# Programme de colle – MPI

## Probabilités

*Extrait du programme officiel :*

*Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :*

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

*La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).*

*La notion de variable à densité est hors programme.*

*La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.*

### b) Espaces probabilisés

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| Tribu sur un ensemble $\Omega$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.<br>Événements. | La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.<br>Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. |
| Probabilité sur un espace probabilisable, $\sigma$-additivité.<br>Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.<br>Continuité croissante, continuité décroissante. | Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand $n$ tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$ |
| Propriété de sous-additivité de $P$ pour une réunion dénombrable d'événements. | |
| Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr). | Systèmes quasi-complets d'événements.<br>Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme. |

### c) Probabilités conditionnelles et indépendance

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. | Notations $P_B(A), P(A\|B)$. |
| Par définition, les événements $A$ et $B$ sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. | Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de $A$ et $B$ s'écrit $P(A\|B) = P(A)$. |
| Famille d'événements indépendants.<br>Si $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi. | L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. |

### d) Espaces probabilisés discrets

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| Si $\Omega$ est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par $\Omega$ et de somme 1.<br>Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$. | Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.<br>Si $\Omega$ est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$. |

### e) Variables aléatoires discrètes

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| Une variable aléatoire discrète $X$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $E$ est une application définie sur $\Omega$, à valeurs dans l'ensemble $E$, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$. | Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$.<br>Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire $X$ est dite réelle.<br>Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle $X$. |
| Loi $P_X$ d'une variable aléatoire discrète $X$. | La loi de $X$ peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. |
| *Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.*<br>La probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. | |
| Notation $X \sim Y$. | La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que $X$ et $Y$ sont définies sur le même espace probabilisé. |
| Variable aléatoire $f(X)$.<br>Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.<br>Loi conditionnelle d'une variable aléatoire $X$ sachant un événement $A$. | |
| Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.<br>Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe. | Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.<br>Notation $P(X = x, Y = y)$.<br>Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |

### f) Variables aléatoires indépendantes

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes. | Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.<br>Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de $(X, Y)$ est le produit des distributions de probabilités de $X$ et $Y$. Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |
| Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes. | |
| Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ | Extension au cas de plus de deux variables. |
| Lemme des coalitions :<br>si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. | Extension au cas de plus de deux coalitions. |
| Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données. | La démonstration est hors programme.<br>Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli. |

### g) Lois usuelles

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Pour $p$ dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre $p$.<br>Variable géométrique de paramètre $p$. | Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$.<br>Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini. |
| Pour $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre $\lambda$.<br>Variable de Poisson de paramètre $\lambda$. | Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.<br>Interprétation en termes d'événements rares. |

### h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de $X$ est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\,P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.<br>Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. | Notation $\mathrm{E}(X)$. |
| Une variable aléatoire complexe $X$ est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de $X$.<br>Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.<br>Formule de transfert : soit $X$ une variable aléatoire discrète, $f$ une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X = x)$. | Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.<br>La notation $X \in L^1$ signifie que $X$ est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de $L^1$. |
| Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. | Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle. |
| Si $\|X\| \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.<br>Si $X$ et $Y$ sont dans $L^1$ et indépendantes, alors $XY$ est dans $L^1$ et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$ | Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |

### i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Si $\mathrm{E}\big(X^2\big) < +\infty$, $X$ est d'espérance finie. | La notation $X \in L^2$ signifie que $X^2$ est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de $L^2$. |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X$ et $Y$ sont dans $L^2$, $XY$ est dans $L^1$ et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\big(X^2\big)\,\mathrm{E}\big(Y^2\big)$. | Cas d'égalité. |
| Pour $X \in L^2$, variance et écart type de $X$. | Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites.<br>Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle. |
| Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big(X^2\big) - \mathrm{E}(X)^2$. | |
| Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. | Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. |
| Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.<br>Covariance de deux variables aléatoires de $L^2$.<br>Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.<br>Variance d'une somme de $n$ variables aléatoires, cas de variables décorrélées. | |

### j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Inégalité de Markov.<br>Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. | |
| Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$. | Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration. |

