Équations Différentielles Linéaires

Extrait du programme officiel :

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.	
Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Cas des équations scalaires d'ordre n.	
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E.	
Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t), \quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t).$	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions.	
Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Plan du cours

I Révisions de MP2I

1 Équations différentielles du premier ordre

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

a Définitions

Définition 1 : EDL 1

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL 1) toute équation du type

$$(L)\ \forall\, t \in D,\quad ,\alpha(t)f'(t)+\beta(t)f(t)=\gamma(t)$$

où α,β,γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inonnue $f: D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation

$$\alpha(t)y'+\beta(t)y=\gamma(t)$$

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation

$$(H)\ \ \alpha(t)y'+\beta(t)y=0$$

est appelée **équation homogène associée à** (L)**.**

Remarque

R 1 – La notation $\alpha(t)y'+\beta(t)y=\gamma(t)$ vient du fait que l'on peut l'écrire sous la forme $F(t,y,y')=0$ où t,y,y' sont trois variables indépendantes. f est solution si et seulement si pour tout t, $F\big(t,f(t),f'(t)\big)=0$. Dans cette notation, y et y' ne représentent pas des fonctions !

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquelles $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ sont continues.}}$ On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L)\quad y'+a(t)y=b(t)$$

avec $a=\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H)\quad y'+a(t)y=0$.

b Résolution de l'équation homogène

Propriété 1 : Solutions de l'équation homogène

*Soit $(H)\ y'+a(t)y=0$ avec a continue sur I. Les solutions de (H) sont les fonctions $f:\ t\in I\mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$, où A désigne **une** primitive de a.*

Démonstration

- **Première méthode** : On pose $g:\ x\mapsto f(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ donc $f=g\mathrm{e}^{-A}$ et montre que f est solution ssi g est constante.

$$f \text{ solution de } (H) \iff (g'-ag)\mathrm{e}^{-A}+ag\mathrm{e}^{-A}\equiv 0 \iff g'\mathrm{e}^{-A}\equiv 0\iff g'\equiv 0$$

car pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z\neq 0$ (car $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\,z}$ ou bien $\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{-z}=1$). Le fait qu'on soit sur un **intervalle** permet de conclure.
- **Deuxième méthode** : avec un facteur intégrant :

$$f'+af=0 \underset{\mathrm{e}^A \text{ jamais nul}}{\iff} (f'+af)\mathrm{e}^A=0 \iff \left(y\mathrm{e}^A\right)'=0\iff f\mathrm{e}^A \text{ constant}$$

car on est sur un intervalle. ■

Remarque

R 2 – Le physicien écrirait $\dfrac{y'}{y}=-a$ donc, en intégrant, $\ln|y|=-A+c$ donc $y=\pm\mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-A}=\lambda\mathrm{e}^{-A}$.

Correct ? Problème :
- y pourrait s'annuler. Mais on a facilement que soit on est tout le temps nul, soit on ne l'est jamais.
- Ensuite le $|y|$: par continuité, comme y ne s'annule jamais, elle est de signe constant.

Donc pourquoi pas, mais pénible à justifier.

Cependant, c'est un bon moyen de retrouver la formule !

Méthode 1 : Raccord de solution

Des raccords de solutions sont nécessaires aux points où la fonction a s'annule.

Pour effectuer un raccord de solutions, on résout l'équation sur les intervalles où a ne s'annule pas. **Il est primordial d'indexer les constantes en fonction de l'intervalle**.

On raisonne alors par analyse-synthèse.

Analyse Si f est solution raccordée (donc sur un intervalle où a peut s'annuler), elle est solution sur les intervalles où a ne peut pas s'annuler, d'où une expression de f sur **chacun** de ces intervalles (avec des constantes a priori différentes). f doit aussi être dérivable sur tout cet intervalle.

On traduit alors dans l'ordre le fait que f soit solution au(x) point(s) de raccord, qu'elle y soit continue et enfin dérivable jusqu'à obtenir suffisamment d'information sur les constantes.

Synthèse On vérifie réciproquement qu'avec ces conditions on a bien la dérivabilité sur l'intervalle et le fait que f vérifie l'équation.

Exemple

E 1 – $(H)\ \forall t\in I,\ \ (t-1)y'+ty=0$ se ramène à $y'+\dfrac{t}{t-1}y=0$.

On résout sur $I=I_k$ pour $k=1 \text{ ou } 2$ avec $I_1=]1,+\infty[$ et $I_2=]-\infty,1[$.

$t\mapsto \dfrac{t}{t-1}$ continue sur I_k. $\displaystyle\int \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t = t+\ln|t-1|+C$ sur I_k.

f solution de (H) sur I_k

si et seulement si $\exists \lambda_k\in\mathbb{K},\ \ \forall t\in I_k,\ \ f(t)=\lambda_k\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|t-1|}$

si et seulement si $\exists \mu_k\in\mathbb{K},\ \ \forall t\in I_k,\ \ f(t)=\mu_k\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t-1}$ car $t-1$ ne change pas de signe sur I_k.

Les solutions sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sont donc les

$$t\longmapsto\begin{cases}\mu_1\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t-1} & \text{si } t>1\\[2mm] \mu_2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t-1} & \text{si } t<1\end{cases}$$

Raccord de solutions : Y a-t-il des solution sur $\mathbb{R}$? Par analyse-synthèse, une solution étant nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme ci-dessus sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Analyse : si c'est le cas, la continuité en 1 impose $\mu_1=\mu_2=0$. On n'a pas besoin d'étudier la dérivabilité en 1 ici (ce qui se ferait avec les taux d'accroissement ou le théorème limite de la dérivée par exemple).

