CCP 2021 – Maths 2 – Un corrigé

EXERCICE

1 – Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On a alors :

$$ {}^tDA = DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n,1} & \cdots & \lambda_n a_{n,n} \end{pmatrix} $$

Donc $\langle D | A \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i,i}$. Ainsi si $A \in (D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ on a en particulier pour $E_{k,k}$ avec $k \in [\![1,n]\!]$:

$$ 0 = \langle E_{k,k} | A \rangle = a_{k,k} $$

Donc les coefficients diagonaux de *A* sont tous nuls. Réciproquement, si $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = 0$ alors pour toute matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on a $\langle D | A \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i,i} = 0$.

$\boxed{\text{L'orthogonal de } D_n(\mathbb{R}) \text{ est l'ensemble des matrices } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.}}$

PROBLÈME

Partie I : quelques exemples

2 – Si *A* est diagonalisable, on pose alors $D = A$ et $N = 0$ et on vérifie immédiatement que le couple (D, N) vérifie les quatre propriétés de l'énoncé :

$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, sa décomposition de Dunford est } (A,0)}$.

De la même façon et avec une vérification tout aussi immédiate :

$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, sa décomposition de Dunford est } (D,N) = (0,A)}$.

On pose désormais $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A = D + N$, *D* est diagonalisable car diagonale, *N* est nilpotente car $N^2 = 0$, mais $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On n'a donc pas $ND = DN$ et le couple (D, N) proposé n'est pas la décomposition de Dunford de *A*.

3 – Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2+1$. Si A avait une décomposition de Dunford (D,N) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors d'après l'énoncé on aurait $\chi_A=\chi_D$ et donc la matrice D diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aurait un polynôme caractéristique non scindé : absurde. Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ n'a pas de décomposition de Dunford dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

4 – On a :

$$\chi_A=-\begin{vmatrix}3-X & 0 & 8\\ 3 & -1-X & 6\\ -2 & 0 & -5-X\end{vmatrix}=(1+X)\begin{vmatrix}3-X & 8\\ -2 & -5-X\end{vmatrix}=(1+X)\left(X^2+2X+1\right)$$

On a donc $\boxed{\chi_A=(1+X)^3}$.

Comme χ_A est scindé, A dispose d'une décomposition de Dunford notée (D,N) et la matrice D a pour polynôme caractéristique $\chi_D=\chi_A=(X+1)^3$. Donc $\mathrm{Sp}(D)=\{-1\}$ et D étant de plus diagonalisable, elle est semblable à $-\mathrm{I}_3$ qui n'est semblable qu'à elle-même.

$$\boxed{\text{Donc la décomposition de Dunford de } A \text{ est } (D,N) \text{ avec } D=-\mathrm{I}_3 \text{ et } N=A+\mathrm{I}_3, \text{ soit explicitement : } N=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}.}$$

5 – Comme (D,N) est une décomposition de Dunford de A on a $A=D+N$ et $ND=DN$. Ainsi $\exp(A)=\exp(D)\exp(N)$.

Comme D est ici diagonale, on a $\exp(D)=\exp(-\mathrm{I}_3)=\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{I}_3$.

On calcule maintenant $N^2=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et par suite pour $n\geq 2$ $A^n=0$. Donc :

$$\exp(N)=\mathrm{I}_3+N=\begin{pmatrix}5 & 0 & 8\\ 3 & 1 & 6\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Et finalement : $\boxed{\exp(A)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}5 & 0 & 8\\ 3 & 1 & 6\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}}$.

6 – Posons $P=X(X-1)$. On a alors $P\left(A^2\right)=A^2\left(A^2-\mathrm{I}_3\right)=\underbrace{A^2\left(A-\mathrm{I}_3\right)}_{=0}\left(A+\mathrm{I}_3\right)$. Donc :

$$\boxed{P = X(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de } A^2}.$$

Posons alors $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

- On a $A = D + N$.
- P est un polynôme annulateur de A^2, non nul, scindé et à racines simples. Donc A^2 est diagonalisable.
- Comme A et $\mathrm{I}_3 - A$ commutent, on a $N^2 = A^2(\mathrm{I}_3 - A)^2 = \underbrace{A^2(A-\mathrm{I}_3)}_{=0}(A-\mathrm{I}_3) = 0$, donc N est nilpotente.
- Comme N et D sont des polynômes en A, on a $ND = DN$.