### k) Fonctions génératrices

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Fonction génératrice de la variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ : $G_X(t) = \mathrm{E}\big(t^X\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\,t^k$. | La série entière définissant $G_X$ est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de $G_X$. |
| Détermination de la loi de $X$ par $G_X$.<br>La variable aléatoire $X$ est d'espérance finie si et seulement si $G_X$ est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$. | La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.<br>Utilisation de $G_X$ pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.<br>Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. |
| Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. | |

## Fonctions vectorielles

*Extrait du programme officiel :*

*Les fonctions sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie $E$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Dérivabilité en un point** | |
| Dérivabilité en un point. | Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1.<br>Interprétation cinématique.<br>Traduction en termes de coordonnées dans une base. |
| Dérivabilité à droite et à gauche. | |
| **b) Opérations sur les fonctions dérivables** | |
| Combinaison linéaire de fonctions dérivables.<br>Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où $L$ est linéaire.<br>Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où $B$ est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où $M$ est multilinéaire.<br>Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où $\varphi$ est une fonction réelle de variable réelle et $f$ une fonction vectorielle.<br>Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. | Cas du produit scalaire, du déterminant. |
| **c) Intégration sur un segment** | |
| Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.<br>Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.<br>Pour $L$ linéaire, intégrale de $L(f)$.<br>Inégalité triangulaire $\left\Vert\int_a^b f\right\Vert \leqslant \int_a^b \Vert f\Vert$.<br>Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière. | Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. |
| **d) Intégrale fonction de sa borne supérieure** | |
| Dérivation de $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f$ continue.<br>Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. | |
| **e) Formules de Taylor** | |
| Formule de Taylor avec reste intégral.<br>Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.<br>Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. | |

Adaptation au cas vectoriel de l'étude des séries, des suites de fonctions, des séries de fonctions.

C'est l'occasion de réviser ces chapitres vus il y a quelques mois dans le cas numérique.

Les exponentielles de matrices et d'endomorphismes seront au programme la semaine prochaine.

## Révisions des EDL de MP2I

Voir programme page suivante.

**Semaine prochaine** : Exponentielles de matrices et d'endomorphismes. EDL. Groupes monogènes, arithmétique, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

### Questions de cours

(i) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : calcul de la fonction génératrice, on retrouve alors l'espérance et la variance.

(ii) Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

(iii) Dérivation de $u\circ f$ si $u$ est linéaire, de $B(f,g)$ si $B$ est bilinéaire.

(iv) (Révision MP2I) Solutions d'une équation différentielle scalaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants (énoncé seulement).
Forme d'une solution particulière lorsque le second membre s'écrit $P(t)e^{\lambda t}$ où $P$ est un polynôme (énoncé seulement).

(v) **CCINP 95 à 111**. (Énoncés page suivante)

## Extrait du programme de MP2I

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Équations différentielles linéaires du premier ordre** | |
| Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y'+a(x)y=b(x)$$ où $a$ et $b$ sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.<br>Ensemble des solutions de l'équation homogène.<br>Principe de superposition.<br>Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.<br>Méthode de la variation de la constante.<br>Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. | Équation homogène associée.<br>Cas particulier où la fonction $a$ est constante. |
| **Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants** | |
| Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y''+ay'+by=f(x)$$ où $a$ et $b$ sont des scalaires et $f$ est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle. | Équation homogène associée. |
| Ensemble des solutions de l'équation homogène. | Si $a$ et $b$ sont réels, description des solutions réelles. |
| Principe de superposition.<br>Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. | Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x\mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda)\in\mathbb{C}^2$, $x\mapsto B\cos(\omega x)$ et $x\mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega)\in\mathbb{R}^2$. |
| Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. | La démonstration de ce résultat est hors programme. |

## Exercices CCINP

- **CCINP 95** : Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
  1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
     On note $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
     On note $Y$ le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
     (a) Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.
     (b) Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.
  2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
     (a) Déterminer la loi de $X$.
     (b) Déterminer la loi de $Y$.

- **CCINP 96** : Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}, P(X=n)=p_n$. La fonction génératrice de $X$ est notée $G_X$ et elle est définie par $G_X(t)=E\left[t^X\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n t^n$.
  1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $G_X$.
  2. Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
     On pose $S=X_1+X_2$.
     Démontrer que $\forall t\in]-1,1[, G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ :
     (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
     (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t)=E\left[t^X\right]$.
     Remarque : on admetra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à $n$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On effectue $n$ tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
     On note $S_n$ la somme des numéros tirés.
     Soit $t\in]-1,1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de $S_n$.

