28

Calcul différentiel et optimisation

Extrait du programme officiel :

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les objectifs de cette section sont les suivants :

— *généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$;*
— *donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.*

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\ldots,x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f=(f_1,\ldots,f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v=\mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a)=\mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a)\neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\ldots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\ldots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t)=x+tv$. Dérivation de $t\mapsto f(x_1(t),\ldots,x_n(t))$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$

d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Contenus	Capacités & Commentaires
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0)=a, \gamma(1)=b$, alors : $$f(b)-f(a)=\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t)=a+tv$ pour tout $t\in[0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon>0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0)=x, \gamma'(0)=v$.	Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x\in X$ et $\mathrm{d}g(x)\neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Point critique d'une application différentiable.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x\in X$et $\mathrm{d}g(x)\neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\dots\partial x_{j_1}}$,$\partial_{j_k}\dots\partial_{j_1}f$,$\partial_{j_1,\dots,j_k}f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\Vert h\Vert^2),$$ $$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\Vert h\Vert^2).$$	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

Plan du cours

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie nulle, $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de E.

I Dérivées partielles

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

Définition 1 : Application partielle

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle **je application partielle de f en a** l'application $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$.

Remarque

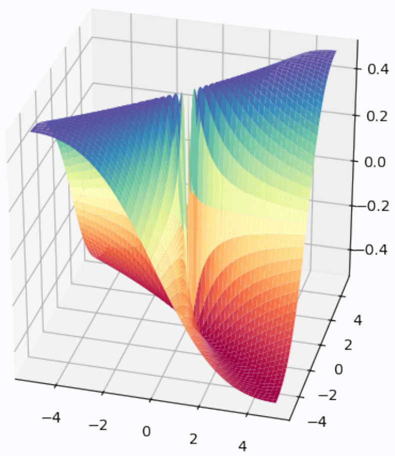
R 1 – Si $f : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \in F$ est une fonction de n variables, la continuité des applications partielles $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$ (les x_j pour $j \neq i$ étant fixés) ne garantit pas celle de f.

Exemple

E 1 –

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a des applications partielles $x \mapsto f(x, 0) = 0$ et $y \mapsto f(0, y) = 0$ continue en 0, mais est discontinue en $(0, 0)$ car $f(x, x) \not\to 0$.



Lemme 1 : « de partition »

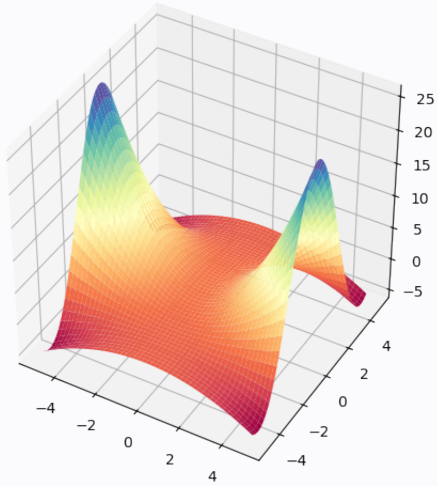
Soit A une partie de E, $f : A \to F$, B_1, B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cup B_2 = A$, $a \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, $\ell \in F$.
Si $f_{|B_1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f_{|B_2}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
En particulier, si $a \in A$, f est continue en a.

Exemple

E 2 –

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.



2 Dérivées partielles

$\mathscr{U}$ est toujours un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Remarque

R 2 – Le domaine de définition d'une application partielle peut être compliqué, mais c'est toujours un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle **j^e dérivée partielle de f en a**, lorsqu'elle existe, la dérivée de la j^e application partielle de f en a. On note $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle **j^e dérivée partielle** la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarque

R 3 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la j^e dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j.

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t - a_j} \xrightarrow[t \to a_j]{} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

R 4 – En général, $p = 2$ ou 3. Si $p = 2$, par exemple, on note plutôt $f(x,y)$ que $f(x_1, x_2)$. On notera alors volontiers $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ les deux dérivées partielles selon la PREMIÈRE ou la DEUXIÈME variable. En mathématiques, on dérive selon une position et non « par rapport à une variable », dont le nom n'importe pas.

Exemple

E 3 – $f : (y,x) \mapsto xy^2$

Que désigne dans ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$??

Définition 3 : Vecteur gradient

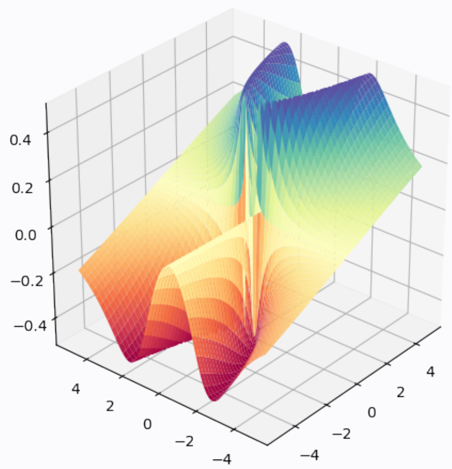
Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Exemple

E 4 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Les application partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

Remarque

R 5 – Et donc ⚠ l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

Définition 4 : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$: f_i est la i^e composante de f.

On dit que f admet des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a.

On appelle alors j^e **dérivée partielle de f en a** le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right).$$

Exemple

E 5 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (r, \theta, \phi) \mapsto \left(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta\right).$$

Définition 5 : Matrice jacobienne

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de f en a** la matrice

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Remarque

R 6 – Cœfficient (i,j) : dérivée de f_i par rapport à x_j, dans l'ordre.

R 7 – $J_f(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Donc si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, c'est une matrice ligne : la transposée du gradient $(\nabla f(a))^\top$ en confondant n-uplet et vecteur colonne.

Et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, c'est une matrice colonne. En fait, $J_f(a) = f'(a)$ en confondant toujours n-uplet et vecteur colonne.

Exemple : Matrice jacobienne de changement de variables

E 6 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :

$$f : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

E 7 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :

$$f : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

E 8 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$f : (r,\theta,\phi) \mapsto \big(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\big).$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété 1 : Équivalence avec les fonctions coordonnées

On note $f = (f_1,\dots,f_n)$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété 2 : Structure d'algèbre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Remarque

R 8 – Il suffit donc de travailler sur les fonctions $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$.

R 9 – On rappelle que l'on note, pour $f : E \to F$, $f(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$ ou $f(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(\|h\|_E)$ lorsque

$$\|f(h)\|_F = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(\|h\|_E),$$

autrement dit lorsque

$$\frac{\|f(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

Cela revient aussi à écrire que

$$f(h) = \|h\|_E\,\varepsilon(h)$$

où

$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F.$$

Comme on travaille en dimension finie, n'importent quelles normes conviennent.

Théorème 1 : DL_1

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathscr{U}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in \mathscr{U}$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|) = f(a) + \left(\nabla f(a) \middle| h\right) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|).$$

en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration

Admis provisoirement. ■

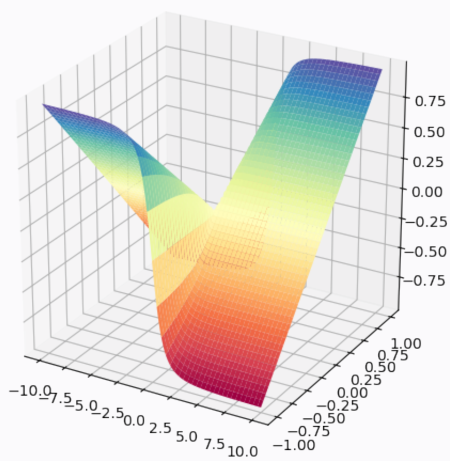
Corollaire 1 : $\mathscr{C}^1 \implies$ continue

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Exercice 1 : CCINP 33

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **et** $f(0,0) = 0$.