$$\boxed{\text{Les points (1) à (4) ont bien été vérifiés et } (D,N) = (A^2, A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$$

Partie II : un exemple par deux méthodes

7 – On calcule en un premier temps le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = -\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} -\begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

Puis en retranchant la première colonne à la troisième et en développant par rapport à C_3 :

$$\chi_A = (X-2)(2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

Il s'en suit que A est diagonalisable si et seulement si $E_2(A) = \ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ est un plan. Or $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) \geq 2$ et par suite avec le théorème du rang $\dim(\ker(A - 2\mathrm{I}_3)) \leq 1$. $E_2(A)$ n'est donc pas un plan : $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Comme les polynômes $X-1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux on a $\ker(\chi_A(A)) = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2$, et avec le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(A - \mathrm{I}_3) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2}.$$

8 – Pour $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on résout : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$. On pose alors $e_1 = (0,1,1)$ et $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$.

Puis on résout : $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$. On pose alors $e_2 = (1,1,0)$ et $\ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\}$.

On calcule $(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

On résout alors $(A - 2\mathrm{I}_3)^2 X = 0 \Leftrightarrow x = y$. On pose $e_3 = (0,0,1)$ et (e_2, e_3) et $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$. Cette famille étant visiblement libre, elle constitue une base de $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$ et comme $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$ on a par concaténation :

Une base de $\mathbb{R}^3$ est (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. En outre $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$.

On a alors : $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$. On calcule $u(e_3) = (1,1,2) = e_2 + 2e_3$. Ainsi :

La matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9 – Posons $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $B = D_0 + N_0$, D_0 est diagonalisable, $N_0^2 = 0$ et N_0 est ainsi nilpotente et enfin : $D_0 N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_0 D_0$.

La décomposition de Dunford de B est ainsi (D_0, N_0) où D_0 et N_0 sont les matrices définies ci-dessus.

Appelons f et g les endomorphismes ayant pour matrices respectives D_0 et N_0 dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Il apparait alors clairement que (f, g) est la décomposition de Dunford de *u*.
Or A est la matrice dans la base canonique de *u*, donc si on appelle D et N les matrices respectives de *f* et *g* dans la base canonique alors (D, N) vérifie les points (1) à (4) et constitue la décomposition de Dunford de A.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a ainsi $D = PD_0P^{-1}$ et $N = PN_0P^{-1}$. On détermine P^{-1} en résolvant, pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(a, b, c)$:

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ x+y=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b \\ y=a \\ z=a-b+c \end{cases}$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$D=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi que : $N=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est } (D,N) \text{ avec } D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

10 – La décomposition en éléments simples d'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{(X-2)^2}$$

- On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a=1$.
- On multiplie par $(X-2)^2$ et on évalue en 2 : $c=1$.
- On multiplie par X et on regarde la limite en $+\infty$: $0=a+b$ et donc $b=-1$.

Finalement : $\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2}}$.

Par suite : $1=(X-2)^2-(X-1)(X-2)+(X-1)=(X-2)^2+(3-X)(X-1)$.

$\boxed{\text{Si on pose } U=3-X \text{ et } V=1 \text{ on a l'égalité de Bézout : } (X-1)U+(X-2)^2V=1 \text{ et de plus } \deg(U)<2 \text{ et } \deg(V)<1.}$

11 – On va utiliser à plusieurs reprises dans cette question que des polynômes en u commutent. Ainsi partant de $(X-1)U+(X-2)^2V=1$ on a $U(u)\circ(u-\mathrm{id})+V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2=\mathrm{id}$, puis en évaluant en $x\in\mathbb{R}^3$: $\boxed{p(x)+q(x)=x}$.

En outre $(u-\mathrm{id})(p(x))=V(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)$. Or d'après le théorème de messieurs Cayley et Hamilton on a $(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2=0$ et donc $p(x)\in\ker(u-\mathrm{id})$.

De même $(u-2\mathrm{id})(q(x))=U(u)\circ(u-\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)=0$ et $q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

En résumé, pour $x\in\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x=p(x)+q(x) \\ p(x)\in\ker(u-\mathrm{id}) \\ q(x)\in\ker(u-2\mathrm{id})^2 \end{cases}$, et $\mathbb{R}^3=\ker(u-\mathrm{id})\oplus\ker(u-2\mathrm{id})^2$.

On en déduit que p est la projection sur $\ker(u-\mathrm{id})$ de direction $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et que q est la projection sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ de direction $\ker(u-\mathrm{id})$.

