CCP Maths 2 MP 2004

Préliminaires

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in [\![1,n]\!]$.

$$|[MX]_k| = \left|\sum_{j=1}^n m_{k,j}\, x_j\right| \underset{IT}{\leq} \sum_{j=1}^n \underbrace{|m_{k,j}|}_{\leq \frac{\|M\|}{n}} \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|X\|_\infty}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n}\|M\|\|X\|_\infty = \|M\| \times \|X\|_\infty .$$

Donc $\boxed{\|MX\|_\infty \leq \|M\| \times \|X\|_\infty .}$

---

2. a) $\forall M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{N}(M)$ est un réel bien défini.

Remarquons que $\mathcal{N}(M) = \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right\|_\infty$ où $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_\beta(M) \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$

- On a alors que $\forall M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{N}(M) \geq 0$ et

$$\mathcal{N}(M) = 0 \underset{\|\cdot\|_\infty \text{ norme}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_\beta(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} .$$

- $\forall M \in \mathcal{M}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{N}(\lambda M) = \|\mathrm{Mat}_\beta(\lambda M)\|_\infty = \|\lambda\, \mathrm{Mat}_\beta(M)\|_\infty \underset{\|\cdot\|_\infty \text{ norme.}}{=} |\lambda| \times \|\mathrm{Mat}_\beta(M)\|_\infty = |\lambda|\mathcal{N}(M)$$

- $\forall M, N \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{N}(M+N) = \|\mathrm{Mat}_\beta(M+N)\|_\infty = \|\mathrm{Mat}_\beta(M) + \mathrm{Mat}_\beta(N)\|_\infty$$

$$\underset{\|\cdot\|_\infty \text{ norme}}{\leq} \|\mathrm{Mat}_\beta(M)\|_\infty + \|\mathrm{Mat}_\beta(N)\|_\infty = \mathcal{N}(M) + \mathcal{N}(N) .$$

Donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ est une norme sur } \mathcal{M}.}$

---

2. b) Il s'agit de $\boxed{\text{l'équivalence des normes}}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de <u>dimension finie</u> $\mathcal{M}$.

c) D'après la question précédente,

$$\boxed{M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{\|.\|} 0} \iff M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{\mathcal{N}} 0$$

$$\iff \left\| \begin{pmatrix} x_p(1) \\ \vdots \\ x_p(d) \end{pmatrix} \right\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

$$\iff \boxed{\forall k \in [\![1,d]\!],\ x_p(k) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

d'après le cours. Se retrouve avec
$\forall k \in [\![1,d]\!],\ |x_p(k)| \leq \mathcal{N}(M_p) \leq \sum_{k=1}^{d} |x_p(k)|$.

1 - Une relation d'équivalence sur C^∞_I

3. a) Comme $f \in \mathcal{C}^k(I)$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégrale en λ :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k}_{=0 \text{ par hypothèses.}} + \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)\,du}$$

b) On effectue un changement de variable affine pour se ramener sur $[0,1]$ en posant, pour $x \neq \lambda$,

$$t = \frac{u-\lambda}{x-\lambda} \quad \text{i.e} \quad u = (x-\lambda)t + \lambda.$$

Alors $\forall x \neq \lambda$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{[(x-\lambda)(1-t)]^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((x-\lambda)t+\lambda)\,(x-\lambda)\,dt$

$$= (x-\lambda)^\ell \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((x-\lambda)t+\lambda)\,dt}_{=h(x)}$$

et on pose

$$h(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(\lambda)\,dt = \frac{f^{(\ell)}(\lambda)}{\ell!}.$$

Il reste à vérifier que $h \in C^\infty_I$.

Soit $g : \left| \begin{array}{l} I \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \dfrac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((x-\lambda)t+\lambda) \end{array} \right.$

On a alors

H1 - $\forall t \in [0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I car f l'est.

H2 - $\forall x \in I$, $t \mapsto g(x,t)$ intégrable sur $[0,1]$ car fonction continue sur un segment.

H3 - $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k} : (x,t) \mapsto \dfrac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \times t^k \times f^{(\ell+k)}((x-\lambda)t+\lambda)$

avec pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in [a,b] \subset I$

$$\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \phi(t) = \frac{1}{(\ell-1)!} \times \underbrace{\sup_{[\min(a,\lambda),\, \max(b,\lambda)]} |f^{(\ell+k)}|}_{\text{existe bien car } f^{(\ell+k)} \text{ est continue sur ce segment.}}$$

avec ϕ intégrable sur $[0,1]$.

