Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercices vus en cours

1 Montrer que l'image et le noyau de u^* sont respectivement l'orthogonal du noyau de u et l'orthogonal de l'image de u.

2 **CCINP 63** Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Solution de 2 : CCINP 63

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
   On considère u la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, définie par $u(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. On a bien $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.
2.
   - Prouvons que i. $\Longrightarrow$ iii.
     Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Prouvons que $\forall x \in E^2$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
     Soit $x \in E$. Alors
     $$\|u(x)\|^2 = \big(u(x)\big|u(x)\big) = \big(x\big|u^* \circ u(x)\big) = \big(x\big|u \circ u^*(x)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(x)\big) = \big\|u^*(x)\big\|^2$$
   - Prouvons que iii. $\Longrightarrow$ ii.
     On suppose que $\forall x \in E^2$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. Prouvons $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
     D'après une identité de polarisation,
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\big\|u(x) + u(y)\big\|^2 - \|u(x)\|^2 - \big\|u(y)\big\|^2\right).$$
     Or, u est linéaire donc $\big\|u(x) + u(y)\big\|^2 = \big\|u(x + y)\big\|^2$.
     De plus par hypothèse, $\big\|u(x + y)\big\| = \big\|u^*(x + y)\big\|$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ et $\big\|u(y)\big\| = \big\|u^*(y)\big\|$. Donc
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\big\|u^*(x + y)\big\|^2 - \big\|u^*(x)\big\|^2 - \big\|u^*(y)\big\|^2\right).$$
     Or u^* est linéaire donc $\big\|u^*(x + y)\big\| = \big\|u^*(x) + u^*(y)\big\|$. Donc
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\big\|u^*(x) + u^*(y))\big\|^2 - \big\|u^*(x)\big\|^2 - \big\|u^*(y)\big\|^2\right).$$

Or, d'après une identité de polarisation,

$$(u^*(x)|u^*(y)) = \frac{1}{2}\left(\left\|u^*(x)+u^*(y))\right\|^2 - \left\|u^*(x)\right\|^2 - \left\|u^*(y)\right\|^2\right).$$

Donc $\left(u(x)\middle|u(y)\right) = \left(u^*(x)\middle|u^*(y)\right)$.

- Prouvons que ii. $\Longrightarrow$ i.
  On suppose que $\forall (x,y)\in E^2$, $\left(u(x)\middle|u(y)\right) = \left(u^*(x)\middle|u^*(y)\right)$. Prouvons que $u\circ u^* = u^*\circ u$.
  On a, pour tout $x,y\in E$,
  $$\left(u^*\circ u(x)\middle|y\right) = \left(u\circ u^*(x)\middle|y\right).$$
  Par l'unicité définissant l'adjoint, on tire $u^*\circ u = u\circ u^*$.
  Elle se retrouve en remarquant que pour tout $x,y\in E$,
  $$\left(u^*\circ u(x) - u\circ u^*(x)\middle|y\right) = 0$$
  donc pour tout $x\in E$, $u^*\circ u(x) - u\circ u^*(x)\in E^\perp = \{0_E\}$.

3 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\}$ est compact.

Solution de 3 : Trèèèèès classique

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M\mapsto M^\intercal M$ (bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|^2 = \mathrm{tr}(M^\intercal M)$, on a $\mathcal{O}(n)\subset \overline{B}(0,\sqrt{n})$.

4 **Classique : décomposition QR** Soit $A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'une matrice $Q\in\mathcal{O}(n)$ et d'une matrice R triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.
   On pourra interpréter A comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la base formée des vecteurs colonnes de A.
2. Si (Q_0,R_0) est un couple qui convient, trouver tous les couples solution.

Solution de 4 : Classique : décomposition QR

1. Si $(c_1,\dots,c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A, A est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{C} = (c_1,\dots,c_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathscr{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathscr{C}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :
   $$\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{C}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$
   Mais $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Gram-Schmidt garantit que, pour tout k,
   $$c_k\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$$
   où l'on note $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ (on a en effet, pour tout k,
   $$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(c_1,\dots,c_k)\quad)$$
   et donc…ça marche.

2. À quelle condition a-t-on

$$QR = Q_0R_0$$

où Q et Q_0 sont orthogonales, R et R_0 triangulaires supérieures inversibles ?

On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q_0^{-1}Q = R_0R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm1, 0, \ldots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ±1 car il est unitaire. Ainsi de suite…Bref,

$$\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{D_\epsilon \ ; \ \epsilon \in \{-1,1\}^n\right\}$$

où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q_0R_0 \iff \exists \epsilon \in \{-1,1\}^n \quad R = D_\epsilon R_0 \text{ et } Q = Q_0D_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR, au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

6 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Solution de 6 :

$a = (1,1,1)$ dirige l'axe de la rotation.

Son orthogonal est $P : x + y + z = 0$ dirigé par $b = (1,0,-1)$ et $c = (1,-2,1)$, ils sont orthogonaux.