12 – On rappelle que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et que (e_1) est une base de $\ker(u-\mathrm{id})$ et que (e_2,e_3) est une base de $\ker(u-2\mathrm{id})^2$. Donc la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et celle de q est $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matrice de $p+2q$ dans $\mathcal{B}$ est alors $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

On reconnait là la matrice D_0 de la question 8 donc $p+2q=f$ (cf question 9 : on a appelé (f,g) la décomposition de Dunford de *u*). Il s'en suit que :

$$D=V(A)(A-2\mathrm{I}_3)^2+2U(A)(A-\mathrm{I}_3)=(A-2\mathrm{I}_3)^2+2(3\mathrm{I}_3-A)(A-\mathrm{I}_3)$$

Après développement : $\boxed{D=-A^2+4A-2\mathrm{I}_3 \text{ et } N=A-D=A^2-3A+2\mathrm{I}_3}$.

Partie III : une preuve de l'unicité de la décomposition

13 – Soit λ une valeur propre de *u* et $x\in E_\lambda(u)$. On a alors $u(x)=\lambda x$ et donc $v\circ u(x)=\lambda v(x)$. Sachant $v\circ u=u\circ v$ on en déduit $u(v(x))=\lambda v(x)$ et donc $v(x)\in E_\lambda(u)$. On a montré :

$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v}$.

Comme *u* est diagonalisable, on a $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, et en appelant v_i l'endomorphisme induit par *u* sur $E_{\lambda_i}(u)$, v_i est diagonalisable (car endomorphisme induit sur un sous espace stable par un endomorphisme diagonalisable). Soit $\mathcal{B}_i$ une base de vecteurs propres de v_i. Les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont également vecteurs propres de *u* car éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Donc les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont vecteurs propres communs à *u* et à *v*.

Comme $E=\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}(u)$, la concaténée $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i$ est une base de *E*, dont les vecteurs sont vecteurs propres communs à *u* et à *v* : $\boxed{\text{on a trouvé une base commune de diagonalisation pour } u \text{ et } v}$.

14 – Soient *A* et *B* diagonalisables qui commutent d'endomorphismes associés α et β. Il existe alors une base de vecteurs propres communs à α et β. Soient A' et B' les matrices diagonales de α et β dans cette base commune de diagonalisation. La matrice dans cette base de $\alpha-\beta$ est alors la matrice diagonale $A'-B'$, ce qui montre que $A-B$ est diagonalisable.

15 – On se donne *A* et *B* nilpotentes qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs *a* et *b*. Comme elles commutent, on a avec le binôme de Newton :

$$(A-B)^{a+b}=\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}(-1)^{a+b-k}A^kB^{a+b-k}$$

Or pour $a \le k \le a+b$ on a $A^k = 0$ et pour $0 \le k < a$ on a $a+b-k > b$ donc $B^{a+b-k} = 0$, et donc $(A-B)^{a+b} = 0$: $A-B$ est nilpotente.

16 – Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ soit diagonalisable et nilpotente, et soit *f* son endomorphisme canoniquement associé. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice *D* de *f* est diagonale et il existe par ailleurs $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. On a alors $f^k = 0$ puis $D^k = 0$. D s'écrit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et alors $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$ et comme $D^k = 0$ les λ_i sont tous nuls. Donc $D = 0$ puis $f = 0$ et finalement $M = 0$.

$\boxed{\text{La matrice nulle est la seule matrice diagonalisable et nilpotente}}$.

17 – On suppose qu'il existe deux couples (D, N) et (D', N') vérifiant les propriétés (1) à (4) et tels que *D*, *N*, D' et N' soient des polynômes en *A*.
Comme *D* et D' sont des polynômes en *A*, *D* et D' sont deux matrices diagonalisables qui commutent. D'après la question 14 $D - D'$ est diagonalisable. De la même façon avec la question 15, $N - N'$ est nilpotente. Or de $A = N + D = N' + D'$ on déduit $N - N' = D - D'$. Donc $N - N'$ est nilpotente et diagonalisable donc nulle d'après la question 16. Ainsi $N = N'$ puis $D = D'$. On a montré :

$\boxed{\text{La décomposition de Dunford d'une matrice à polynôme caractéristique scindé est unique.}}$