Synthèse : la fonction nulle est bien solution sur $\mathbb{R}$, et c'est donc la seule.

C Équations avec second membre

Théorème 1 : Structure de l'ensemble des solutions

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, $(L)\ \ y'+a(t)y=b(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f\in S_L \iff f-f_0\in S_H$ soit

$$S_L=\left\{f_0+h,\ h\in S_H\right\}=f_0+S_H.$$

Démonstration

$f \in S_L \Longleftrightarrow f' + af = b = f_0' + af_0 \Longleftrightarrow (f - f_0)' + a(f - f_0) = 0$ ■

Méthode 2 : Résoudre une EDL 1

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisée $y' + ay = b$ sur un intervalle sur lequel les fonctions a et b sont continues.

- On résout l'équation homogène associée $y' + ay$ à l'aide d'une primitive A de a : les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Propriété 2 : Principe de superposition

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a, b définies sur I avec $b(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k(t)$ où les α_k sont des scalaires et les b_k des fonctions. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est une solution particulière de (L_k) $y' + a(t)y = b_k(t)$, alors $f_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ est solution de (L) $y' + a(t)y = b(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t)$.

Démonstration

$f_0' + af_0 = \sum \alpha_k(f_k' + af_k) = \sum \alpha_k b_k = b$. ∎

Comment trouver une solution particulière dans le cas général ? Exactement comme pour résoudre l'équation homogène, avec le facteur intégrant : $f' + af = b \iff f'\mathrm{e}^A + af\mathrm{e}^A = b\mathrm{e}^A \iff \left(f\mathrm{e}^A\right)' = b\mathrm{e}^A \iff f = \left(\int b\mathrm{e}^A\right)\mathrm{e}^{-A}$.

Les solutions sont donc à chercher sous la forme $f(t) = g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.

C'est la **méthode de variation de la constante** (à partir de la solution générale de l'équation homogène.)

Méthode 3 : variation de la constante

A partir des solutions de l'équation homogène d'une EDL 1 : $t \mapsto \lambda g(t)$, on cherche une solution particulière de la forme $f_0 : t \mapsto \varphi(t)g(t)$ avec φ dérivable.

On traduit par équivalence que f_0 est solution ce qui conduit à une expression de φ', puis de φ par calcul de primitive.

Remarque

R3 – Les termes en g doivent se simplifier en traduisant que $x \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est solution. Il ne doit rester que du g' (car e^{-A} est solution de (H)).

R4 – On obtient en fait toutes les solutions en primitivant g' avec la constante d'intégration.

2 Équations différentielles du second ordre

a Définitions

Définition 2 : EDL 2

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL 2) toute équation du type

$$(L) \quad \forall t \in D, \quad \alpha(t)f''(t) + \beta(t)f'(t) + \gamma(t)f(t) = \delta(t)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation (L) $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation (H) $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

b Résolution de l'équation homogène

Propriété 3 : Solutions d'une EDL 2 homogène à cœfficients constants

Soit (E) $ar^2+br+c=0$ équation caractéristique associée à (H) $ay''+by'+cy=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$.

(i) *Si (E) possède deux solutions distinctes $r_1,r_2\in\mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions*

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto A\mathrm{e}^{r_1t}+B\mathrm{e}^{r_2t}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{K}^2$.

(ii) *Si (E) possède une solution double $r\in\mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions*

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto (A+Bt)\mathrm{e}^{rt}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{K}^2$.

(iii) *Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, si (E) ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions complexes conjuguées $\alpha\pm\mathrm{i}\omega\in\mathbb{C}$.*
Les solutions de (H) sont les fonctions

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto (A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))\mathrm{e}^{\alpha t}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ soit encore les

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto K\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

avec $(K,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.

Démonstration

Si r est une racine de (E), soit $g(t)=f(t)\mathrm{e}^{-rt}$.
Alors $ag''=-(2ar+b)g'$.

- Si $\Delta=0$, $g''=0$ d'où le résultat.
- Si $\Delta\neq 0$ et $r=r_2$, on a $A,B\in\mathbb{C}$ tel que pour tout x,

$$g(t)=A\mathrm{e}^{-(2r_2+b/a)x}+B=A\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}+B$$

d'où le résultat.

(iii) D'après le résultat dans $\mathbb{C}$, $f(t)=(A_1+\mathrm{i}A_2)\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\omega x}+(B_1+\mathrm{i}B_2)\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\omega x}$.
Mais $f(t)=\mathfrak{Re}(f(t))=((A_1+B_1)\cos(\omega x)+(B_2-A_2)\sin(\omega x))\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec A_1+B_1 et B_2-A_2 qui décrivent tous les réels.
Réciproque facile. ■

c Équations avec second membre

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{K}$ et δ définie sur D, (L) $ay''+by'+cy=\delta(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.
Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f\in S_L\iff f-f_0\in S_H$ soit $S_L=\{f_0+f,\ f\in S_H\}=f_0+S_H$.

Démonstration

Comme à l'ordre 1. ■

Méthode 4 : Résoudre une EDL 2 à cœfficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants $ay''+by'+cy=\delta(t)$,

- on résout l'équation homogène associée $ay''+by'+cy=0$ à l'aide des solutions de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$: les solutions sont les fonctions $t\mapsto Af_1(t)+Bf_2(t)$ avec $A,B\in\mathbb{K}$ et f_2, f_2 données par la propriété

vue précédemment (on rappelle qu'il suffit de trouver deux solutions indépendantes ie non colinéaires).
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $t \mapsto f_0(t) + Af_1(t) + Bf_2(t)$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

Le principe de superposition reste valable, on sait trouver une solution particulière pour quelques seconds membres simples.

