Programme de colle – MP1

EDL

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)x' + b(t)x = c(t), \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t).$	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), e^a, \exp(A), e^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Remarque : la méthode de variations des constantes n'est plus au programme pour un système différentiel en général. Seule celle des EDL d'ordre 2 l'est désormais.

Révisions d'arithmétique sur $\mathbb{Z}$ (MP2I)

Voir programme page suivante.

Groupes monogènes, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments sur les groupes	
Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.	
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $x^n=e \iff d\mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m\wedge n=1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.

Questions de cours

(i) Générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.

(ii) Si $(G,*)$ est un groupe fini de neutre e, tous ses éléments sont d'ordre fini, leur ordre divise $|G|$ (cas commutatif) et pour tout $a\in G$, $a^{|G|}=e$.

(iii) Si p est premier et $k\in\mathbb{N}^*$, calcul de $\varphi\left(p^k\right)$, d'où une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de ses diviseurs premiers. Théorème d'Euler, d'où le petit théorème de Fermat.

(iv) **Théorème de Lagrange**

Soit $(G,*)$ un groupe fini, H un sous-groupe de G.

(a) Montrer que la relation définie par $x\mathcal{R}y \iff x^{-1}*y\in H$ est une relation d'équivalence sur G.
(b) Vérifier que les classes d'équivalence ont toutes le même cardinal.
(c) Démontrer le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.
(d) En déduire que l'ordre de tout élément de G divise l'ordre de G.

(v) **Exercices CCINP : 31, 32, 42, 66, 74, 75, 86, 94.**

Exercices CCINP

- **CCINP 31** :
  1. Déterminer une primitive de $x\longmapsto\cos^4 x$.
  2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=\cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

- **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
  1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
     Déterminer la somme des séries entières obtenues.
  2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

- **CCINP 42** : On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy'-3y=0 \qquad (H)$$

$$2xy'-3y=\sqrt{x} \qquad (E)$$

  1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
  2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
  3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

- **CCINP 74** :
  1. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.
     (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
     (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
  2. On considère le système différentiel $\begin{cases}x'=x+2z\\y'=y\\z'=2x+z\end{cases}$, x,y,z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
     En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

- **CCINP 75** : On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$.
  1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
  2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
     Trouver une base (v_1,v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$.
     On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
  3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases}x'=-x-4y\\y'=x+3y\end{cases}$.

- **CCINP 86** : Petit théorème de Fermat
  1. Soit $(a,b,p)\in\mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$, alors $p\wedge(ab)=1$.
  2. Soit p un nombre premier.
     (a) Prouver que $\forall k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
     (b) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n^p\equiv n\ [p]$.
     Indication : procéder par récurrence.
     (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1}\equiv 1\ [p]$.

- **CCINP 94** :
  1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
  2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c\in\mathbb{N}$. Prouver que : $(a|c$ et $b|c)\Longleftrightarrow ab|c$.
  3. On considère le système (S) : $\begin{cases}x\equiv 6 \mod(17)\\x\equiv 4 \mod(15)\end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
     (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
     (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Programme de MP2I

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $a \vee b$.
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
d) Nombres premiers	
Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	Crible d'Ératosthène.
Pour p premier, valuation p-adique. Valuation p-adique d'un produit.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
e) Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat.	Notation $a \equiv b\ [n]$. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.