Donc, par théorème, $\boxed{h \in \mathcal{C}^\infty_I}$.

et $\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = (x-\lambda)^\ell h(x).}$

---

4. a) On a $f = g + h\Pi_A$. avec $\Pi_A = \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{m_j}$

Soit $j \in [\![1,r]\!]$ et $k \in [\![0, m_j - 1]\!]$.

On a alors $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j) + (h\Pi_A)^{(k)}(\lambda_j)$

Avec $(h\Pi_A)^{(k)}(\lambda_j) \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} h^{(k-p)}(\lambda_j) \times \underbrace{\Pi_A^{(p)}(\lambda_j)}_{=0 \text{ car } \lambda_j \text{ racine d'ordre } m_j > k \geqslant p} = 0$

Donc $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$ et on a bien

$$\boxed{f \underset{A}{=} g.}$$

---

b) Comme $f \underset{A}{=} g$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_j-1]\!]$, $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$

ie $(f-g)^{(k)}(\lambda_j) = 0$

Appliquons la question 3 avec $j=1$:

on a $h_1 \in \mathcal{C}^\infty_I$ telle que

$$\forall x \in I,\ (f-g)(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} h_1(x).$$

Comme, $\forall k \in [\![0, m_2-1]\!]$,

$$(f-g)^{(k)}(\lambda_2) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)^{m_1-k+p}}_{\neq 0} h_1^{(p)}(\lambda_2) = 0$$

On tire, pour $k=0$, $h_1(\lambda_2)=0$

puis pour $k=1$, $0 = (\lambda_2-\lambda_1)^{m_1-1} h_1(\lambda_2) + (\lambda_2-\lambda_1)^{m_1} h_1'(\lambda_2)$

donne $h'(\lambda_2) = 0$

etc. jusqu'à, pour $k = m_2 - 1$,

$$0 = 0 + (\lambda_2-\lambda_1)^{m_1} h_1^{(m_2-1)}(\lambda_2) = 0$$

qui donne $h_1^{(m_2-1)}(\lambda_2) = 0$.

On applique alors la question 3 à h_1 et on obtient $h_2 \in C^\infty_I$ telle que $\forall x \in I$, $(f-g)(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} h_2(x)$

En réitérant avec $\lambda_3, \dots, \lambda_r$, on finit par obtenir

$\boxed{h \in C^\infty_I}$ telle que $\forall x \in I$, $(f-g)(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{m_i} h(x)$

ie $\boxed{f = g + h\Pi_A}$

5 — $\boxed{P \underset{A}{=} Q} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont racines de $P-Q$ d'ordre au moins $m_1, \dots, m_r$

$\iff \Pi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$ divise $P-Q$

$\iff \boxed{\exists H \in \mathbb{R}[X], \quad P = Q + H \times \Pi_A}$

2 — Définition de la matrice $f(A)$

6 — φ est linéaire par linéarité de la dérivation et de l'évaluation.

De plus, $\dim(\mathbb{R}_{m-1}[X]) = m = \dim(\mathbb{R}^m)$.

Il suffit donc de prouver l'injectivité de φ.

Or, si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi(P) = (0, \dots 0)$,

et on a $\deg P \leq m-1$ et $P \underset{A}{=} 0_{\mathbb{R}[X]}$

D'après la question précédente, on a $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\underbrace{P}_{\deg < m} = H \times \underbrace{\Pi_A}_{\deg = m} \qquad \text{donc } H = 0_{\mathbb{R}[X]} = P.$$

Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$: $\boxed{\varphi \text{ est bijective.}}$

7 — Si $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$,

$$f \underset{A}{=} P \iff \varphi(P) = \underbrace{\left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1)\right)_{0 \leq k_1 \leq m_1 - 1}, \dots, \left(f^{(k_r)}(\lambda_r)\right)_{0 \leq k_r \leq m_r - 1} \right)}_{\text{famille notée } \mathcal{F}_{f,A}}$$

$\iff P = \varphi^{-1}(\mathcal{F}_{f,A})$

D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } P_f \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \text{ tel que } f \underset{A}{=} P_f.}$

8_ Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

Alors $\forall x \in I,\ (f-P)(x) = 0$

Donc $\forall \lambda \in I,\ \forall k \in \mathbb{N},\ (f-P)^{(k)}(\lambda) = 0$

Donc $f \underset{A}{=} P$.

Par division euclidienne de P par Π_A, on a $Q, R \in \mathbb{R}[X]$

tel que $\begin{cases} P = Q\Pi_A + R \\ \deg R \leq m-1 \end{cases}$ (car $m = \deg \Pi_A$).

Vu 5, $P \underset{A}{=} R$ et donc $f \underset{A}{=} R$.