- S'il est constant, c'est facile.
- S'il est sous forme polynôme-exponentielle :

Méthode 5 : Second membre polynôme-exponentielle

On sait trouver les solutions de l'équation homogène. Reste à trouver $\boxed{\text{une}}$ solution particulière. On utilise la propriété suivante :

Propriété 4 : Forme d'une solution particulière avec second membre polynôme-exponentielle

Si le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ où P polynôme : il existe $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme $t \mapsto Q(t)t^k e^{\lambda t}$ avec $\deg Q = \deg P$ et k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc.)

Il suffit donc de poser $f_0 : t \mapsto Q(t)t^k e^{\lambda t}$ avec Q de même degré que P et de traduire par équivalente que f_0 est solution pour trouver les cœfficients de Q.

On peut alors conclure en sommant f_0 et une solution quelconque de l'équation homogène associée.

On peut aussi faire un changement de fonction inconnue en posant $z(t) = y(t)e^{-\lambda t}$ et chercher une solution polynomiale sur le même principe que la recherche de solution DSE d'EDL.

Démonstration

Posons $g(t) = f(t)e^{-\lambda x}$ soit $f(t) = g(t)e^{\lambda x}$.
Après simplifications, on obtient f solution si et seulement si

$$ag'' + (2a\lambda + b)g' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)g = A.$$

- Si λ n'est pas racine de (E), $g = \dfrac{A}{a\lambda^2 + b\lambda + c} = C$ convient.
- Si λ est racine simple de (E), on obtient que f est solution si et seulement si g' est solution de $ay' + (2a\lambda + b)y = A$. $g' = \dfrac{1}{2a\lambda + b} = C$ convient, ce qui peut s'intégrer en $g(t) = Cx(+0)$.
- Si λ est racine double de (E), on obtient que f est solution si et seulement si g est solution de $ag'' = A$. $g'' = \frac{A}{a} = C$ convient. Et en intégrant deux fois avec des constantes d'intégration nulles, on obtient $g(t) = Cx^2$. ■

- S'il est sous forme d'un polynôme-sinus ou d'un polynôme-cosinus :

Méthode 6 : Second membre polynôme-cosinus ou polynôme-sinus

Pour une EDL 2 de la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t) \text{ ou } P(t)\sin(\omega t)$$

avec $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega t) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\omega t}\right) \text{ et } \sin(\omega t) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\omega t}\right).$$

On a facilement que si f est solution d $ay'' + by' + cy = P(t)e^{i\omega t}$, alors, comme $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t)$ et $ay'' + by' + cy = P(t)\sin(\omega t)$.

On trouvera donc $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$t \mapsto t^k Q(t)(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$

où k est l'ordre de $\lambda = i\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc) et $Q \in \mathbb{R}[X]$ de même degré que P.

Remarque

R5 – Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, on peut aussi passer par les formules d'Euler : $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ et utiliser le principe de superposition.

- S'il est polynomial :

Méthode 7 : Second membre polynomial

On cherche une solution polynomiale en commençant par trouver le terme de plus haut degré : on écrit $f_0 : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$.

Puis on compare les termes de plus haut degré dans chaque membre de l'équation différentielle, ce qui permet de trouver n.

Enfin, on traduit par équivalence que notre fonction polynomiale du bon degré est solution ce qui permet de trouver ses cœfficients.

C'est même principe que la recherche de solution développable en série entière (et pour cause !)

On peut aussi utiliser la propriété avec le second membre polynôme-exponentielle dans le cas où $\lambda = 0$.

II GÉNÉRALITÉS

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie non nulle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n &+ b_1(t) \\ x_2' &= a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n &+ b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' &= a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n &+ b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions $a_{i,j}$ et b_i étant données.

On cherche les solutions d'un tel système, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dérivables sur un certain intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) &= a_{1,1}(t)\varphi_1(t) + a_{1,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)\varphi_n(t) &+ b_1(t) \\ \varphi_2'(t) &= a_{2,1}(t)\varphi_1(t) + a_{2,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)\varphi_n(t) &+ b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n'(t) &= a_{n,1}(t)\varphi_1(t) + a_{n,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)\varphi_n(t) &+ b_n(t) \end{cases}$$

2 Écriture matricielle

Un système différentiel linéaire s'écrit matriciellement

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

où A est la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les fonctions composantes dans la base canonique sont les $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,

autrement dit $A : t \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \ldots\ldots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \ldots\ldots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$

Une solution de (L) est une application $\Phi \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ au moins dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t \in I \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \;+\; B(t).$$

Remarque

R 6 – On ne sait bien résoudre que si $n = 1$ (programme de MP2I) ou si A constante (voir plus loin).

R 7 – Lorsque A est constante et diagonale, c'est facile ! Corollairement, si A est constante et diagonalisable, c'est facile.

Exercice 1 : CCINP 74

1. **On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. **On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.**

---

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.
   (b) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1+\lambda \end{vmatrix}$.
   En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient, après factorisation : $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$.
   On obtient aisément, $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On pose $e'_1 = (0,1,0)$, $e'_2 = (1,0,-1)$ et $e'_3 = (1,0,1)$.
   Alors, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.
2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$. Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
   Alors, $(S) \iff X' = AX$. On note P la matrice de passage de la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ à la base e'.
   D'après 1., $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et, si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.
   Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$. On pose alors $X_1 = P^{-1}X$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.

   Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \iff X'_1 = DX_1 \iff \begin{cases} x'_1 &=& x_1 \\ y'_1 &=& -y_1 \\ z'_1 &=& 3z_1 \end{cases}$
   On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.
   On trouve $\begin{cases} x_1(t) &=& ae^t \\ y_1(t) &=& be^{-t} \\ z_1(t) &=& ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$. On obtient $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & be^{-t}+ce^{3t} \\ y(t) & = & ae^{t} \\ z(t) & = & -be^{-t}+ce^{3t} \end{array}\right.$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : CCINP 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **Démontrer que A n'est pas diagonalisable.**
2. **On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.**

   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. **En déduire la résolution du système différentiel $\left\{\begin{array}{l} x' = -x-4y \\ y' = x+3y \end{array}\right.$.**

---

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp} A = \{1\}$.
   Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2, donc égale à I_2.
   Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.
2. $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.
   Pour $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (-1,0)$ (choisi de sorte que $f(v_2) = v_2 + v_1$) on obtient une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
3. On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore, grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.
   Cela nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} a' = a+b \\ b' = b \end{array}\right.$ de solution générale $\left\{\begin{array}{l} a(t) = \lambda e^t + \mu t e^t \\ b(t) = \mu e^t \end{array}\right.$

   Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \big((2\lambda-\mu)+2\mu t\big)e^t \\ y(t) = \big(-\lambda-\mu t\big)e^t \end{array}\right.$

3 Équation scalaire d'ordre n

Définition 3 : EDL n

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \tag{L}$$

toute fonction f n fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$, $f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$.

Propriété 5 : Écriture matricielle

Une telle équation se réécrit sous forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ en posant

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque

R8 –

R9 – Se ramener à un système différentiel d'ordre 1 en dimension n n'est pas la seule façon de résoudre une équation différentielle d'ordre n.
Ainsi, lorsque les cœfficients sont constants, les solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 y = 0$$

sont les éléments de $\operatorname{Ker} P(D)$ où

$$P = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

et $D : f \mapsto f'$ est l'opérateur de dérivation, ce noyau se réécrivant avec le lemme de décomposition des noyaux.
Par exemple, pour une équation $y'' + \alpha y + \beta = 0$ dont l'équation caractéristique $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2, on aura

$$\begin{aligned} S_H &= \operatorname{Ker}\left[\left(X^2 + \alpha X + \beta\right)(D)\right] \\ &= \operatorname{Ker}\left[\left((X - r_1\,\mathrm{id})\,(X - r_2)\right)(D)\right] \\ &= \operatorname{Ker}(D - r_1) \oplus \operatorname{Ker}(D - r_2\,\mathrm{id}) \end{aligned}$$

car $(X - r_1) \wedge (X - r_2) = 1$, ce qui permet de retrouver $S_H = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.
En résolvant le système, on aurait diagonalisé la matrice (compagne) dont λ_1, λ_2 sont les valeurs propres distinctes et appliqué la même méthode vue dans CCINP 74.
L'exercice ci-dessous a été vu dans le chapitre sur la réduction.

Exercice 3 : Résoudre $y^{(4)} = y$

Soit E l'espace des fonctions 4 fois dérivables, D opérateur de dérivation.
On cherche donc $\operatorname{Ker}\left((X^4 - 1)(D)\right)$ avec $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)$.
Les solutions sont les $t \mapsto Ae^t + Be^{-t} + C\cos t + E\sin t$ pour $A, B, C, E \in \mathbb{K}$.

4 Problèmes de Cauchy et théorème de Cauchy linéaire

Propriété 6 : Écriture intégrale de solution à un problème de Cauchy

Soit A et B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Φ est solution du ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

si et seulement si $\Phi \in \mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] \mathrm{d}u.$$

Démonstration

Théorème fondamental de l'Analyse. ■

Théorème 3 : de Cauchy linéaire

Soit A et B deux applications ***continues sur*** *I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration : hors programme

Une idée est de trouver un point fixe de $T : \Phi \mapsto \left(t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)\Phi(u) + B(u)]\,\mathrm{d}u\right)$... mais on n'a pas les outils pour le faire facilement... (Il existe d'autres méthodes.) ■

Exercice 4 : Toujours nulle ou jamais nulle

Soit $\Phi\ :\ I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \qquad (H)$$

où $A\ :\ I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle I. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in I, \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in I, \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in I \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in I \quad \Phi(t) = (0)$).

Exercice 5 : Périodicité

Soit T un réel > 0, $A\ :\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$

Indication : on remarquera que Φ est T-périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi\ :\ t \mapsto \Phi(t+T)$.

Corollaire 1 : Cas des équations scalaires d'ordre n

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, si $t_0 \in I$, si $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution f sur I de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

telle que $f(t_0) = y_0,\ f'(t_0) = y_1, \ldots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ (encore appelé ***problème de Cauchy****).*

Remarque

R 10 – ⚠ On ne peut rien dire en général sur l'existence ou l'unicité de solutions qui vérifierait $f(t_1) = y_1, \ldots, f(t_n) = y_n$ (problème de Dirichlet, ou problème aux limites).

Corollaire 2 : Exponentielle d'une somme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u+v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A+B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

Démonstration

1re solution : c'est un produit de Cauchy. Problème : au programme, seul le produit de Cauchy sur $\mathbb{C}$.

Autre solution : C'est un... problème de Cauchy ! Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi_1 : t \mapsto \exp(t(A+B))E_1$.