1. **Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
2. **Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.**
3. **f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.**



---

1. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

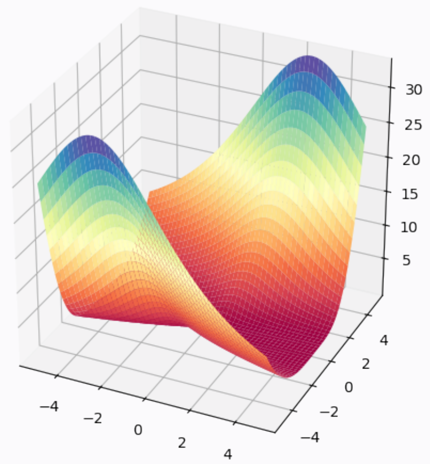
   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|(x,y)\|_2$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|_2$.
   On en déduit que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|x||y|}{\|(x,y)\|_2} \leqslant \dfrac{(\|(x,y)\|_2)^2}{\|(x,y)\|_2} = \|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$
   On en déduit que f est continue en $(0,0)$.
   Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   En $(0,0)$: $\dfrac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\dfrac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
3. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Or,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On remarque que $\forall x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : CCINP 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$



1. **Prouver que :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) **Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.**
   (b) **Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.**
3. **Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.**
   (a) **Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.**
   (b) **Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.**
   (c) **f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?**

---

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0$.
   Donc $x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   D'après 1., $x^2+y^2-xy = 0 \Longrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   D'après **1.**, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{2y^4}{x^2+y^2} \leqslant \frac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
   Ainsi, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 2(x^2+y^2) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
   Or : f est continue en $(0,0) \iff f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0) = \alpha$.
   Donc : f est continue en $(0,0) \iff \alpha = 0$.
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.
   (b) Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   Pour tout $y \neq 0$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   (c) Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$.
   De plus, $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$.

   D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 4\frac{|y^4(2x-y)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\frac{r^4(2r+r)}{r^4} = 12r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant 4\frac{|2y^5-3xy^4+4x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\frac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4} = 36r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 3 : Règle de la chaîne

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{U} & \longrightarrow & \mathscr{V}\\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & \big(f_1(x_1,\dots,x_p),\dots,f_n(x_1,\dots,x_p)\big)\end{array}\right.$$

et

$$g:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (y_1,\dots,y_n) & \longmapsto & g(y_1,\dots,y_n)\end{array}\right.$$

deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f = g\circ(f_1,\dots,f_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Démonstration

Admis provisoirement. ■

Exercice 3 : Changement de variable et gradient en polaire

Soit $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $V=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$,

$$g:\left|\begin{array}{ccc}V & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{array}\right.$$

$\vec{u}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ **et** $\vec{v}(\theta)=\vec{u}\,'(\theta)$.

1. **Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.**
2. **Si $(r,\theta)\in V$, on note $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Exprimer les dérivées partielles de g en (r,θ) en fonction des dérivées partielles de f en (x,y).**
3. **Exprimer le gradient $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ dans la base $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g en (r,θ).**

---

1. Facile.
2. $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}(\theta)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}(\theta)$.

Cas particulier 1 : important – dérivée le long d'un arc

Si $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, en notant, pour $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

$$(f\circ\gamma)'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))+z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)).$$

Corollaire 2 : Règle de la chaîne vectorielle

Soient $\mathcal{U},\mathcal{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathcal{U}$. Soient $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ et $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$ et $\ell\in[\![1,q]\!]$,

$$\frac{\partial(g_\ell\circ f)}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial(g\circ f)_\ell}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En particulier,

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))J_f(a).$$

Exercice 4 : Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

Exercice 5 : Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(ta_1,\dots,ta_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ et $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^p$.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 7 : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** $k\in\mathbb{N}^*$, une dérivée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f. Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)$$

notées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}=\partial_{i_k,\dots,i_1}f$ où $i_1,\dots,i_k\in[\![1,p]\!]$.

Définition 8 : Classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$. On dit que f **est de classe $\mathscr{C}^k$** si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que f **est de classe $\mathscr{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Propriété 4 : Caractérisation par les applications coordonnées

On note $f=(f_1,\dots,f_n)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Théorème 2 : de Schwarz

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tout $i,j\in[\![1,p]\!]$ tel que $i\neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.$$

Démonstration

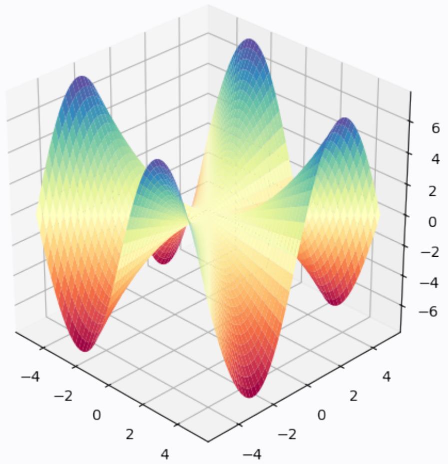
Non exigible. ■

Exercice 6 : CCINP 57

1. **Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.**
   (a) **Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.**
   (b) **Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».**
2. **On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par**

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
   (b) **Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.**



---

1. (a) f est continue en $(0,0) \iff \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|<\alpha \Longrightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.
   $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .
   (b) f est différentiable en $(0,0) \iff \exists L\in\mathscr{L}_C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})/$ au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)=f(0,0)+L(x,y)+o(\|(x,y)\|)$.

   Remarque : Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, si $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $L\in\mathscr{L}_{\mathscr{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

2. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant\|(x,y)\|$ et $|y|\leqslant\|(x,y)\|$ $\quad(*)$.
   (a) $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ et $(x,y)\mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
   Continuité en (0,0) :

   On a, en utilisant $(*)$ et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|.|y|\leqslant\|(x,y)\|^2$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
   (b) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

   De plus, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. $\quad(**)$
   Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

   $\forall\,x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$, donc $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   De même, $\forall\,y\in\mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$, donc $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\xrightarrow[y\to0]{}0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
   Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

   D'après $(*)$ et $(**)$, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant\dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4}=6\|(x,y)\|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant\dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4}=6\|(x,y)\|$.
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
   Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 : Contre-exemple au théorème de Schwarz : avec la fonction de l'exercice précédent (due à Péano) : calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Qu'en conclut-on ?

On trouve, en calculant les applications partielles, ou en prenant directement les taux d'accroissements, -1 et 1. On en déduit que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Propriété 5 : Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

(i) *Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ l'est encore.*

(ii) *Si $M : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_q} \to \mathbb{R}^n$ est q-linéaire, $f_1 : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^{m_1}, \dots, f_q : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^{m_q}$ de classe $\mathscr{C}^k$ alors $M(f_1, \dots, f_q)$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

(iii) *Toute fonction polynomiale à n variables est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.*

(iv) *Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.*

Démonstration

Non exigible. ■

5 Matrice hessienne et DL$_2$

Définition 9 : Matrice hessienne

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On appelle, lorsqu'elle existe, **matrice hessienne** de f en $x \in \mathscr{U}$ la matrice

$$H_f(x) = \left(\partial_{i,j}\right)_{\leqslant i,j \leqslant p} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}).$$

Remarque

R 10 – Le théorème de Schwarz assure que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, pour tout $x \in \mathscr{U}$, $H_f(x) \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$.

Théorème 3 : DL$_2$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $a \in \mathscr{U}$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h$ reste dans $\mathscr{U}$ lorsque $h \to 0$.

En confondant $\mathbb{R}^p$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \left(\nabla f(a) \middle| h\right) + \frac{1}{2}\left(H_f(a)h \middle| h\right) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\intercal h + \frac{1}{2} h^\intercal H_f(a) h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

Démonstration

Non exigible. ■

Remarque

R 11 – Se récrit, en posant $h = (h_1, \dots, h_p)$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} h_i h_j \partial_{i,j} f(a) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right).$$

II Applications

1 Équations aux dérivées partielles

Exemple : Quelques exemples fondamentaux

E 9 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ où $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ puis $\mathbb{R}^2\setminus B'(0,1)$.

