CCINP Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Carnot – Dijon

Mai 2021

EXERCICE I

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in]0,1] \mapsto t^{2k}\ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$ et $|f_k(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\dfrac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, $\boxed{f_k \text{ est intégrable sur }]0,1].}$

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k}\ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln\varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 et par croissances comparées, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}.}$

Q2. f est continue et positive sur $]0,1[$ et, de nouveau, $f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.

Puis, avec $t = 1+h$, $f(t) = f(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{(2+h)h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{2h} = \dfrac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$

Puis, pour $t \in]0,1[$, $t^2 \in]-1,1[$ donc $\dfrac{1}{1-t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifions l'interversion série intégrale par le théorème de convergence N_1 :

H1. La série de fonction $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ qui est continue sur $]0,1[$.

H2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question **Q1** car négative et d'intégrale convergente.

H3. Avec **Q1**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^2}$ avec $\sum \dfrac{1}{k^2}$ convergente en tant que série de Riemann avec $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).

Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.}$

EXERCICE II

Q3. ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\ln'' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$ donc $\boxed{\text{ln est concave sur }]0,+\infty[.}$

L'inégalité de Jensen appliquée à $a, b, c \in]0,+\infty[$ avec des poids tous égaux à $\dfrac{1}{3}$ donne alors

$$\ln \frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

donc, par croissance de l'exponentielle, $\boxed{\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}.}$

Q4. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ par opérations et pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{y^2 x}.$$

Les points critiques sont donc les points $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ vérifiant $x^2y = xy^2 = 1$ soit $x = y$ et $xy^2 = 1$: $\boxed{\text{il y a un unique point critique, } (1,1).}$

On calcule $f(1,1) = 3$ et en appliquant la **Q3**, on a pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $f(x,y) \geqslant 3\sqrt[3]{x \cdot y \cdot \dfrac{1}{xy}} = 3 = f(1,1)$.

Donc $\boxed{f \text{ présente un minimum global en } (1,1) \text{ qui vaut } 3.}$

PROBLÈME

Partie I

Q5.
```python
def factorielle(n) :
    fact = 1
    for i in range(2, n + 1):
        fact *= i
    return fact
```

ou bien, récursivement,

```python
def factorielle(n) :
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorielle(n - 1)
```

Q6. $\dbinom{30}{10} = \dfrac{30!}{10!\,20!}$ ce qui représente $\boxed{30 + 10 + 20 + 1 = 61 \text{ multiplications}}$ (ce que semble attendre le sujet vu ce qui suit même si ma première version de `factorielle(n)` n'effectue que $n-1$ multiplications pour $n \geqslant 2$).

En remarquant que $\dbinom{30}{10} = \dfrac{30 \times 29 \times \cdots \times 21}{10!}$, $\boxed{\text{on ramène le nombre de multiplications à } 20}$ (ou, plus exactement, à 17).

Enfin, si on remplace `/` par `//`, $\boxed{\text{on obtient un résultat de type float.}}$

Q7. Soit $n \geqslant p \geqslant 1$.

1^re méthode $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n}{p}\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}$ donc $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}.}$

2^e méthode On dénombre les couples (k, A) où A partie à p éléments de E de cardinal n et $k \in A$ de deux manières différentes :

- soit on choisit d'abord k dans E puis $A \setminus \{k\}$ partie à $p-1$ éléments de $E \setminus \{k\}$ ce qui donne $n\dbinom{n-1}{p-1}$ couples possibles,
- soit on choisit d'abord A puis k élément de A ce qui donne $\dbinom{n}{p}p$ couples possibles.

Et donc, finalement, $\boxed{n\dbinom{n-1}{p-1} = \dbinom{n}{p}p.}$

```python
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p      # Attention à la position du // p !!!
```

Ce n'est pas demandé dans le sujet, mais on peut optimiser le calcul en remarquant que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

```python
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    if n - p < p:
        return binom_rec(n, n - p)
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p
```

Q8.
```python
def bernoulli(n):
    b = [1]  # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        b.append(-sum(binomial(p + 1, k) * b[k] for k in range(p)) / (p + 1))
        # On calcule b_p et on l'ajoute à sa place, au bout de b.
    return b[-1]
```

Si l'on ne souhaite pas utiliser `sum` :

```python
def bernoulli(n):
    b = [1]  # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        bp = 0
        for k in range(p):
            bp += binomial(p + 1, k) * b[k]
        b.append(-bp / (p + 1))
    return b[-1]
```

Partie II

Q9. Soit $a > 1$ et $\gamma \in]1, a[$. Comme $0 \leqslant \frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ car, par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n^{a-\gamma}} \to 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\boxed{\sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$

Q10. **H1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et $f_n' : x \mapsto -\frac{\ln n}{n^x}$.

H2. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme série de Riemann convergente.

H3. Soit $a > 1$. Pour tout $x \geqslant a$, $|f_n'(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, indépendant de x.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Ainsi, par théorème de transfert de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[}$ et $\zeta' : x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \leqslant 0$ donc $\boxed{\zeta \text{ décroît.}}$

Q11. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1,+\infty[$, le théorème de la double limite s'appliquerait au voisinage de 1 et en particulier $\sum \lim\limits_{1^+} f_n = \sum \dfrac{1}{n}$ convergerait ce qui est contradictoire.