Alors $\phi_1' : t \mapsto (A+B)\phi_1(t)$ donc Φ_1 est solution du problème de Cauchy $X' = (A+B)X$ et $X(0) = E_1$.

Puis $\Psi_1 : t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)E_1$ est tel que $\psi_1' : t \mapsto (A+B)\psi_1(t)$ et $\Psi_1(0) = E_1$.

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (ici la matrice, $A+B$, est constante donc continue), $\Phi_1 = \Psi_1$.

Cela signifie que la première colonne de $\exp(t(A+B))$ est égale à la première colonne de $\exp(tA)\exp(tB)$.

En réitérant sur les autres vecteurs de la bases canonique, on obtient $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.

L'évaluation en $t = 1$ permet de conclure. ∎

5 Application des exponentielles à la résolution de systèmes différentiels à cœfficients constants

Théorème 4 : Expression exponentielle des solutions d'un système à cœfficients constants

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les solutions à l'équation différentielle $X' = AX$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA)C$ où $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

L'unique solution au problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ est la fonction $t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$.

Démonstration

Ce sont bien des solutions et C en est la valeur en 0 : on les a toutes soit par théorème de structure soit par théorème de Cauchy-linéaire. ∎

Remarque

R 11 – ⚠ Mettre le C à gauche n'aurait aucun sens !

Méthode 8 : Cas diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** diagonalisable.

On diagonalise : $A = PDP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = DY$ qui se résout très simplement (système différentiel diagonal). Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

On obtient alors, en notant $V_1, \dots V_n$ la base de vecteurs propres constituant les colonnes de P et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A correspondantes, que les solutions sont les

$$\boxed{t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} V_k}$$

pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$. On retrouve ce résultat en exprimant les solutions sous la forme

$$\begin{aligned}\exp(tA) \times C = P \times \exp(tD) \times P^{-1}C &= P \times \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right) \times C' \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} V_1 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 6 : CCINP 74

On retrouve les résultats.

Méthode 9 : Cas trigonalisable non diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** trigonalisable non diagonalisable.

On trigonalise : $A = PTP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = TY$ triangulaire qui se résout de bas en haut. Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

De nouveau, on peut exprimer les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tT) \times P^{-1}C$$

où $\exp(tT)$ est encore triangulaire, avec, sur la diagonale, les exponentielles des cœfficients diagonaux de tT, mais les autres cœfficients ne se calculent pas simplement en général.

Exercice 7 : CCINP 75

On retrouve les résultats.

On remarque que $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ avec N nilpotent ce qui permet de calculer facilement $\exp(tT)$.

Méthode 10 : Cas non trigonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** non trigonalisable.

Alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On résout dans $\mathbb{C}$ et on cherche les solutions réelles.

Exemple

E 2 – $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm \mathrm{i}$, de vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

On trouve une base de solutions $\begin{pmatrix} \cos \\ \cos + \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin \\ -\cos + \sin \end{pmatrix}$.

6 Point de vue vectoriel

On peut, plus généralement, parler d'équation différentielle avec $a : I \to \mathscr{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. Pour tout $t \in I$, $a(t)$ est un endomorphisme de E et $b(t)$ un vecteur de E.

L'équation s'écrit

$$x' = [a(t)]\,(x) + b(t) \qquad (L_1)$$

et une solution est une fonction $f : I \to E$ dérivable telle que pour tout $t \in I$, $f'(t) = [a(t)]\,(f(t)) + b(t)$.

En choisissant une base $\mathscr{B}$ de E, on représente, pour tout $t \in I$, $a(t)$ par la matrice carrée $A(t)$, $b(t)$ par la colonne $B(t)$ et $f(t)$ par la colonne $\Phi(t)$.

Les propriétés de régularités de A, B, Φ sont les mêmes que celles de a, b, f et f est solution de (L_1) si et seulement si Φ est solution de

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L_2)$$

Ainsi, les théorèmes vu avec l'écriture matricielle restent valables.

Propriété 7 : Écriture intégrale de solution à un problème de Cauchy

*Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. f est solution du **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = [a(t)]\,(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

si et seulement si $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$ telle

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big([a(u)]\,(f(u)) + b(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 5 : de Cauchy linéaire

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \big[a(t)\big](x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Tous les résultats qui suivent seront énoncés matriciellement mais pourront sur le même schéma, être traduits vectoriellement.

7 Principe de superposition

Propriété 8 : Principe de superposition

Soient A, B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement tel que $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les B_i sont continues de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, Φ_i est une solution de $(E_i) \quad X' = A(t)X + B_i(t)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i$ est solution de $(E) \quad X' = A(t)X + B(t)$.

Démonstration

C'est une conséquence quasi-immédiate de la linéarité de $\Phi \mapsto \Phi' - A\Phi$. ■

III Structure de l'espace des solutions

On note

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{L}$$

et

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

l'équation homogène associée, ainsi que S_L et S_H leurs ensembles de solutions respectifs.

1 Équation homogène

Théorème 6 : de structure de l'équation homogène

Si $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, et $\dim S_H = n$.

Démonstration

Vérification immédiate par caractérisation des sous-espaces vectoriels, en notant qu'une solution est une fonction dérivable Φ telle que $\Phi' = A\Phi$ qui est continue, donc est bien automatiquement de classe $\mathscr{C}^1$.