- **CCINP 97** : Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par
  $$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$
  1. Déterminer les lois marginales de $X$ et de $Y$.
     Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
  2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

- **CCINP 98** : Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers $n$ correspondants distincts.
On admet que les $n$ appels constituent $n$ expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p$ $(p \in ]0,1[)$.
Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
  1. Donner la loi de $X$. Justifier.
  2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
     (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
     (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
     **Indication** : on pourra utiliser, sans le prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
     (c) Déterminer l'espérance et la variance de $Z$.

- **CCINP 99** :
  1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  2. Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que : $\forall a \in ]0,+\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
  3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
  À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ?
  **Indication** : considérer la suite $(Y_i)$ de variables aléatoires de Bernoulli où $Y_i$ mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

- **CCINP 100** : Soit $\lambda \in ]0,+\infty[$.
Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.
  1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R$ définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
  2. Calculer $\lambda$.
  3. Prouver que $X$ admet une espérance, puis la calculer.
  4. $X$ admet-elle une variance ? Justifier.

- **CCINP 101** : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau $A$, $B$ et $C$.
À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $A_n$ l'événement «l'animal est en $A$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note $B_n$ l'événement «l'animal est en $B$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note $C_n$ l'événement «l'animal est en $C$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.
  1. (a) Exprimer, en le justifiant, $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
     (b) Exprimer, de même, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
  2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
     (a) Justifier, sans calcul, que la matrice $A$ est diagonalisable.
     (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de $A$ et déterminer le sous-espace propre associé.
     (c) Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
     **Remarque** : le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé.
  3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.
  **Remarque** : aucune expression finalisée de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ n'est demandée.

- **CCINP 102** : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in ]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère $N$ variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p$.
  1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
  2. On considère la variable aléatoire $Y$ définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
     (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
     En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
     (b) Reconnaître la loi de $Y$. En déduire $E(Y)$.

- **CCINP 103** : **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
  1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
     Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
     On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
     Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
     (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
  2. Soit $p \in ]0,1]$. Soit $\lambda \in ]0,+\infty[$.
  Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
  On suppose que $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
  On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $X$ sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre $(m,p)$.
  Déterminer la loi de $X$.

- **CCINP 104** : Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de $n$ boules numérotées de $1$ à $n$ et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les $n$ boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les $n$ boules.
On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
  1. Préciser les valeurs prises par $X$.
  2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
     (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de $X$.
  3. (a) Calculer $E(X)$.
     (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

- **CCINP 105** :
  1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
  2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
  Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
     (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
     Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
     (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé $n$ fois et on obtient $n$ fois le chiffre $6$.
     Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?
     (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

- **CCINP 106** : $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in ]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables $U$ et $V$ définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.
  1. Déterminer la loi du couple $(U,V)$.
  2. Déterminer la loi marginale de $U$.
  On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
  3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de $V$.
  4. $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

- **CCINP 107** : On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.
L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
  - On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
  - On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
  - Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$.
  - Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.
  1. Calculer $p_1$.
  2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
  3. En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $p_n$.

- **CCINP 108** : Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$
  1. Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
  2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de $X$.
     (b) Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.
  3. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
  4. Calculer $P(X=Y)$.

- **CCINP 109** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches numérotées de 1 à $n$ et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note $Y$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
  1. Déterminer la loi de $X$.
  2. Déterminer la loi de $Y$.

- **CCINP 110** : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
  1. Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle $t$.
  On note $R_X$ son rayon de convergence.

     (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
     On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note $D_{G_X}$ l'ensemble de définition de $G_X$.
     Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

     Pour tout réel $t$ fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
     (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
  2. (a) On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
     Déterminer $D_{G_X}$ et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
     (b) Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
     Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

- **CCINP 111** : On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k \geqslant q} \dbinom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in ]-1,1[,\ \sum\limits_{k=q}^{+\infty} \dbinom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in ]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple $(X, Y)$ est donnée par

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
  2. (a) Déterminer la loi de $Y$.
     (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
     (c) Déterminer l'espérance de $Y$.
  3. Déterminer la loi de $X$.