Alors, par unicité, $R = P_f$

et $f(A) \underset{\text{def}}{=} P_f(A) = R(A) = P(A)$ car $Q(A)\Pi_A(A) = 0$.

Finalement, $\boxed{f(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k.}$

---

9 a) $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

annule A par théorème de Cayley-Hamilton.

Donc $\Pi_A \in \{X-1, (X-1)^2\}$ (car $\deg \Pi_A \geq 1$)

Or $A \neq I_3$ donc $\boxed{\Pi_A = (X-1)^2.}$

---

b) (1) $f : x \mapsto ax + b$

D'après 8, $\boxed{f(A) = aA + bI_2 = \begin{pmatrix} 5a+b & -4a \\ 4a & -3a+b \end{pmatrix}}$

(2) $f : x \mapsto \sin(\pi x)$

On cherche l'unique $P_f \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$\begin{cases} P_f(1) = f(1) = \sin \pi = 0 \\ P_f'(1) = f'(1) = \pi \cos \pi = -\pi \end{cases}$$

(car $\pi_A = (X-1)^2$ donc $m = 2$, $r = 1$, $m_1 = 2$ et $\lambda_1 = 1$)

Donc $P_f = \lambda(X-1)$ et $P_f'(1) = \lambda = -\pi$

donc $P_f = \pi(1-X)$.

Par définition, $\boxed{\sin(\pi A) = \pi(I_2 - A) = \begin{pmatrix} -4\pi & 4\pi \\ -4\pi & 4\pi \end{pmatrix}.}$

---

(3) $f : x \mapsto (x-1)^2 g(x)$

On cherche $P_f \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$\begin{cases} P_f(1) = f(1) = 0 \\ P_f'(1) = f'(1) = 0 \end{cases}$$

Donc $P_f = (X-1)^2 = \pi_A$.

Donc $\boxed{f(A) = \pi_A(A) = 0_2.}$

3_ Calcul systématique de $f(A)$

10_ Comme vu en 7,

$$P_f = \varphi^{-1}\left[\left(\left(f^{(k)}(\lambda_j)\right)_{0 \leq k \leq m_j - 1}\right)_{1 \leq j \leq r}\right]$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq k \leq m_j - 1}} f^{(k)}(\lambda_j) \underbrace{\varphi^{-1}(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posi° de } f^{(k)}(\lambda_j)}}{1}, 0, \dots, 0)}_{\text{défini comme } Q_{j,k}}$$

$Q_{j,k}$ est donc l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$

tel que $\forall j' \in [\![1,r]\!], \forall k' \in [\![0, m_{j'}-1]\!], \quad Q_{j,k}^{(k')}(\lambda_{j'}) = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$

Ce qui assure $\boxed{\text{l'existence des } Q_{j,k}.}$

Pour $\boxed{\text{l'unicité,}}$ on peut remarquer que nécessairement, si une autre famille de polynôme $(R_{j,k})$ convient, en appliquant la relation aux $f = Q_{j,k}$, on obtient

$\forall j \in [\![1,r]\!], \forall k \in [\![0, m_j-1]\!]$,

$$R_{j,k} = P_{Q_{j,k}} = Q_{j,k} \text{ par unicité car } \deg Q_{j,k} \leq m-1$$
$$\text{et } Q_{j,k} \underset{A}{=} P_{Q_{j,k}} \text{ par déf.}$$

11_ On a déjà, par définition,

$$\boxed{\forall f \in C^\infty_I, \quad f(A) = P_f(A) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) \underbrace{Q_{j,k}(A)}_{= Z_{j,k}}}$$

Reste à voir $\boxed{\text{l'indépendance linéaire.}}$

Or, si on a une combinaison linéaire

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \mu_{j,k} Z_{j,k} = 0_n, \text{ le polynôme}$$

$P = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \mu_{j,k} Q_{j,k}$ annule A et $\deg P \leq \max(\deg(Q_{j,k})) \leq m-1$

donc $\deg P < \deg \Pi_A$. C'est donc que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Or les $Q_{j,k}$ forment une famille libre comme image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ donc $\forall j,k, \mu_{j,k} = 0$.

12 – a) L'existence de Z_1 et Z_2 est donnée par 11 avec ici $\Pi_A = (X-1)^2$.

---

b) Avec $f : x \mapsto x-1$, d'après 8,

$$f(A) = A - I_2 = 0 \times Z_1 + 1 \times Z_2$$

donc $\boxed{Z_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$.

