Inégalité d'Hadamard

**8.** L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité aritmético-géométrique, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, car $S$ est diagonalisable (donc $\chi_S$ est scindé).

**9.** On calcule $S_\alpha^{\intercal} = S_\alpha$, puis, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\intercal}S_\alpha X = (DX)^{\intercal}S(DX) \geqslant 0$ car $DX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et car $S$ est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(D^{\intercal}SD)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2} [D^{\intercal}]_{i,j}S_{j,k}D_{k,i},$$

mais $D$ est diagonale, donc $\boxed{\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}.}$

**10.** On peut appliquer l'inégalité $(*)$ à la matrice $S_\alpha$ car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, or

$$\det(S_\alpha) = \det(D)^2\det(S) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\right)^2 \det(S)$$

et $\frac{1}{n}\text{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_{i,i}}s_{i,i} = 1$, donc $\boxed{\det(S) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_{i,i}}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n}s_{i,i}.}$

**11.** Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal S_\varepsilon X = X^\intercal SX + \varepsilon\,\|X\|^2 \geqslant 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant s_{i,i}$, donc $s_{i,i}+\varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à $S_\varepsilon$ : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i}+\varepsilon)$.
De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta+\varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i}+\varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$ : $\boxed{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^{n}s_{i,i}.}$

## Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

**12.** Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^\intercal BX = (\Omega X)^\intercal A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($\Omega$ est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
De plus $\Omega$ est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$.

Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2\det(A) = 1$ : on a prouvé que $\boxed{B \in \mathcal{U}.}$

De plus, $\boxed{\text{Tr}(AS) = \text{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\intercal) = \text{Tr}(\Omega^\intercal[A\Omega\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta).}$

**13.** D'après la question précédente, $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$.
Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B\Omega^\intercal$.
En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc $\boxed{\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}.}$

Prenons $x \in \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par $0$.

$\boxed{\text{Elle possède donc une borne inférieure.}}$

**14.** Par application de l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{n}\text{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}.}$$

**15.** Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$, donc $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)^{1/n} \geqslant 1.$

Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\displaystyle \operatorname{Tr}(B\Delta) \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}.}$

---

**16.** Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\left\{\operatorname{Tr}(B\Delta) \middle| B \in \mathcal{U}\right\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\displaystyle X^\intercal D X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\displaystyle\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\displaystyle\operatorname{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$,

donc $\boxed{m = n(\det(S))^{1/n} = m\sqrt[n]{\det S}.}$

**Fin du corrigé**