Partie IV : non continuité de l'application $A \mapsto D$

18 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a visiblement $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ et si *A* était diagonalisable elle serait semblable à I_2 qui n'est semblable qu'à elle-même. On aurait ainsi $A = \mathrm{I}_2$ ce qui est gênant. Donc A n'est pas diagonalisable. Or $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V}$, matrices toutes deux diagonalisables (la première car ayant 2 valeurs propres et étant de taille 2).
On vient d'exhiber un exemple de matrices appartenant à $\mathcal{D}$ dont la somme n'est pas dans $\mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque $n = 2$.
On obtient un contre-exemple plus général lorsque $n \ge 3$ en prenant (avec les décompositions par blocs) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable pour la même raison et $D_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{pmatrix}$ qui sont diagonalisables et de somme égale à *M*.
Finalement : $\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ lorsque } n \ge 2}$.
Par ailleurs pour *P* inversible, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et à ce titre continue.

19 – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que $\mathrm{Sp}(M) \ne \varnothing$.

1^er^ cas : si $\mathrm{Sp}(M)$ est un singleton

$\mathrm{Sp}(M)=\{\lambda\}$. On sait alors qu'il existe une matrice inversible P telle que $M=PTP^{-1}$ où T est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à λ. Soit $D=\mathrm{diag}(1,2,...,n)$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$: $T_k=T+\frac{1}{k}D$. T_k est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\lambda+\frac{1}{k},\lambda+\frac{2}{k},...,\lambda+\frac{n}{k}$; ceux-ci sont deux à deux distincts et donc T_k a n valeurs propres deux à deux distinctes et est à ce titre diagonalisable. Il s'en suit que $M_k=PT_kP^{-1}$ est diagonalisable. Or $\lim_{k\to+\infty}T_k=T$ donc avec la continuité de la question 19 : $\lim_{k\to+\infty}M_k=M$. On a écrit M comme limite d'une suite de matrices diagonalisables.

2^ième^ cas : si $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(M))\geq 2$

Soient alors $\lambda_1,...,\lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M ; il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T dont les coefficients diagonaux appartiennent à $\{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ telles que $M=PTP^{-1}$. On pose $r=\min_{1\leq i<j\leq p}\left|\lambda_i-\lambda_j\right|>0$. Soit $D=\mathrm{diag}\left(r,\frac{r}{2}...,\frac{r}{n}\right)$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$: $T_k=T+\frac{1}{k}D$ et $M_k=PT_kP^{-1}$. On a de la même façon $\lim_{k\to+\infty}M_k=M$. De plus les coefficients diagonaux de T_k s'écrivent $\lambda_{i_j}+\frac{jr}{kn}$ pour $j=1\cdots n$ et avec $i_j\in[\![1,r]\!]$.

Pour $1\leq m<\ell\leq n$ et $k\in\mathbb{N}^*$ on a $\left(\lambda_{i_\ell}+\frac{\ell r}{kn}\right)-\left(\lambda_{i_m}+\frac{mr}{kn}\right)=\left(\lambda_{i_\ell}-\lambda_{i_m}\right)+\frac{r(\ell-m)}{kn}$. Si $\lambda_{i_\ell}=\lambda_{i_m}$ la quantité ci-dessus est strictement positive, et sinon $\left|\lambda_{i_\ell}-\lambda_{i_m}\right|\geq r$ tandis que $0<\frac{r(\ell-m)}{kn}\leq\frac{r(n-1)}{n}<r$. Donc $\left(\lambda_{i_\ell}-\lambda_{i_m}\right)+\frac{r(\ell-m)}{kn}\neq 0$.

Ainsi les termes diagonaux de la matrice triangulaire T_k sont deux à deux distincts et T_k est diagonalisable et on termine comme dans le premier cas.

Ainsi dans tous les cas, pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de matrices diagonalisables qui converge vers M : $\boxed{\mathcal{D}\text{ est dense dans }\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

20 – On note tout d'abord que toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et donc une unique décomposition de Dunford. L'application φ de l'énoncé est donc bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question 2, si $A\in\mathcal{D}$ alors $\varphi(A)=A$ et donc :

$$\boxed{\text{La restriction de }\varphi\text{ à }\mathcal{D}\text{ est l'identité de }\mathcal{D}}.$$

Si φ était continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on aurait alors par densité $\varphi=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et la matrice de la question 4 fournit un exemple de matrice A telle que $\varphi(A)\neq A$. Donc : $\boxed{\varphi\text{ n'est pas continue sur }\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$