E 10 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(x)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ où $h\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 11 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(y)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ où $h\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 12 – Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

E 13 – Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

Méthode 1

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u,v)=\varphi(x,y)$, en écrivant $f(x,y)=g(u,v)$ et en remplaçant soit (x,y) en fonction de (u,v), soit (u,v) en fonction de (x,y).
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et suffisamment régulier (classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

Exercice 8 : Résoudre

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide du changement de variable $(u,v)=\varphi(x,y)=(x+y,x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice du changement de variable est inversible.
Solutions : $f:(x,y)\mapsto g(x+2y)$ où $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9 : Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Résoudre

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide d'un changement de variable affine.

Exercice 10 : Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 11 : Coordonnées polaires

Soit $\mathcal{V} =]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathcal{V}$ sur $\mathscr{U}$.
Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

$\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
Solutions : $(x,y) \mapsto g\left(x^2+y^2\right)$ où $g \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_*^+\right)$.

Exercice 12 : À l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}\right)$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Solutions : $(x,y) \mapsto xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $g, h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+)$.

2 Optimisation : recherche d'extremums

Ici, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On notera plutôt n la dimension au départ : $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

a Extremums libres

Définition 10 : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en a un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $\mathcal{V}$ voisinage de a dans A tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).
Il est **strict** lorsque, $\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$, , $f(x) < f(a)$ (respectivement $f(x) > f(a)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $x \in A$.

Définition 11 : Point critique

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$.
Lorsque $\nabla f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f.

Comme en dimension 1, une condition nécessaire d'extremum local est liée à l'annulation du terme d'ordre 1 dans le développement limité, donc du gradient.

Propriété 6 : Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1

On suppose que

H1 $\mathcal{U}$ *ouvert (très important !) de* $\mathbb{R}^n$.

H2 $a \in \mathcal{U}$ *tel que* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *admettant des dérivées partielles en* a.

H3 f *présente un extremum local en* a.

Alors

C1 a *est un point critique de* f.

La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé ***point selle*** *ou* ***point col***.

Démonstration

Il suffit d'appliquer, pour tout i, la propriété connue à la fonction numérique $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ qui admet un extremum en a_i.

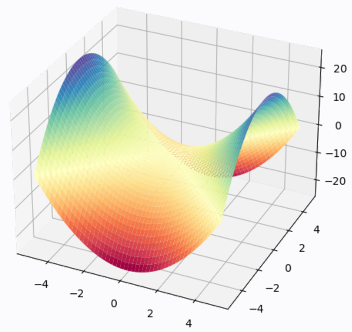
Exemple

E 14 –

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

présente un point selle en $(0, 0)$.
La surface porte le doux nom de *paraboloïde hyperbolique*.

Le seul point critique est $(0, 0)$ et $f(x, 0) \geqslant 0$, $f(0, y) \leqslant 0$.



Le développement limité à l'ordre 2 permet de conditionner le fait d'avoir un minimum ou un maximum local (donc un signe constant pour $f(a+h) - f(a)$) au signe du terme d'ordre 2.

Propriété 7 : Condition nécessaire de minimum local à l'ordre 2

On suppose que

H1 $\mathcal{U}$ *ouvert (très important !) de* $\mathbb{R}^n$

H2 $a \in \mathcal{U}$ *et* $f \in \mathscr{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

H3 f *présente un minimum local en* a

alors

C1 a *est un point critique de* f.

C2 $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Si c'est un maximum local en a, *alors* $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *(ie* $H_f(a)$ *est symétrique « négative », ses valeurs propres sont toutes dans* $\mathbb{R}^-$*).*

Démonstration

En effet, on a déjà vu que a est un point critique et le DL$_2$ s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

donc

$$h^{\top} H_f(a) h \sim f(a+h) - f(a) \geqslant 0$$

donc si h suffisamment petit, $h^{\top} H_f(a) h \geqslant 0$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, avec n suffisamment grand, $\left(\frac{x}{n}\right)^{\top} H_f(a) \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2} x^{\top} H_f(a) x \geqslant 0$ donc $x^{\top} H_f(a) x \geqslant 0$ et finalement $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. ■

Si jamais, de plus, les termes d'ordre 2 du développement limité ne sont pas nuls, on obtient un équivalent pour $f(a+h) - f(a)$ ayant le même signe, ce qui permet de formuler une condition suffisante.

Propriété 8 : Condition suffisante d'extremum local à l'ordre 2

On suppose que

- **H1** $\mathcal{U}$ *ouvert (très important !) de* $\mathbb{R}^n$.
- **H2** $a \in \mathcal{U}$ *et* $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
- **H3** a *est un point critique de* f.
- **H4** $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *(respectivement* $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*)*

alors

- **C1** f *atteint un minimum (respectivement maximum) local **strict** en* a.

Démonstration

Conséquence du DL_2, de nouveau. ■

Corollaire 3 : Discussion sur le spectre

*Si $\mathcal{U}$ **ouvert**, $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{U}$ point critique de f.*

- *Si $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$, f atteint en a un minimum local.*
- *Si $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$, f atteint en a un maximum local.*
- *Si $H_f(a)$ possède des valeurs propres non nulles de signes opposés, a est un point selle.*

Si $n = 2$ (fonction de 2 variables), on note

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ (théorème de Schwarz), $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique. On a $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2$ (égal produit de ses deux valeurs propres réelles) et $\mathrm{tr}\left(H_f(a)\right) = r + t$ (égal à leur somme).

1. Si $rt - s^2 > 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont même signe et sont non nulles : f **présente en** a **un extremum local strict.**
   (a) Si $r + t > 0$ alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **minimum local strict** en a.
   (b) Si $r + t < 0$ alors $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **maximum local strict** en a.
2. Si $rt - s^2 < 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont des signes opposés et sont non nulles.
   Dans ce cas, f **présente en** a **un point col** : dans les directions propres, on a respectivement un minimum et un maximum local.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure en général.

Méthode 2 : Recherche d'extremum

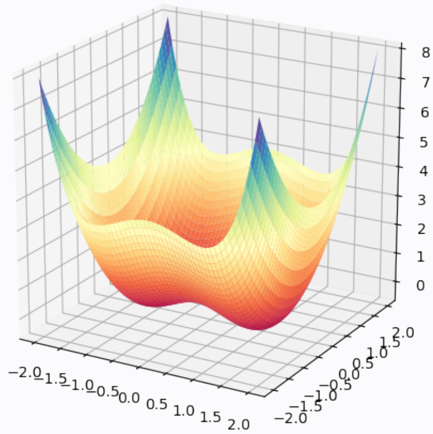
(i) Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut s'intéresser à la Hessienne aux points critiques qui permet de conclure lorsqu'elle est inversible (voir la remarque précédente pour $n=2$.)
Sinon, pour un point critique a, on étudie $f(a+h)-f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

(iii) Si $f:K\to\mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

Exercice 13 : Déterminer les extremums de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto y^2-x^2+\frac{x^4}{2}.$$



On est sur un ouvert avec une fonction $\mathscr{C}^2$.
On trouve trois points critiques : $(\pm1,0)$ et $(0,0)$.

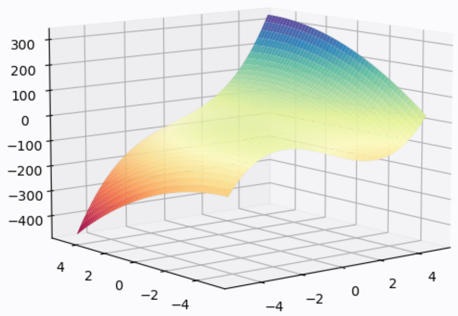
$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}$ admet des valeurs propres de signe opposé donc f présente en $(0,0)$ un point selle (se retrouve en regardant $f(x,0)$ et $f(0,y)$.)

$H_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$: f présente en $(\pm1,0)$ un minimum local strict. On remarque en fait que

$$f(x,y)-f(\pm1,0)=y^2-x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{1}{2}=y^2+\frac{(x^2-1)^2}{2}\geqslant 0$$

donc le minimum est global.

Exercice 14 : CCINP 56



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2$.