D'où une base orthonormale adaptée de $\mathbb{R}^3$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

Dans cette base, la matrice de la rotation est $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice recherchée est alors $PMP^\intercal$ où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

La matrice recherchée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$.

Solution de 7 :

$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0$.

$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0$.

$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0.$
$\|C_1\|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2 + 1/2 = 1.$
$\|C_2\|^2 = \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1.$
$\|C_3\|^2 = \left(\sqrt{6}/6\right)^2 + \left(\sqrt{6}/3\right)^2 + \left(\sqrt{6}/6\right)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1.$
Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

8 Montrer que si u est autoadjoint, alors $\operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u = E$

9 **CCINP 68** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Solution de 9 : CCINP 68

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) On obtient $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (c) $\mathrm{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\mathrm{tr} A = 3$ et que $\mathrm{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver

une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.

$E_3(f) = \text{Vect}(1,-1,1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
$\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
On les normalise et on pose $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.
On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

10 CCINP 66

Solution de 10 : CCINP 66

On introduit, sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $\|\|$, associée au produit scalaire canonique, définie par :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\| = \sqrt{X^\intercal X}$.

1. Voir cours.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Par théorème spectral, on a P orthogonale et D diagonale réelles telles que $A = PDP^\intercal = PDP^{-1}$.
   Donc $A^2 = PD^2P^\intercal$ est symétrique et, vu les cœfficients de D^2, $\operatorname{Sp} A^2 = \left\{\lambda^2,\ \lambda \in \operatorname{Sp} A\right\} \subset \mathbb{R}^+$.
   Donc $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$. Prouvons que $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Le résultat hors-programme de diagonalisation simultanée de matrices commutant pourrait permettre de conclure rapidement. On va s'en passer.
   On utilise la définition. D'après la question précédente, $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$, et A^2 commute avec B.
   On a alors $\left(A^2B\right)^\intercal = B^\intercal(A^\intercal)^2 = A^2B$.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $$X^\intercal A^2 BX = X^\intercal A^\intercal BAX = Y^\intercal BY \geqslant 0$$
   où $Y = AX$.
   On a donc bien $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Remarque : avec $B = I_n$, on retrouve la positivité de A^2 vue à la question précédente.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   On reprend le théorème spectral : $A = PDP^\intercal$ où $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
   Alors $B = PD'P^\intercal \in S_n^+(\mathbb{R})$ où $D' = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$ convient, d'après 1.

11 [Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée** : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$.
   Que dire de B si A est supposée définie positive ?
   On montre l'unicité de B géométriquement dans la question suivante.
2. Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.

(a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2=u$.
(b) En utilisant le fait que, si $h^2=u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?

3. Montrer que si $A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A=M^\intercal M$.
4. **Décomposition polaire** : Soit $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\intercal A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe un unique couple $(Q,S)\in\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A=QS$.
5. Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.
6. Étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant les résultats classiques de densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathscr{O}(n)$.

Solution de 11 : [Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée** : Par théorème spectral, il existe $P\in\mathscr{O}(n)$ et $D\in\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ (i.e. diagonale) telles que

$$A=PDP^\intercal=PDP^{-1}$$

Et $D=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de$D$, donc de A. Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $D'=\text{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$ et $B=PD'P^{-1}=PD'P^\intercal$, on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2=A$.
Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbb{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB=I_n$), donc B, étant déjà positive, est définie positive.

2. (a) Conséquence de la question 1. On peut aussi par le théorème spectral, se donner $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthodiagonalisante de u avec pour tout i, $u(e_i)=\lambda_i e_i$ et poser v l'unique endomorphisme tel que pour tout i, $u(e_i)=\sqrt{\lambda_i}e_i$. Vu la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$, il convient.
(b) u est un polynôme en h, donc commute avec. Comme dans le classique de la diagonalisation simultanée, on considère $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u, stable par h, qui induit dessus un endomorphisme h_λ autoadjoint donc diagonalisable.
Mais comme h_λ est positif et $h_\lambda^2=u_\lambda=\lambda\,\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$, nécessairement $h_\lambda=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$ (se voit facilement par représentation matricielle). Autre argument possible : si μ valeur propre de h_λ, $\mu^2=\lambda$ et $\mu\geqslant 0$ donc $\mu=\sqrt{\lambda}$. Et comme h_λ est diagonalisable avec une seule valeur propre, on a bien $h_\lambda=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$.
Comme $E=\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,u}E_\lambda(u)$ (car u est diagonalisable), h est bien unique.

3. $M=D'P^\intercal$ où D' comme ci-dessus convient.
4. **Décomposition polaire** : Une analyse permet de voir que si on a une telle décomposition $A=QS$, alors $A^\intercal=S^\intercal Q^\intercal=SQ^{-1}$ donc $A^\intercal A=S^2$.
Or $A^\intercal A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\intercal(A^\intercal A)X=Y^\intercal Y\qquad\text{où } Y=AX$$

Or, si $X\neq(0)$, $Y=AX\neq(0)$ car A est inversible, donc $Y^\intercal Y=\|Y\|^2>0$.
En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que

$$S^2=A^\intercal A$$

Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule

$$Q^{\mathsf{T}}Q = \left(S^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

Donc Q est orthogonale.