La dimension est une conséquence de la propriété suivante. ■

Propriété 9 : S_H est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\Phi \mapsto \Phi(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de S_H sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration

C'est un morphisme, et, par le théorème de Cauchy linéaire, on a bien le bijectivité. ■

Exercice 8 : Soit $(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$ une base de solutions de l'équation homogène (H). Montrer que pour tout $t \in I$, $(\Phi_1(t),\dots,\Phi_n(t))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si on a des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $\lambda_1\Phi_1(t)+\dots+\lambda_n\Phi_n(t)=0$, alors la solution $\lambda_1\Phi_1+\dots+\lambda_n\Phi_n$ de (H) est nulle en un point, elle est donc nulle par unicité (théorème de Cauchy-Lipschitz) et comme elle forme une famille libre, tous les scalaires sont nuls.

Exercice 9

On souhaite déterminer une base de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) &= tx(t)-y(t) \\ y'(t) &= x(t)+ty(t) \end{cases}$$

1. **Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$ et conclure.**
2. **Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.**

On se ramène à $u' = -v$ et $v' = u$ avec en particulier $u'' = -u$. D'où un système fondamental de solution $\left(t \mapsto \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t^2/2}, t \mapsto \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t^2/2}\right)$.

Corollaire 3 : Cas des équations d'ordre n

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Exercice 10 : CCINP 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. **Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.**
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. **Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?**

---

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
   Pour tout $x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1}$.

Donc $x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\right)x^n$.

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0$.
C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N},\ na_{n+1}=(n+1)a_n$.
Ce qui revient à : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=na_1$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x\mapsto a_1\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=a_1x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{a_1x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1,1[$, avec $a_1\in\mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x\in]0,1[,\ f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
Or, d'après le cours, comme les fonctions $x\longmapsto x(x-1)$, $x\longmapsto 3x$ et $x\longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et que la fonction $x\longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est un plan vectoriel.
D'où l'absurdité.

2 Équation complète

Définition 4 : Sous-espace affine

On dit que la partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace affine de E lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un $x\in E$ tels que

$$\mathscr{F}=x+F=\{x+u,\quad u\in F\}$$

F est alors unique, et est appelé direction de $\mathscr{F}$. En revanche, pour n'importe quel $x\in\mathscr{F}$, on a $\mathscr{F}=x+F$.

Théorème 7 : de structure de l'équation complète

L'ensemble S_L des solutions de l'équation « complète » (L) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I,\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, de direction S_H, donc de dimension n.

Démonstration

Comme pour toute équation linéaire, on prend une solution particulière Φ_0 (qui existe bien par théorème de Cauchy-Lipschitz), et alors Φ est solution si et seulement si $\Phi'-A\Phi=\Phi_0'-A\Phi_0$ si et seulement si $\Phi-\Phi_0\in S_H$ par linéarité.

Remarque

R 12 – Il existe une **méthode de variation des constantes**, similaire à celle de la dimension 1, permettant de trouver une solution particulière à partir d'une base de solutions du système différentiel homogène associé (en faisant varier les cœfficients d'une combinaison linéaire des fonctions de cette base, donc).

Corollaire 4 : Cas des équations d'ordre n

Si $a_0,a_1,\dots,a_{n-1},b$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation « complète »

$$y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)y=b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, donc de dimension n.

IV ÉDL SCALAIRES D'ORDRE 2

1 Position du problème, système associé

Les équations différentielles linéaire d'ordre 1 ont été étudiées en première année et les résultats des parties précédentes permettent de retrouver ceux du programme de MP2I.

Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 étudiées alors se restreignaient au cas des cœfficients constant et d'un second membre combinaison linéaire de « polynômes-exponentielles ».

La théorie vue cette année permet d'étendre l'étude à toutes les équations à cœfficients et second membre continus.

On suppose donc que a, b, c, d sont quatre fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{L}$$

d'équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{H}$$

On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 **en supposant que** a **ne s'annule pas sur** I (très important) et en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{L_{mat}}$$

où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c(x)}{a(x)} & -\dfrac{b(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$: f est solution de (L) si et seulement si $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ est solution de (L_{mat}).

2 Existence et unicité, structure

Les résultats vus à l'ordre n se traduisent pour $n = 2$.

Théorème 8 : Structures des ensembles de solutions, EDL 2

On suppose, toujours, que a, b, c, d sont continues sur I et que a ***ne s'annule pas sur*** *I.*

- *Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (L) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$ (problème de Cauchy).*
- *L'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ (donc de dimension 2).*
- *Pour tout $x_0 \in I$, $f \mapsto \big(f(x_0), f'(x_0)\big)$ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$.*
- *L'ensemble S_L des solutions de (L) est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H : $S_L = f_0 + S_H$ où f_0 est une solution particulière.*
- *Le principe de superposition s'applique.*

Exercice 11 : dans un problème d'écrit

Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.

Une implication est évidente. Pour l'autre, f est paire si et seulement $f = -\widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \mapsto f(-x)$. Or f est solution si et seulement si $-\widehat{f}$ l'est. Il suffit alors d'utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy avec $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y_0' = f'(0)$

Exercice 12 : dans un problème d'écrit

Soit a, b deux fonctions T-périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

est T-périodique si et seulement si $f(0)=f(T)$ et $f'(0)=f'(T)$.

Utiliser le théorème d'unicité, appliqué à f et $x \longmapsto f(x+T)$ où f est une solution.

3 Wronskien

Remarquons que le couple (f,g) est une base de solutions de (H) si et seulement si le couple (Φ,Ψ) où $\Phi=\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $\Psi=\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ en est un de $(H_{mat})\quad Y'=A(x)Y$ (une implication est évidente, et l'autre n'est pas difficile).

Définition 5 : Wronskien

Si f, g sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur **wronskien**

$$w(f,g)\ :\ x \longmapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x)-g(x)f'(x).$$

Exercice 13 : Déterminer une équation différentielle dont le wronskien est solution.