1. **f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.**
2. **f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.**
3. **On pose $K=[0,1]\times[0,1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.**

---

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

   Déterminons les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2+6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6x-6y$.

$$\begin{cases} 6x^2+6y &= 0 \\ 6x-6y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+1) &= 0 \\ y &= x \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \quad \text{et} \quad y=0 \\ \text{ou} \\ x=-1 \quad \text{et} \quad y=-1 \end{cases}$$

Donc f admet 2 points critiques sur $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$ et $(-1,-1)$.
Donc si f admet un extremum en a alors $a=(0,0)$ ou $a=(-1,-1)$.
On a : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6$.

Etudions la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
Notons $H_1=H_f((0,0))$ la matrice hessienne de f en $(0,0)$.

$$H_1=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det H_1=-36<0$, donc H_1 admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.
Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
Etudions la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.
Notons $H_2=H_f((-1,-1))$ la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.

$$H_2=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det H_2=12\times 6-36=36>0$ et $\operatorname{tr}(H_2)=-18<0$, donc H_2 admet deux valeurs propres strictement négatives.
Donc f admet en $(-1,1)$ un maximum local qui vaut $f(-1,-1)=3$.

Conclusion : f admet uniquement un maximum local atteint en $(-1,-1)$ et n'admet pas de minimum local.

2. $f(x,0)=2x^3+2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x,0)=2x^3+2 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, donc f n'admet pas d'extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$.
3. K est un produit de compacts de $\mathbb{R}^2$ donc est un compact.
Or f est continue sur K, donc f est bornée sur K et atteint ses bornes.
Donc f admet un maximum global sur K et atteint ce maximum.
Si f atteint ce maximum en $a\in\mathring{K}$, qui est un ouvert, alors a est un point critique. Or, les deux seuls points critiques de f n'appartiennent pas à $\mathring{K}$. Donc f atteint son maximum en un point a du bord $Fr\,K$ de K.
On pose

$$L_1=\{(x,0)\,,\,x\in[0,1]\} \quad L_2=\left\{(1,y)\,,\,y\in[0,1]\right\} \quad L_3=\{(x,1)\,,\,x\in[0,1]\} \quad L_4=\left\{(0,y)\,,\,y\in[0,1]\right\}$$

On a alors $Fr\,K=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$.
Étude de f sur L_1 $g_1:x\mapsto f(x,0)=2x^3+2$ est croissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_1(x)=g_1(1)=4$.
Étude de f sur L_2 $g_2:y\mapsto f(1,y)=4+6y-3y^2$. $\forall y\in[0,1]$, $g_2'(y)=6-6y\geqslant 0$ donc g_2 est croissante sur $[0,1]$. Donc $\sup\limits_{y\in[0,1]} g_2(x)=g_2(1)=7$.
Étude de f sur L_3 $g_3:x\mapsto f(x,1)=2x^3+6x-1$ est croissante sur $[0,1]$.Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_3(x)=g_3(1)=7$.
Étude de f sur L_4 $g_4:y\mapsto f(0,y)=-3y^2+2$ est décroissante sur $[0,1]$.donc $\sup\limits_{y\in[0,1]} g_4(y)=g_4(0)=2$.

Conclusion : On en déduit que f admet 7 comme maximum global sur K et que ce maximum est atteint en $(1,1)$.

b Extremums liés

On cherche désormais les extremums de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ non pas sur $\mathcal{U}$ entier, mais sur l'ensemble des points annulant une certaine fonction numérique $g \in \mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Une première approche pour calculer $\min\limits_{g(x)=0} f(x)$ consiste à paramétrer l'ensemble $X = \{x \in \mathcal{U},\ g(x) = 0\}$, c'est-à-dire trouver une fonction $t \in I \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ dont X est l'image. On est alors ramené à un problème à une seule variable que l'on sait résoudre : calculer

$$\min_{t \in I} f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big).$$

Une seconde approche consiste à transformer la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ en une ou plusieurs expressions de la forme $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ (le théorème hors-programme des fonctions implicites nous assure la possibilité de le faire au voisinage d'un point tel que $\nabla g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$...) puis à calculer

$$\min_{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathcal{U}'} f\big(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\big)$$

où $\mathcal{U}'$ est à préciser avec les techniques précédentes.

Exercice 15 : Déterminer de deux manières différentes $\min\limits_{x^2+y^2=1} xy$

En bleu :

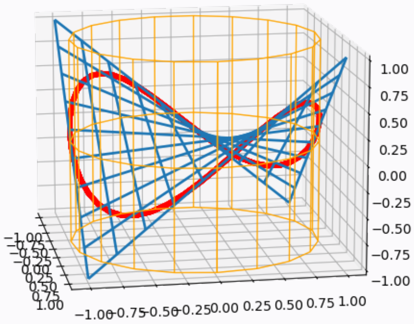
$$z = f(x, y)$$

En orange :

$$g(x, y) = 0$$

En rouge :

$$z = f_{|X}(x, y)$$



Première méthode Ici, $X = \{(x, y),\ x^2 + y^2 = 1\}$ est le cercle unité. On peut le paramétrer avec $x = \cos t$ et $y = \sin t$ pour $t \in \mathbb{R}$ (ou $]-\pi, \pi]$ ou ...)

Alors $xy = \cos t \sin t = \dfrac{\sin 2t}{2}$ admet comme minimum $-\dfrac{1}{2}$ atteint par exemple pour $t = -\dfrac{\pi}{4}$, donc pour $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Deuxième méthode On cherche des équations implicites pour X : $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in [0, 1]$.

Pour des raisons de signe, pour minimiser xy sur X, il suffit de minimiser $-x\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{x^2 - x^4} = -\sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2}$ sur $[0, 1]$. Le minimum est $-\dfrac{1}{2}$ atteint lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$ donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -\sqrt{1-x^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve que le minimum vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Malheureusement, en général, il n'est pas aisé de trouver un paramétrage de X ou de remplacer la contrainte implicite $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ en contrainte explicite $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$...

On dispose au programme d'un outil permettant d'étudier ce problème.

Théorème 4 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $X = \{x \in \mathcal{U},\ g(x) = 0\}$.
Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $\nabla g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.

Démonstration

Admis provisoirement. ■

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

Cette condition étant seulement nécessaire, la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte s'accompagne en général d'une recherche de point critique (sur un ouvert, bien sûr) suivi d'une étude locale, ou d'un argument de compacité.

Exercice 16 : Déterminer de nouveau $\min\limits_{x^2+y^2=1} xy$

On a $f:(x,y)\mapsto xy$ et $g:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, $X=\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}$.

Comme X est compact (fermé borné en dimension finie) et f est continue, on est assuré de l'existence d'un minimum global de f sur X en $(x_0,y_0)\in X$ (et aussi d'un maximum global).

De plus, $\nabla g(x_0,y_0)=(2x_0,2y_0)\neq(0,0)$. Par le théorème précédent, on a $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_0,y_0)=(y_0,x_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)=(2\lambda x_0,2\lambda y_0)$$

Donc $y_0=2\lambda x_0=2\lambda(2\lambda y_0)=4\lambda^2 y_0$.

Si $y_0=0$, alors $x_0=2\lambda y_0=0$ mais $(0,0)\notin X$. C'est donc que $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ et $(x_0,y_0)=(\pm y_0,y_0)\in X$.

On trouve alors le minimum et le maximum globaux de f sur X (qui existent bien tous les deux) atteints en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et valant $\pm\frac{1}{2}$.

Exercice 17 : (Oral CCINP) Montrer que $f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2$ **admet un minimum et un maximum sur** $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=13\}$ **et les déterminer.**

f est continue sur le compact $\mathscr{C}$ dont y est bornée et atteint ses bornes.

Soit $g:(x,y)\mapsto x^2+y^3-13$. Alors $\nabla(g):(x,y)\mapsto(2x,2y)$ ne s'annule qu'en $(0,0)\notin\mathscr{C}$.

Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x,y)\in\mathscr{C}\text{ et }\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$$

donc

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13\\ 4x+6y &= \lambda x\\ 6x-y &= \lambda y\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13\\ y &= \frac{\lambda-4}{6}x\\ x &= \frac{1+\lambda}{6}y\end{cases}$$

Alors $x=\frac{(\lambda-4)(\lambda+1)}{36}x$ et comme $x\neq0$ (sinon $x=y=0$ ce qui est exclu),

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=\lambda^2-3\lambda-4=36$$

donc

$$\lambda^2-3\lambda-40=(\lambda+5)(\lambda-8)=0.$$

Pour $\lambda=-5$, On obtient $y=\frac{-3}{2}x$ puis $\left(1+\frac{9}{4}\right)x^2=13$ donc $x=\pm2$ et $y=\mp3$.

On calcule $f(2,-3)=f(-2,3)=16-72-9=-65$.

Pour $\lambda=8$, On obtient $y=\frac{2}{3}x$ puis $\left(1+\frac{4}{9}\right)x^2=13$ donc $x=\pm3$ et $y=\pm3$.

On calcule $f(3,2)=f(-3,-2)=36+72-4=104$.

Finalement, $\boxed{\max\limits_{\mathscr{C}} f=f(3,2)=f(-3,-2)=104}$ et $\boxed{\min\limits_{\mathscr{C}} f=f(2,-3)=f(-2,3)=-65.}$

Exercice 18 : En étudiant l'application $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\cdots\cdots x_n$ **sur** $C_s=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ x_1+\cdots+x_n=s\}$**, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.**

f est continue sur le compact C_s dont y est bornée et atteint ses bornes.

Soit $g:(x,y)\mapsto x_1+\cdots+x_n-s$. Alors $\nabla(g):(x_1,\dots,x_n)\mapsto 1$ ne s'annule pas.

Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{C}\text{ et }\nabla f(x_1,\dots,x_n)=\lambda\nabla(x_1,\dots,x_n)$$

donc
$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n & = s \\ \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \prod_{j\neq i} x_j & =\lambda \end{cases}$$
On a alors $\lambda x_1=\cdots=\lambda x_n$.

Soit $\lambda=0$ et au moins l'un des x_i est nul, donc $f(x_1,\ldots,x_n)=0=\min_{C_s} f$.

Soit $\lambda=0$ et c'est le maximum de f qui va être atteint. $\lambda s=\lambda(x_1+\cdots+x_n)=n\lambda x_i$ et donc tous les x_i valent $\frac{s}{n}$. On a alors $f\left(\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}\right)=\left(\frac{s}{n}\right)^n$.

Ainsi, pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$,
$$x_1\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)^n$$
donc
$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots x_n}{n}$$
.

Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique.

III Différentielle

1 Différentielle en un point

Rappel : si I est intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to F$ est dérivable en $a\in I$ si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si on a un vecteur $b\in F$ tel que
$$f(a+h)=f(a)+hb+\underset{h\to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(h)$$
(et, dans ce cas, $b=f'(a)$).

Nous allons généraliser cette idée aux fonctions définies sur une espace vectoriel normé de dimension finie E.

Définition 12 : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un point de $\mathscr{U}$. On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E,
$$f(a+h)=f(a)+\ell_a(h)+\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$
ou encore, au voisinage de a,
$$f(x)=f(a)+\ell_a(x-a)+\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a, notée $\mathrm{d}f(a)\in\mathscr{L}(E,F)$. On a donc
$$f(a+h)=f(a)+\mathrm{d}f(a)(h)+\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

Remarque

R 12 – Lorsque cela a du sens, on définit donc une application $\mathrm{d}f:\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a)\end{array}\right.$ appelée **différentielle** de f.

R 13 – On note parfois $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ au lieu de $\mathrm{d}f(a)(h)$.

R 14 – L'unicité vient du

Lemme 2

Si $\varphi\in\mathscr{L}(E,F)$ est telle que $\varphi(h)=\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$, alors φ est l'application nulle.

Démonstration

$\varphi(h) = \|h\|\,\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$.

Alors pour tout $x \in E$, $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t\varphi(x) = \varphi(tx) = t\,\|x\|\,\varepsilon(tx)$ donc $\varphi(x) = \|x\|\,\varepsilon(tx) \xrightarrow[t\to 0]{} 0_F$.

Donc pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = 0_F$. ■

Propriété 9 : différentiable ⇒ continue

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Par continuité de l'application linéaire en dimension finie (celle de E suffit) $\mathrm{d}f(a)$, en passant à la limite dans le développement limité, $f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$. ■

2 Cas particuliers

Propriété 10 : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \to F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a. Dans ce cas, $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.

Démonstration

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $b \in F$ tel que $f(a+h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$ si et seulement si f est différentiable en a car $h \mapsto hb$ est linéaire.

Le cas échéant, $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hb = hf'(a)$. ■

Propriété 11 : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est constante, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Démonstration

$f(a+h) = f(a) + 0_F + 0_F$ avec $h \mapsto 0_F$ linéaire et $0_F = \mathrm{o}(h)$.Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$. ■

Propriété 12 : Cas d'une fonction linéaire

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est la restriction à $\mathscr{U}$ d'une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = \varphi$ (et donc $\mathrm{d}f$ est constante).

Démonstration

$f(a+h) = \varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi(h) + 0_F$ avec φ linéaire et $0_F = \mathrm{o}(h)$.Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = \varphi$ (donc $\mathrm{d}f$ est constante. ■

Exercice 19 : Montrer que $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}\right.$ est différentiable en toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{d}f(A)$.

$(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ avec $H \mapsto AH + HA$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0 \leqslant \|H^2\| \leqslant \|H\|^2$ donc $\frac{\|H^2\|}{\|H\|} \to 0$ et $H^2 = o(H)$. Donc f est différentiable en A et $\mathrm{d}f(A) : H \mapsto AH + HA$.

Exercice 20 : Montrer que, si E est un espace euclidien $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|^2 \end{array} \right.$ est différentiable en toute $a \in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

$\|a+h\|^2 = \|a\|^2 + 2(a|h) + \|h\|^2$ avec $h \mapsto 2(a|h)$ linéaire et $\|h\|^2 = o(h)$. Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(a|h)$.

Exercice 21 : Montrer que, si E est un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x|u(x)) \end{array} \right.$ est différentiable en toute $a \in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$. Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

$(a+h|u(a+h)) = (a|u(a)) + (h|u(a)) + (a|u(h)) + (h|u(h))$ avec $h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h))$ linéaire et $|(h|u(h))| \leqslant \|h\|\,\|u(h)\|$ par Cauchy-Schwarz (pour le norme euclidienne associée au produit scalaire) et comme $\|u(h)\| \to 0$ par continuité, $(h|u(h)) = o(h)$.

Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h))$, ce qui devient $2(u(a)|h)$ si de plus u est symétrique.

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Le fait de travailler sur un ouvert $\mathscr{U}$ assure, pour a point de $\mathscr{U}$ et v vecteur de E, l'existence d'un $\delta > 0$ (« distance de sécurité ») tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \mathscr{U}$ (on s'éloigne de a dans la direction de v), cela permet de définir l'application $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ d'une variable réelle au voisinage de 0.

Définition 13 : Dérivée selon un vecteur

On dit que $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est **dérivable selon le vecteur** $v \in E$ **au point** $a \in \mathscr{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $\mathrm{D}_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$.

Exemple

E 15 – La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $(0,0)$ sinon admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ et si $v = (\alpha, \beta)$: $\mathrm{D}_v f((0,0)) = 0$ si $\alpha = 0$ et $\frac{\beta^2}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$.

Définition 14 : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \subset E \to F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$.
On appelle je **dérivée partielle de** f **en** a, lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) \in F.$$

Remarque

R 15 – Les dérivées partielles vues pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ sont les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Bien sûr la notion générale de dérivée partielle dépend de la base choisie. En ce sens, la notation $\mathrm{D}_{e_j} f(a)$ est la plus précise.

R 16 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la je dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j. : en effet, en dérive

$$\phi : t \mapsto f(a + te_j) = f(a_1 e_1 + \dots + (a_j + t)e_j + \dots + a_n e_n)$$

en 0, ce qui revient aussi à dériver

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + te_j + \dots + a_n e_n)$$

en a_j.