$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1,+\infty[.}$

Q12. Par contre $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[2,+\infty[$ car si $x \geqslant 2$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ terme général de série convergente indépendant de x.

Le théorème de la double limite peut donc s'appliquer, avec $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \delta_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,1} = 1.}$$

Q13. Soit $x>1$. $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x>1$, $\boxed{I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x)+1.}$

Or $I(x) = \left[\dfrac{1}{(-x+1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x-1}$, donc $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}+1$ et $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant 1+(x-1)$ donc $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x\to1]{} 1$ par encadrement et enfin $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}.}$

Q14. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n.
$\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A} = \left(\dfrac{1}{a^x} \times \dfrac{1}{b^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est une « suite double produit » $\boxed{\text{sommable}}$ car les séries $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{a^x}$ et $\sum\limits_{b\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire $\boxed{\text{de somme } \zeta(x)^2.}$ En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{b\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\dfrac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\zeta(x)}{a^x}$ converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n = \{(a,b)\in A,\ ab=n\}$, et alors $\boxed{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*}$ et les $\boxed{A_n \text{ sont deux à deux disjoints.}}$

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b)\in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a,b)\in\mathbb{N}_*^2,\ n=ab\}| = \left|\left\{\left(a,\dfrac{n}{a}\right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n\right\}\right| = d_n$.

Finalement, $\boxed{\zeta(x)^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n^x}.}$

Partie III

Q15. Comme $(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} (X=ak)$, on a par σ-additivité,

$$P(X\in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)a^s k^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)a^s}$$

donc $\boxed{P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}.}$

Q16. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a directement que si $a_1, \ldots, a_n$ divise N, alors chacun des a_i divise N sans hypothèse de primalité relative.

On montre l'autre sens par récurrence simple. Soit, pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$: « Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors $a_1 \cdots a_n$ divise N. ».

- Pour $n = 2$, montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée. Soient a_1 et a_2 des diviseurs de n premiers entre eux. On a $k \in \mathbb{N}$ tel que a_2 divise $N = a_1 k$. Comme $a_1 \wedge a_2 = 1$, par lemme de Gauß, a_2 divise k donc $a_1 a_2$ divise N.
- Soit un $n \geqslant 2$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux.

  Comme $a_1, \ldots, a_n$ sont des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux, par hypothèse de récurrence, $a_1 \cdots a_n$ divise N.

  Mais $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux : en effet, aucun des a_i pour i entre 1 et n n'a de diviseur premier en commun avec a_{n+1} donc $a_1 \cdots a_n$ ne peut en avoir lui aussi.

  Ainsi, $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont deux diviseurs premiers entre eux de N, donc d'après le cas $n = 2$, $a_1 \cdots a_{n+1}$ divise N, ce qui établit la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{si } a_1, \ldots, a_n \text{ sont premiers entre eux deux à deux, ils divisent } N \text{ si et seulement leur produit divise } N.}$

Le résultat n'est plus valable si on suppose seulement $a_1, \ldots, a_n$ premiers entre eux dans leur ensemble comme on le voit avec le contre-exemple : $\boxed{6, 10, 15}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun diviseur premier en commun) mais pas deux à deux, ils divisent tous 30, mais pas leur produit.

Q17. Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux deux à deux, et $(b_1, \ldots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \ldots, a_n)$ (avec $1 \leqslant r \leqslant n$), ils sont eux aussi deux à deux premiers entre eux donc la question précédente s'applique et

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{r} (X \in b_k\mathbb{N}^*)\right) &= P(b_1|X, \ldots, b_r|X) \underset{\textbf{Q16}}{=} P(b_1 \cdots b_r|X) = P(X \in b_1 \cdots b_r\mathbb{N}^*) \\ &\underset{\textbf{Q15}}{=} \frac{1}{(b_1 \cdots b_r)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{b_k^s} \underset{\textbf{Q15}}{=} \prod_{k=1}^{r} P(X \in b_k\mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

donc, par définition, $\boxed{\text{les } ([X \in a_k\mathbb{N}^*])_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ sont mutuellement indépendants.}}$

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ par définition de B_n. Or les $([X \notin p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants en tant que complémentaires des $([X \in p_k\mathbb{N}^*])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ qui sont mutuellement indépendants d'après **Q17**.

Donc $\boxed{P(B_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) \underset{\textbf{Q15}}{=} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).}$

Q19. Soit $\omega \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Alors $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ divisible par aucun nombre premier : $\boxed{X(\omega) = 1,}$ et la réciproque est vraie. Donc $P\left(\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = P(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

Or $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$P(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Vu la question précédente, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \zeta(s).}$

Q20. On suppose par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_k}$ converge. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ car $p_k \to +\infty$ (par exemple parce que $p_k \geqslant k$), par comparaison de séries à termes généraux positif, $\sum_k \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, on a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.

Soit $s > 1$. On a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_k \leqslant p_k^s$ donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \geqslant 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, $\boxed{\forall\, s > 1, \quad \ell \geqslant \zeta(s).}$

Mais $\zeta(s) \xrightarrow[s \to 1]{} +\infty$ d'après **Q13** et on obtient une contradiction.

C'est donc que $\boxed{\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$

Fin du corrigé