On vérifie que pour tout $x\in I$, $a(x)w'(x)+b(x)w(x)=0$.

Propriété 10 : Base de solutions et wronskien

Soit f, g deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \qquad (H)$$

où a,b,c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note w (au lieu de $w(f,g)$) le wronskien de f et g. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (f,g) est libre ie une base de S_H (on parle aussi de système fondamental de solutions).

(ii) $\forall x\in I,\quad w(x)\neq 0$.

(iii) $\exists x\in I,\quad w(x)\neq 0$.

Démonstration

Avec l'équation différentielle de l'exercice précédent, (ii) est équivalent à (iii) par le théorème de Cauchy.

Puis (iii) $\Rightarrow$ (i) : si on a un x tel que $w(x)\neq 0$, $(f(x),g(x))$ est libre donc (f,g) l'est en repassant par une combinaison linéaire nulle.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Si, réciproquement, (f,g) est libre, soit $x\in I$ et λ,μ tels que $\lambda\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}=0$. Alors la solution $\lambda\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ du système homogène associé est nulle en un point, elle est donc nulle par unicité (théorème de Cauchy). En particulier, $\lambda f+\mu g=0$ donc $\lambda=\mu=0$. Comme $\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$ sont libres, on a bien $w(x)=0$. ■

Exercice 14 : Déterminer, en utilisant le wronskien, une base de solutions de $y''+\omega^2y=0$ où $\omega>0$.

$x\mapsto\cos(\omega x)$ et $x\mapsto\sin(\omega x)$ sont solutions, leur wronskien vaut $\omega\neq 0$.

Exercice 15

Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0)=g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.

Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0.

Leur wronskien serait nul en x_0.

Exercice 16 : EDL 2 newtoniennes

Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite newtonienne)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

$w' = 0$, difficile de faire plus simple, et on retrouve le résultat du premier exercice.

Exercice 17 : Dans un problème d'écrit

On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit (f,g) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

Si elle sont impaires, elle sont nulles en 0, leur wronskien est nul. Si elles sont paires, leurs dérivées sont impaires, même chose. On peut aussi conclure en utilisant le théorème d'existence et une contradiction.

Exercice 18 : Oral Mines

Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit f solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que f s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $g : x \longmapsto f(x+1)$. Alors g est solution, et $w(f,g)$ est nul en 0. Donc (f,g) est liée. Si $f = \tilde{0}$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe α tel que $g = \alpha f$. On conclut alors par récurrence sur k pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{N}$, puis par récurrence sur $-k$ pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{Z}^-$.

4 Cas où on connaît déjà une solution de (H)

Méthode 11 : Trouver une deuxième solution de (H)

Lorsqu'une solution f de (H) est connue et ne s'annule pas sur I, on peut chercher une deuxième solution sous la forme $g : x \mapsto \lambda(x) f(x)$ avec λ deux fois dérivable. C'est une méthode de variation de la constante.

Si f s'annule, cela peut aussi fonctionner parfois.

En effet, on a alors $g' = \lambda' f + \lambda f'$ puis $g'' = \lambda'' f + 2\lambda' f' + \lambda f''$ donc g est solution de (H) si et seulement si

$$a \cdot (\lambda'' f + 2\lambda' f' + \lambda f'') + b \cdot (\lambda' f + \lambda f') + c \cdot \lambda f = 0$$

ce qui, vu que f est solution, se réduit à

$$af\lambda'' + (2af' + bf)\lambda' = 0$$

équation d'ordre 1 en λ' permettant de trouver λ.

Exercice 19 : Résoudre sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

5 Cas où les cœfficients sont polynomiaux

Méthode 12

Lorsque les cœfficients et le second membre sont polynomiaux, on peut essayer l'une des méthode suivantes pour trouver des solutions de (H)

- Trouver une solution sous la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$: particulièrement efficace pour les équations de la forme $\beta x^2 y'' + \gamma x y' + \delta y = 0$ où β, γ, δ sont des scalaires, dites d'Euler.
- Trouver des solutions polynomiales, en commençant par les termes de plus haut degré pour trouver le degré.
- Trouver des solutions DSE.
- Lorsque l'on connaît déjà une solution, utiliser la méthode du paragraphe précédent.

Exercice 20 : Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ $(H)\quad x^2y''-3xy'-5y=0$.

Équation d'Euler, la première méthode conduit aux solutions $x\mapsto x^{-1}$ et $x\mapsto x^5$, le wronskien permet de voir qu'il s'agit bien d'une base de solutions.

Exercice 21 : Résoudre sur $]1,+\infty[$ $(H)\quad \left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

On cherche des solutions polynomiales non nulles, le terme de plus haut degré nous dit que le degré est 1 ou 2.

On cherche alors les solutions de la forme $x\mapsto ax^2+bx+c$.

On trouve toutes les solutions : $x\mapsto a(x^2+1)+bx$ qui forment bien un plan vectoriel.

Exercice 22 : Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy''+y'-y=0$. Terminer la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $t=\sqrt{2x}$.

On cherche les solutions DSE, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2n+1)(n+1)a_{n+1}=a_n$. Soit $a_0=0$ et il s'agit de la fonction nulle.

Soit $a_0\neq 0$ et d'Alembert nous donne un rayon de convergence $+\infty$.

On exprime ensuite la solution $f(x)=a_0\operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ si $x\geqslant 0$ et $a_0\cos\left(\sqrt{-2x}\right)$ si $x\leqslant 0$.