Exemple

E 16 – Avec $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $(0, 0)$ sinon, on voit que ⚠ on peut avoir des dérivées partielles en $(0, 0)$ sans avoir de dérivée selon certains vecteurs ($v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^2$, ici).

4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété 13 : Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = \mathrm{d} f(a)(v)$.

Démonstration

$f(a + tv) = f(a) + \mathrm{d} f(a)(tv) + \underset{t \to 0}{o}(t)$ donc $\dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \mathrm{d} f(a)(v)$ par linéarité de $\mathrm{d} f(a)$. ■

Cas particulier 2 : Dérivée selon un vecteur de base

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\mathrm{d} f(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété 14 : Expression de la différentielle avec les dérivées partielles

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : \mathscr{U} \to F$, $a \in \mathscr{U}$ tel que f est différentiable en a.

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$,

$$\mathrm{d} f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On note $\mathrm{d} x_j : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h_j \end{array} \right.$ la forme linéaire j^{e} coordonnée dans $\mathscr{B}$. Alors on a

$$\mathrm{d} f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \, \mathrm{d} x_j.$$

Démonstration

C'est la linéarité de $\mathrm{d} f(a)$:

$$\mathrm{d} f(a)\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \, \mathrm{d} f(a)\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

■

Remarque

R 17 – Le DL_1 de f différentiable en a s'écrit alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \mathrm{o}(h).$$

5 Matrice jacobienne

Définition 15 : Matrice jacobienne

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, $\mathscr{U}$ ouvert de E et $f : E \to F$ différentiable, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F. On note $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

Propriété 15 : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(\mathrm{d} f(a)\right)$$

Démonstration

$$\mathrm{d} f(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i$$

permet bien de remplir la j^{e} colonne de $J_f(a)$.

■

6 Gradient

Définition 16 : Gradient

Soit E un espace **euclidien**, $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathscr{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$,

$$\mathrm{d} f(a)(h) = (\nabla f(a)|h).$$

Démonstration

C'est le théorème de représentation de Riesz : la **forme** linéaire $\mathrm{d} f(a)$ s'écrit $x \mapsto (b|x)$ pour un certain vecteur b...

Remarque

R 18 – On comprend mieux la notation alternative $\mathrm{d} f(a) \cdot h$ faisant penser à un produit scalaire. Le DL_1 de f différentiable en a dans E euclidien se récrit

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{(\nabla f(a)|h)}_{\text{produit scalaire}} + \mathrm{o}(h)$$

R 19 – Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique,

$$\mathrm{d} f(a)(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

On retrouve notre gradient habituel.
Exactement le même raisonnement (expression du produit scalaire en base orthonormée) donne la propriété suivante.

Propriété 16 : Coordonnées du gradient

*Soit E un espace **euclidien**, $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E, le coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont*

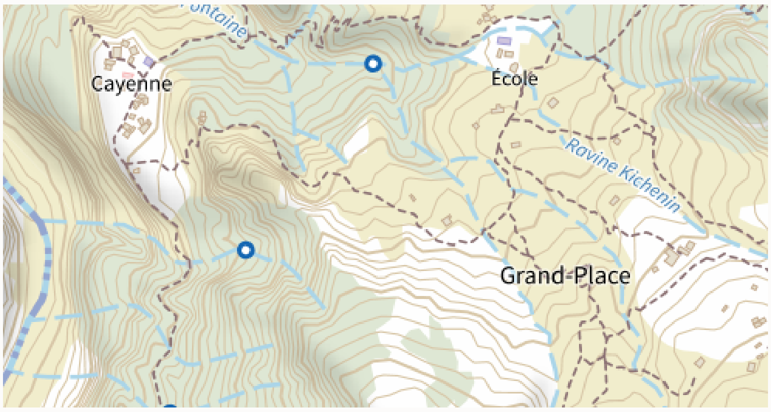
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

Remarque : Interprétation géométrique

R 20 – On suppose f différentiable en a et $\nabla f(a) \neq 0_E$.
Notons S la sphère unité de E pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall h \in S, \quad \mathrm{d} f(a)(h) = \big(\nabla f(a)\big|h\big) \leqslant \big|\big(\nabla f(a)\big|h\big)\big| \leqslant \big\|\nabla f(a)\big\| \, \|h\| = \big\|\nabla f(a)\big\|.$$

Or ce majorant est atteint pour $h_0 = \dfrac{\nabla f(a)}{\big\|\nabla f(a)\big\|}$.
Ainsi le vecteur $\nabla f(a)$ donne la direction et le sens de plus forte variation de la fonction f.
C'est à la base d'algorithmes d'optimisation (descente de gradient), utilisé par exemple en Machine Learning (apprentissage automatique).



Ci-dessus, on représente, au cœur de Mafate, des « lignes de niveau » de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ qui au point de coordonnées (x, y) associe son altitude (on parle d'isoplèthes d'altitude).
Ces lignes de niveau sont des courbes d'équation $f(x, y) = \text{constante}$.
Tracer la direction et le sens de ∇f en quelques points.
On peut montrer que le gradient est normal aux lignes de niveaux en tous points.

IV Opérations sur les différentielles

1 Combinaisons linéaires

Propriété 17 : Linéarité

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $f, g : \mathscr{U} \to F$ différentiables en $a \in \mathscr{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d} f(a) + \mu \,\mathrm{d} g(a).$$

Démonstration

Il suffit de remarquer, par propriétés de la dérivation que $J_{\lambda f + \mu g}(a) = \lambda J_f(a) + \mu J_g(a)$ et de repasser aux applications linéaires.

Autre possibilité : on ajoute les DL_1 :

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \lambda f(a) + \mu g(a) + \lambda \,\mathrm{d} f(a)(h) + \mu \,\mathrm{d} g(a)(h) + \mathrm{o}(h)$$

avec $\lambda \,\mathrm{d} f(a) + \mu \,\mathrm{d} g(a)$ linéaire, donc par unicité, $\lambda f + \mu g$ est différentiable et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d} f(a) + \mu \,\mathrm{d} g(a)$. ■

Remarque

R 21 – $f \mapsto \mathrm{d} f$ est donc linéaire.

2 Image par une application multilinéaire

Propriété 18 : Image par une application multilinéaire

Soit $\mathscr{U}$ ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $E_1,\dots,E_q,F$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $f_1:\mathscr{U}\to E_1,\dots,f_q:\mathscr{U}\to E_q$ des applications différentiables en $a\in\mathscr{U}$ et $M:E_1\times\cdots\times E_q\to F$ une fonction q-linéaire.
Alors $\phi:\mathscr{U}\to F$ définie par $\phi:x\mapsto M(f_1(x),\dots,f_q(x))$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}\phi(a):h\mapsto\sum_{k=1}^{q}M(f_1(a),\dots,\mathrm{d}f_k(a)(h),\dots,f_q(a)).$$

Démonstration

On traite le cas bilinéaire. Le cas général est analogue.

1re tentative On peut voir le faire avec les dérivées selon les vecteurs. On sait, sous réserve d'existence, que $\mathrm{d}\phi(a)(h)=D_h\phi(a)$. Or

$$\psi:t\mapsto\phi(a+th)=B(f(a+th),g(a+th))$$

est dérivable en 0 (car f et g sont différentiables en a) de dérivée

$$\begin{aligned}\psi'(0)=D_h\phi(a)&=B(D_hf(a),g(a))+B(f(a),D_hg(a))\\&=B(df(a)(h),g(a))+B(f(a),dg(a)(h))\end{aligned}$$

Le problème est que l'existence de dérivée selon tout vecteur ne garantit pas la différentiabilité...

On peut par exemple montrer que la fonction $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{y^2}{x}&\text{si }x\neq0\\ y&\text{sinon}\end{cases}$ admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue , et encore moins différentiable.