Avec $f : x \mapsto 1$, $f(A) = I_2 = 1 \times Z_1 + 0 \times Z_2$

donc $\boxed{Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

---

c) $A^{2004} = 1^{2004} Z_1 + 2004 . 1^{2003} Z_2$ $\quad\left[f : x \mapsto x^{2004} \in \mathcal{C}_I^\infty\right]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2004 \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{A^{2004} = \begin{pmatrix} 8017 & -8016 \\ 8016 & -8015 \end{pmatrix}}$.

$\sqrt{A} = \sqrt{1} Z_1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} Z_2$ $\quad\left[f : x \mapsto \sqrt{x} \in \mathcal{C}_I^\infty\right]$

donc $\boxed{\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$

$A^\alpha = 1^\alpha Z_1 + \alpha \times 1^{\alpha-1} Z_2$ $\quad\left[f : x \mapsto x^\alpha \in \mathcal{C}_I^\infty\right]$

donc $\boxed{A^\alpha = \begin{pmatrix} 4\alpha+1 & -4\alpha \\ 4\alpha & 1-4\alpha \end{pmatrix}}$

– On retrouve aussi que

$$\sin(\pi A) = \sin(\pi) Z_1 + \pi\cos(\pi) Z_2 = -\pi Z_2 = \begin{pmatrix} -4\pi & 4\pi \\ -4\pi & 4\pi \end{pmatrix}$$

et si $f : x \mapsto (x-1)^2 g(x)$,

$$f(A) = 0 \times Z_1 + 0 \times Z_2 = 0_2 .\ ]$$

---

13. a) On calcule

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ -2 & \lambda+2 & -1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-1)L_1}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \times \begin{vmatrix} 1 & -1-2\lambda \\ 1 & \lambda^2-\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \times (\lambda^2 - \lambda - 1 + 1 + 2\lambda)$$

$$= \lambda^2(\lambda+1)$$

Donc $\chi_A = X^2(X+1)$ annule A (par thm de Cayley-Hamilton)

donc $\Pi_A \in \{X(X+1), X^2(X+1)^2\}$ car Π_A diviseur unitaire de χ_A
$X^2(X+1), X(X+1)^2$ ayant les mêmes racines.

Or $A(A+I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & (*) \end{pmatrix} \neq 0_3$

$$A^2(A+I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\Pi_A = X^2(X+1)}$ Comme Π_A n'est pas simplement scindé,

$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

---

b) $\forall f \in C^\infty_I$, $f(A) = f(0) Z_{1,0} + f'(0) Z_{1,1} + f(-1) Z_{2,0}$

Avec $f : x \mapsto x(x+1)$, on obtient $A(A+I_3) = \boxed{Z_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

11

Avec $f : x \mapsto x^2$, $A^2 = \boxed{Z_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Avec $f : x \mapsto x^2-1$, $A^2 - I_3 = -Z_{1,0}$ donc $\boxed{Z_{1,0} = I_3 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

$$\forall f \in C^\infty_I, \quad f(A) = \begin{pmatrix} f(0)+f'(0) & -f'(0) & f'(0) \\ f(0)+f'(0)-f(-1) & f(-1)-f'(0) & f'(0) \\ f(0)-f(-1) & f(-1)-f(0) & f(0) \end{pmatrix}.$$

4– Calcul fonctionnel sur A :

14\. a) On a $\alpha P_f \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ et

$\alpha f \underset{A}{=} \alpha P_f$ donc $\boxed{P_{\alpha f} = \alpha P_f}$ par unicité.

De même, $P_f + P_g \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$

et $f+g \underset{A}{=} P_f + P_g$ par linéarité de la dérivation

donc $\boxed{P_{f+g} = P_f + P_g}$ par unicité

[$\forall j \in [\![1,r]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_j-1]\!]$,

$$(\alpha P_f)^{(k)}(\lambda_j) = \alpha P_f^{(k)}(\lambda_j) = \alpha f^{(k)}(\lambda_j) = (\alpha f)^{(k)}(\lambda_j)$$

$$(P_f+P_g)^{(k)}(\lambda_j) = P_f^{(k)}(\lambda_j) + P_g^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j) + g^{(k)}(\lambda_j)$$
$$= (f+g)^{(k)}(\lambda_j).]$$

---

b) $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_j-1]\!]$,

$$P_{fg}^{(k)}(\lambda_j) = (fg)^{(k)}(\lambda_j) \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)}(\lambda_j)\, g^{(k-p)}(\lambda_j)$$
$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} P_f^{(p)}(\lambda_j) P_g^{(k-p)}(\lambda_j) \overset{\text{Leibniz}}{=} (P_f \times P_g)^{(k)}(\lambda_j)$$

donc $P_{fg} \underset{A}{=} P_f \times P_g$.