Cela donne une droite de solution engendrée par $x\mapsto\operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il faut trouver une solution indépendante. La variation de la constante donne des calculs pénibles. On peut deviner un $\operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$...

Effectuons le changement de variable : on pose $z(t)=z\left(\sqrt{2x}\right)=y(x)=y\left(t^2/2\right)$, et on a bien z deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si y l'est.

Puis, pour tout $t>0$, $z'(t)=ty'\left(t^2/2\right)$, $z''(t)=t^2y'\left(t^2/2\right)+y'\left(t^2/2\right)$ donc notre équation est équivalente à $z''=z$ d'où z, d'où nos solutions $x\mapsto\lambda\operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)+\mu\operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$.

6 Variation des constantes

Pour trouver une solution particulière de (L) connaissant une base de solutions (f,g) de (H), on peut appliquer la méthode de variation des constantes (cas général hors-programme) à la version vectorialisée de (L) : $(L_{mat})\quad Y'=A(x)Y+B(x)$ où $Y=\binom{y}{y'}$.

On cherche donc des **fonctions** λ et μ dérivables telles que $\binom{f_0}{f_0'}=\lambda\binom{f}{f'}+\mu\binom{g}{g'}$ soit solution de (L_1), c'est-à-dire $f_0=\lambda f+\mu g$ solution de (L) telle que $f_0'=\lambda f'+\mu g'$ ce qui revient à vérifier

$$\lambda' f+\mu' g=0 \tag{1}$$

On calcule alors

$$f_0''=\lambda' f'+\lambda f''+\mu' g'+\mu g''.$$

Puis,

$$af_0''+bf_0'+cf_0=a\lambda' f'+a\mu' g'=d$$

si et seulement si

$$\lambda' f'+\mu' g'=\frac{d}{a} \tag{2}$$

Finalement, f_0 est solution de (L) si et seulement si on a un système à deux équations d'inconnues λ' et μ', dont le déterminant est le wronskien, ce qui permet de les calculer.

Méthode 13 : Variation des constantes

Connaissant une base (f,g) de solutions de (H), on cherche une solution particulière f_0 de (L) telle que

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$$

avec λ, μ deux fonctions dérivables sur I.

Cela revient à poser supposer $f_0 = \lambda f + \mu g$ et $f_0' = \lambda f' + \mu g'$ et alors $\lambda' f + \mu' g = 0$.

En réinjectant dans l'équation (L), on trouve un système en λ' et μ' puis on les détermine et on primitive.

Ce système sera systématiquement

$$\boxed{\lambda' \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{pmatrix}}$$

où $\dfrac{d}{a}$ est le second membre de l'équation normalisée.

Connaissez **par cœur** ce système et utilisez-le directement en pratique.

Exercice 23 : CCINP 31

1. **Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.**
2. **Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.**

---

1. En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.

   Donc, $x \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

   Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
   Par la méthode de variation des constantes,

   on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$ avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}$.

   $\lambda(x) = \dfrac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

   D'après la question 1., $\mu(x) = \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ convient.

   On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \dfrac{1}{4}\cos^5 x + \left(\dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).

   Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :

   $$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + y_p(x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

V Exemples d'ÉDL scalaires non normalisées

Il s'agit d'équations différentielles de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ou

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

où a, b, c, d sont continues sur I mais où a peut éventuellement s'annuler.

Méthode 14 : Raccord de solutions

Pour résoudre une équation différentielle scalaire non normalisée, on résout classiquement sur chaque intervalle I_k sur lequel a ne s'annule pas **en prenant soin d'indexer la ou les constantes par l'indice k de l'intervalle.** Puis, on fait un raccord de solution en raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse

- On traduit qu'on est solution sur chaque intervalle I_k avec l'expression trouvée.
- On traduit l'équation aux points d'annulation de a pour obtenir éventuellement la valeur de la solution en ces points.
- On traduit la dérivabilité de la solution aux point de raccord en commençant en général par s'intéresser à la continuité.

  Pour la dérivabilité, on utilise des taux d'accroissement ou des développements limités.

  Le théorème de la limite de la dérivée est intéressant, mais on peut avoir des solutions dérivables au point de raccord sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Synthèse Une fois les informations trouvées sur les constantes, la synthèse valide les solutions.

Exercice 24 : CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. **Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**
2. **Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**
3. **L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?**

---

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$, alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant $f(0) = 0$.
   Par contre, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

Exercice 25 : Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$.

Sur $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k)\cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$. (Reconnaître la dérivée d'un quotient en divisant par $\cos^2$).

Solutions sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto (\sin t + \lambda)\cos t$. Pour le raccord, effectuer un développement limité à gauche et à droite de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Exercice 26 : Écrit CCP 2005

Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. **Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.**
2. **Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?**
3. **Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?**

Soit l'équation différenielle linéaire du premier ordre, homogène : $(E_n) \quad xy' - ny = 0 \quad$ *où* n est un entier strictement positif.

1. On obtient sans mal que sur I l'espace des solutions est $\mathrm{Vect}(x \in I \mapsto x^n)$ et sur J, $\mathrm{Vect}(x \in J \mapsto x^n)$.
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme dérivable en 0, sa courbe est donc une droite.
   En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.
3. Supposons $n > 1$, soit f une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$
   En évaluant l'équation en 0, on tire $f(0) = 0$.
   La continuité en 0 n'impose aucune condition sur α et β, la dérivabilité non plus car $\dfrac{\alpha x^n - 0}{x} = \alpha x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ et $\dfrac{\beta x^n - 0}{x} = \beta x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ car $n > 1$.
   Réciproquement : toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \leqslant 0 \\ \beta x^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$