Bonne méthode On utilise les DL$_1$: avec $\varepsilon_1(h)\xrightarrow[h\to0]{}0$ et $\varepsilon_2(h)\xrightarrow[h\to0]{}0$,

$$\begin{aligned}\phi(a+h)&=B(f(a+h),g(a+h))\\&=B\big(f(a)+\mathrm{d}f(a)(h)+\|h\|\varepsilon_1(h),\ \ g(a)+\mathrm{d}g(a)(h)+\|h\|\varepsilon_2(h)\big)\\&=B\big(f(a),\ g(a)\big)+B\big(\mathrm{d}f(a)(h),\ g(a)\big)+B\big(f(a),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)+\psi(h)\end{aligned}$$

avec $h\mapsto B\big(\mathrm{d}f(a)(h),g(a)\big)+B\big(f(a),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)$ linéaire et

$$\begin{aligned}\psi(h)=\|h\|\,B\big(f(a)+\mathrm{d}f(a)(h),\ \varepsilon_2(h)\big)+\|h\|\,B\big(\varepsilon_1(h),\ g(a)+\mathrm{d}g(a)(h)\big)\\+\|h\|^2B(\varepsilon_1(h),\ \varepsilon_2(h))+B\big(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\psi(h)}{\|h\|}&=B\big(f(a)+\mathrm{d}f(a)(h),\ \ \varepsilon_2(h)\big)+B\big(\varepsilon_1(h),\ \ g(a)+\mathrm{d}g(a)(h)\big)\\&\quad+\|h\|\,B(\varepsilon_1(h),\ \varepsilon_2(h))+\frac{B\big(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)}{\|h\|}.\end{aligned}$$

Les trois premiers termes tendent vers 0 lorsque $h\to0$ par continuité de l'application bilinéaire en dimension finie.
Pour le dernier, on remarque que

$$(x,y)\mapsto B(\mathrm{d}f(a)(x),\mathrm{d}g(a)(y))$$

est bilinéaire, donc on a, par continuité, un réel C tel que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{B\big(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)}{\|h\|}\right\|&=\frac{\big\|B\big(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\big)\big\|}{\|h\|}\\&\leqslant\frac{C\|h\|^2}{\|h\|}=C\|h\|\xrightarrow[h\to0]{}0.\end{aligned}$$

Donc $\psi(h)=\underset{h\to0}{\mathrm{o}}(h)$, ce qui permet d'obtenir toute la conclusion.

■

3 Composition

Propriété 19 : Différentielle d'une composée

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $\mathscr{V}$ ouvert de F, $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ différentiable en $a \in \mathscr{U}$ et $g : \mathscr{V} \to G$ différentiable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}\,g(f(a)) \circ \mathrm{d}\,f(a).$$

Propriété 20 : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E, F et G de bases, on obtient

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Remarque

R 22 – D'où la règle de la chaîne.

Démonstration

Il suffit de composer les DL_1 : on écrit, avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$, et pour simplifier la lecture , les applications linéaires $\varphi = \mathrm{d}\,f(a)$ et $\psi = \mathrm{d}\,g(f(a))$,

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)$$

et

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + \psi(k) + \|k\|\,\varepsilon_2(k)$$

puis

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g\Big[f(a) + \underbrace{\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big)}_{k}\Big] \\ &= g(f(a)) + \psi\left(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right) \\ &\qquad + \left\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right\|\,\varepsilon_2\left(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right) \\ &= g \circ f(a) + [\psi \circ \varphi](h) + \zeta(h) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\zeta(h)}{\|h\|} = \psi(\varepsilon_1(h)) + \frac{\left\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right\|}{\|h\|}\varepsilon_2\left(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right).$$

φ et ψ étant linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc $\psi(\varepsilon_1(h)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\varphi(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ puis $\varepsilon_2\left(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Enfin,

$$\frac{\left\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\left\|\varphi(h)\right\|}{\|h\|} + \varepsilon_1(h)$$

et par continuité de l'application linéaire φ, on a $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout h, $\left\|\varphi(h)\right\| \leqslant C\,\|h\|$ donc $\dfrac{\left\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\right\|}{\|h\|}$ est borné et finalement $\dfrac{\zeta(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, c'est-à-dire $\zeta(h) = \mathrm{o}(h)$.

Par unicité, on en déduit que $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \psi \circ \varphi = \mathrm{d}\,g(f(a)) \circ \mathrm{d}\,f(a).$$

■

Corollaire 4 : Dérivée le long d'un arc

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to F$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathscr{U}$ une application dérivable.
On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne, si les coordonnées de $\gamma(t)$ sont $\left(\gamma_1(t), \dots, \gamma_p(t)\right)$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

En particulier, si $\gamma : t \mapsto x + tv$ où $x, v \in \mathscr{U}$ sont fixés,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(v) = D_v f(\gamma(t)).$$

V Classe $\mathscr{C}^1$

Définition 17 : Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$f : \mathscr{U} \to F$ est dite **de classe** $\mathscr{C}^1$ lorsque f est différentiable sur $\mathscr{U}$ et $\mathrm{d}f : \mathscr{U} \to \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Propriété 21 : Opérations

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ l'est encore.
Si M est q-linéaire et $f_1, \dots, f_q$ sont $\mathscr{C}^1$, $M(f_1, \dots, f_q)$ l'est.

Propriété 22 : Caractérisation par les applications coordonnées

Soit $f : \mathscr{U} \to F$, d'applications coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base de F. f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème 5 : IMPORTANT - Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si, dans une base quelconque de E, toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Démonstration

Non exigible. ■

Propriété 23 : Expression intégrale le long d'un arc

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, F)$, $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathscr{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Démonstration

On a vu que $\mathrm{d}f(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right) = (f \circ \gamma)'(t)$, c'est donc une simple application du théorème fondamental de l'analyse. ■

Corollaire 5 : Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$

En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$ sur $[0,1]$,

$$f(a+v) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a+tv)(v)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 D_v f(a+tv)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 6 : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

*Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, F)$ et $\mathscr{U}$ est un ouvert **connexe par arcs**, alors*

f est constante si et seulement si $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration

Le sens direct a déjà été vu.
Pour le sens réciproque, seul le cas convexe est au programme. On suppose donc $\mathscr{U}$ convexe et $\mathrm{d}f = 0$.
Soient $a, b \in \mathscr{U}$, on veut montrer que $f(a) = f(b)$.
Mais on peut relier a et b par un segment inclus dans $\mathscr{U}$ par convexité : $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)a + tb$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors, la propriété précédente donne $f(b) - f(a) = 0$. ■

VI Vecteurs tangents

Définition 18 : Vecteur tangent

Si X est une partie de E, $a \in X$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à X en a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
On note $T_a X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

Exemple

E 17 – Si $\mathscr{G}$ est un sous-espace affine de E de direction G (sous-espace vectoriel de E), pour tout $a \in \mathscr{G}$,

$$\boxed{T_a \mathscr{G} = G}$$

En effet, on peut écrire $\mathscr{G} = a + G$.

Si $v \in G$, soit $\gamma : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathscr{G} \\ t & \longmapsto & a+tv \end{array} \right.$ est dérivable en 0, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Réciproquement, si $v \in T_a \mathscr{G}$, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathscr{G}$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors v est la limite lorsque $t \to 0$ de $\dfrac{\gamma(t) - a}{t} \in G$ et comme G est un sous-espace de E qui est de dimension finie, il l'est aussi, donc il est fermé et donc $v \in G$.

E 18 – Sphère d'un espace euclidien : si $a \in S(0_E, 1)$,

$$\boxed{T_a S(0_E, 1) = a^{\perp}}$$

En effet, si $v \in a^{\perp}$, soit $\gamma : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & S(0_E,1) \\ t & \longmapsto & \dfrac{a+tv}{\|a+tv\|} \end{array} \right.$ est dérivable en 0, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ car, avec $\|a\| = 1$,

$$\gamma : t \mapsto \frac{a+tv}{\sqrt{\|a+tv\|^2}} = \frac{a+tv}{\sqrt{1 + 2t(a|v) + t^2\|v\|^2}}$$

donc

$$\gamma'(0) = \frac{\|a + 0\cdot v\|\, v - \frac{2(a|v) + 2\cdot 0\cdot\|v\|^2}{2\|a+0\cdot v\|}(a + 0\cdot v)}{\|a+0\cdot v\|^2}$$

Réciproquement, si $v \in T_a S(0_E, 1)$, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S(0_E, 1)$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Alors $\dfrac{\gamma(t)-a}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} v$ donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma(t)-a}{t}\middle|a\right) &= \frac{(\gamma(t)|a)-1}{t} = \frac{(\gamma(t)|a-\gamma(t))}{t}\\ &= -\left(\gamma(t)\middle|\frac{\gamma(t)-a}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} (v|a) = -(a|v)\end{aligned}$$

Donc $(v|a)=0$: $v \in a^{\perp}$.