D'après 5., $\boxed{\exists H \in \mathbb{R}[X],\ P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A.}$

---

15. a) En utilisant 14, si $f, g \in C^\infty_I$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$S(f+\alpha g) = P_{f+\alpha g}(A) = P_f(A) + \alpha P_g(A) = S(f) + \alpha S(g)$$

, $\underbrace{S(x \mapsto 1)}_{\text{unité de } C^\infty_I} = [1](A) = \underbrace{I_3}_{\text{unité de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

, $S(fg) = P_{fg}(A) = P_f(A)P_g(A) + H(A)\underbrace{\Pi_A(A)}_{=O_n} = S(f)S(g)$

Donc $\boxed{S \text{ morphisme de } \mathbb{R}\text{-algèbres.}}$

---

b) $S(f) = O_n \iff P_f(A) = O_n \iff P_f = O_{\mathbb{R}[X]}$ (car $\deg P_f < \deg \Pi_A$)

$\iff f \underset{A}{=} 0$

$\iff \exists h \in C^\infty_I,\ f = h\Pi_A$ d'après 4.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(S) = \{h \times \Pi_A,\ h \in C^\infty_I\}.}$

---

16. a) $\cos^2 A + \sin^2 A = S(\cos^2) + S(\sin^2)$

$= S(\cos^2 + \sin^2)$

$= S(1)$

$= [1](A)$

donc $\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = I_3}$

---

b) $(\sqrt{A})^2 = S(\sqrt{\cdot}) \times S(\sqrt{\cdot}) = S(\sqrt{\cdot}^2) = S(id) = X(A)$

donc $\boxed{(\sqrt{A})^2 = A}$

$$A \times \frac{1}{A} = S(\mathrm{id}) \times S\left(\frac{1}{\cdot}\right)$$
$$= S\left(x \mapsto x \times \frac{1}{x}\right)$$
$$= S(1)$$
$$= I_3$$

donc $\boxed{\frac{1}{A} = A^{-1}}$ (A étant bien inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}A$).

---

17. $\mathcal{M}_A = S(C^\infty_I)$ $\boxed{\text{sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

comme image de l'algèbre commutative C^∞_I par le morphisme d'algèbre S (sous-espace vectoriel + sous-anneau)

D'après 11, $\mathcal{M}_A \subset \mathrm{Vect}\,(Z_{j,k})_{\substack{1\le j\le r \\ 0\le k\le m_j-1}}$

[Réciproquement, pour toute famille $(\mu_{j,k})_{\substack{1\le j\le r \\ 0\le k\le m_j-1}}$ on peut trouver une fonction f de C^∞_I (par exemple polynomiale avec 6. : $f = \varphi^{-1}\left[(\mu_{j,k})_{j,k}\right]$ convient) telle que $f(A) = P_f(A) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \mu_{j,k} Z_{j,k}$.]

Beaucoup plus simplement,

$\forall j \in [\![1,r]\!], \forall k \in [\![0, m_j-1]\!],\ Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \in \mathcal{M}_A$.

Donc $\underset{(\text{sev})}{\mathcal{M}_A} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(Z_{j,k})}_{\text{libre par 11.}}$ donc

les ~~m~~ matrices $Z_{j,k}$ forment une base de $\mathcal{M}_A$: $\boxed{\dim \mathcal{M}_A = m = \deg \Pi_A}$

8. Si $f(A) = P_f(A)$ est inversible, son inverse (14)

est un polynôme en $f(A) = B$.

En effet, on dispose d'un polynôme annulateur non nul de P : $a_p X^p + \dots + a_N X^N$ avec $a_p \neq 0$ et $a_N \neq 0$ $(p \leq N)$

alors $a_p B^p + \dots + a_N B^N = 0_n$ et $B^{-1} = -\frac{a_{p+1}}{a_p} I_3 - \frac{a_{p+2}}{a_p} B - \dots - \frac{a_N}{a_p} B^{N-p+1}$

Notons $c_k = -\frac{a_{k+p+1}}{a_p}$ et $d = N-p+1$

Alors $B^{-1} = c_0 I_3 + c_1 B + \dots + c_d B^d$

$= c_0 I_3 + c_1 f(A) + \dots + c_d (f(A))^d$

$= \underbrace{(c_0 \, id_{\mathbb{R}} + c_1 f + \dots + c_d f^d)}_{\in C^\infty_I}(A)$ vu le morphisme S

donc $\boxed{(f(A))^{-1} \in \mathcal{M}_A}$

19