Programme de colle – MP1

Calcul différentiel

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f=(f_1,\dots,f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v=\mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a)=\mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a)\neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t)=x+tv$. Dérivation de $t\mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$
d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$, alors : $$f(b)-f(a)=\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t)=a+tv$ pour tout $t\in[0,1]$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$, $\partial_{j_1,\dots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\lVert h\rVert^2),$$ $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\lVert h\rVert^2).$$	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

Questions de cours

(i) **Exercices CCINP : 33, 52, 56, 57.**

Exercices CCINP

- **CCINP 33** : On pose : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

  1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
  2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
  3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

- **CCINP 52** : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
  On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

  1. Prouver que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
  2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
     (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
  3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
     (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
     (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
     (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

- **CCINP 56** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2.$$

  1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
  2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
  3. On pose $K=[0,1]\times[0,1]$.
     Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

- **CCINP 57** :
  1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
     (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
     (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
  2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

     (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
     (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.