Comme dernier exemple, on va obtenir que le plan tangent à une surface d'équation $z=f(x,y)$ admet comme vecteur normal le gradient (non nul) de $g:(x,y,z)\mapsto f(x,y)-z$.

Cela revient à transformer l'équation explicite $z=f(x,y)$ en équation implicite $g(x,y,z)=0$.

Propriété 24 : Plan tangent pour une surface explicite

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ différentiable.
Soit $S\subset\mathbb{R}^3$ la surface représentative de f, c'est-à-dire

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in\mathscr{U} \text{ et } z=f(x,y)\right\}.$$

Soit $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{U}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y)-z\end{array}\right.$

L'ensemble T_aS des vecteurs tangents à S en $a=(x_0,y_0,z_0)\in S$ est un plan vectoriel $P=\nabla g(a)^{\perp}$ de vecteur normal le vecteur (non nul) $\nabla g(a)$, donc d'équation

$$\left(\nabla g(a)\middle|(x,y,z)\right)=0.$$

*On appelle **plan tangent à** S **en** a le plan affine $a+P$ passant par a et de direction l'ensemble P des vecteurs tangents à X en a, d'équation*

$$\left(\nabla g(a)\middle|(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\right)=0$$

Remarque

R 23 – On retrouve, pour le plan tangent, une équation type « équation de la tangente » :

$$z-z_0=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0,y_0).$$

Démonstration

On raisonne toujours par double inclusion.

- Si $v=(x,y,z)\in T_aS$, on a $\varepsilon>0$ et $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to S$ tel que $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=v$. Alors, pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ avec $z(t)=f(x(t),y(t))$ donc

$$\begin{aligned}z=z'(0)&=x'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(x(0),y(0))+y'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(x(0),y(0))\\ &=x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{aligned}$$

donc

$$0=x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-z=\left(\nabla g(a)\middle|(x,y,z)\right)$$

car $\nabla g(a)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right)$.

■ Si $v=(x,y,z)$ est orthogonal à $\nabla g(a)$, On définit

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & S \\ t & \longmapsto & \left(x_0+tx, y_0+ty, f(x_0+tx,y_0+ty)\right) \end{array} \right.$$

Alors γ est dérivable en 0, $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=\left(x,y,x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=(x,y,z)$ car $(\nabla g(a)|v)=0$.

Mais toutes les surfaces n'ont pas une équation explicite $z=f(x,y)$.

Le programme propose un dernier énoncé, à la démonstration hors programme, permettant de traiter le cas général des surfaces décrites par une équation implicite $g(x,y,z)=0$ et généralisant l'énoncé précédent.

Propriété 25 : Hyperplan tangent à une surface implicite

Soit g une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$, $X=\{x\in\mathscr{U},\ g(x)=0_{\mathbb{R}}\}$ et $a\in X$.
Si $\mathrm{d}g(a)\neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$, alors

$$T_aX=\mathrm{Ker}\left(\mathrm{d}g(a)\right)=\nabla g(a)^{\perp}$$

(L'espace étant supposé euclidien pour utiliser le gradient.)

Autrement dit, X admet un hyperplan affine tangent en a qui est, $a+T_aX=a+\nabla g(a)^{\perp}$ d'équation

$$\left(\nabla g(a)\middle|x-a\right)=0.$$

Remarque

R 24 – Bien sûr le **vecteur** x de cet énoncé ne doit pas être confondu avec le **scalaire** x d'un triplet (x,y,z) du cas particulier $\mathbb{R}^3$.

Méthode 3 : Trouver une équation d'hyperplan tangent

On retiendra que dans tous les cas, mieux vaut repasser par une équation **implicite** $g(x)=0$ pour trouver une équation d'hyperplan tangent.

Le théorème précédent donne alors une équation du-dit hyperplan tangent en un point a n'annulant pas la $\mathrm{d}g$.

Par exemple, le plan tangent à la surface S d'équation $g(x,y,z)=0$ en $a=(x_0,y_0,z_0)$ est le plan affine $a+\nabla g(a)^{\perp}$ passant par a et de direction le plan vectoriel $T_aS=\nabla g(a)^{\perp}$ de vecteur normal $\nabla g(a)\neq(0,0,0)$, d'équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

où $g(a)=g(x_0,y_0,z_0)=0$.

Exemple

E 19 – Équation du plan tangent en un point d'une sphère de $\mathbb{R}^3$:

La sphère de centre (x_c,y_c,z_c) et de rayon $r>0$ a pour équation

$$g(x,y,z)=(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2-r^2=0$$

En un point $a=(x_0,y_0,z_0)$ de la sphère, le gradient vaut $\left(2(x_0-x_c),2(y_0-y_c),2(z_0-z_c)\right)\neq(0,0,0)$ car le centre n'est pas sur la sphère (avec $r>0$) et l'équation du plan tangent est donc

$$(x_0-x_c)(x-x_0)+(y_0-y_c)(y-y_0)+(z_0-z_c)(z-z_0)=0$$

VII Optimisation (recherche d'extremums)

Définition 19 : Point critique

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ différentiable. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0$.
Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Propriété 26 : Condition nécessaire d'extremum local

*Soit $\mathscr{U}$ **ouvert** (très important) et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathscr{U}$.*
Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Démonstration

Il suffit de revenir aux dérivées partielles. ■

Propriété 27 : Vecteurs tangents en un extremum local

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$, X une partie de $\mathscr{U}$, $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et f est différentiable en a, alors

$$\forall v \in T_a X, \quad \mathrm{d}f(a)(v) = 0.$$

Autrement dit, dans le cas où E est euclidien,

$$T_a X \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(a)) = \left(\nabla f(a)\right)^{\perp}$$

Démonstration

Soit $v \in T_a X$. On a $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
Alors, $f \circ \gamma$ admet un extremum local en $0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui est ouvert, donc

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(\gamma(0))\left(\gamma'(0)\right) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

■

Remarque

R 25 – Autrement dit, les vecteurs tangents à X en a extremum local de $f_{|X}$ sont dans l'hyperplan vectoriel de vecteur normal $\nabla f(a)$.

Théorème 6 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de E, et $X = \{x \in \mathscr{U},\ g(x) = 0\}$.
Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $\mathrm{d}g(a) \neq 0_E$, alors $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$.

Démonstration

- Soit $\mathrm{d}f(a)$ est nulle et $\mathrm{d}f(a) = 0 \cdot \mathrm{d}g(a)$.
- Soit $\mathrm{d}f(a)$ n'est pas nulle et on prouve que $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(a)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(a))$. En effet, un résultat du programme dit que si deux formes linéaires non nulles ont même noyau, elles sont colinéaires.
  Comme $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, et avec la propriété précédente, $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(a)) = T_a X \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(a))$.
  Par égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}f(a) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}g(a)$, ce qui conclut.

■

Terminons avec une extension hors programme, pour la culture.

Théorème 7 : HP : multiplicateurs de Lagrange

*Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'**ouvert** $\mathscr{U}$ de E et*

$$X = \left\{x \in \mathscr{U},\ g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\right\}.$$

Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si les formes linéaires $\mathrm{d}\,g_1(a), \dots, \mathrm{d}\,g_p(a)$ sont linéaires indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{d}\,f(a) = \lambda_1\,\mathrm{d}\,g_1(a) + \cdots + \lambda_p\,\mathrm{d}\,g_p(a).$$

*Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.*