L'unicité repose, d'après la remarque initiale, sur le fait qu'une matrice symétrie définie-positive a une unique racine carrée définie positive.

5. On a $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{P}$ avec $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ fermé en tant que sous-espace de dimension finie et $\mathscr{P} = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^{\mathsf{T}}MX \geqslant 0\right\} = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0,+\infty[)$ où pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_X : M \mapsto X^{\mathsf{T}}MX$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $f_X^{-1}([0,+\infty[)$ est fermée, donc $\mathscr{P}$ l'est donc $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

   On peut aussi prendre une suite $(M_n)_n$ convergente vers M de matrices de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, et, par continuité de la transposition et des f_X, passer à la limite dans $M_n^{\mathsf{T}} = M_n$ et $X^{\mathsf{T}}M_nX \geqslant 0$ pour en déduire que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité, on a une suite (A_n) de matrices inversibles telles que $A_n \to A$. On peut donc trouver des suites $(Q_n$ et (S_n) de matrices respectivement orthogonales et symétriques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = Q_nS_n$.

   Par compacité de $\mathscr{O}(n)$, on a une extractrice φ telle que $Q_{\varphi(n)} \to Q \in \mathscr{O}(n)$.

   Alors $S_{\varphi n} = Q_{\varphi(n)}^{-1}A_{\varphi(n)} \to S = Q^{-1}A$ (la continuité de $M \mapsto M^{-1}$ vient de la formule de la comatrice) et comme $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

   Finalement, $A = QS$ avec $Q \in \mathscr{O}(n)$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

12 **Formules variationnelles ; norme subordonnée et rayon spectral** Soit E est un espace euclidien, $\left(\cdot \middle| \cdot\right)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sup\limits_{\|y\|=1} \left(x \middle| y\right)$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.
3. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\operatorname{Sp} u)$ et $\max(\operatorname{Sp} u)$.

   Traduction matricielle ?

Le **rayon spectral** de $u \in \mathscr{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

4. Si $u \in \mathscr{S}^+(E)$, montrer que $\max(\operatorname{Sp} u) = \rho(u) = |||u|||$.
5. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $|||u||| = |||u^* \circ u||| = \rho\left(u^* \circ u\right)$.

Solution de 12 : Formules variationnelles ; norme subordonnée et rayon spectral

Par théorème spectral, on fixe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i$. Il n'est pas restrictif de supposer $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Et alors, si $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a

$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

donc

$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant (x|u(x)) \leqslant \lambda_n\|x\|^2$$

l'inégalité de gauche est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E$, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E$. Donc il y a un minimum et un maximum, qui sont Min(Sp(A)) et Max(Sp(A)). Pour les matrices symétriques réelles, même chose en considérant le quotient

$$\frac{X^T\ A\ X}{X^T\ X}$$

X parcourant $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

13 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Solution de 13 :

Les colonnes sont orthonormés $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ avec la première coordonnée : c'est une matrice de rotation.

On calcule les vecteurs invariants, on trouve $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ donc $a = (1, 0, -4)$ dirige et oriente l'axe de la rotation.

Puis $\operatorname{tr} M = -7/9 = 2\cos\theta + 1$ donc $\cos\theta = -8/9$.

Et le signe de $\sin\theta$ est celui de $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} < 0$.

Donc rotation d'angle $-\mathrm{Arccos}(-8/9)$.

Autres exercices

14 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E euclidien. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une symétrie orthogonale.
2. f est une isométrie et est symétrique (ie $f \in \mathscr{O}(E) \cap \mathscr{S}(E)$.)
3. f est une symétrie et une isométrie.
4. f est une symétrie et est symétrique.

Donner une traduction matricielle.

Solution de 14 :

$1 \Longrightarrow 2$: f symétrie orthogonale par rapport à F. Si $x, y \in E$,

$$(f(x)|y) = (p_F(x) - p_{F^\perp}(x)|p_F(y) + p_{F^\perp}(y)) = (p_F(x)|p_F(y)) - (p_{F^\perp}(x)|p_{F^\perp}(y)) = (p_F(x) + p_{F^\perp}(x)|p_F(y) - p_{F^\perp}(y)) = (x|f(y))$$

Donc $f \in \mathscr{S}(E)$.

De même, on montre que f conserve le produit scalaire donc $f \in \mathscr{O}(E)$.

$2 \Longrightarrow 3$: $f^{-1} = f^* = f$ donc f est une symétrie.

$3 \Longrightarrow 4$: $f = f^{-1} = f^*$.

$4 \Longrightarrow 1$: f symétrie par rapport à F parallèlement à G, symétrique. Si $x \in F$ et $y \in G$,

$$(x|y) = (s(x)|s(y)) = (x|-y) = -(x|y)$$

donc $(x|y) = 0$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est la matrice en bond d'une symétrie orthogonale.
2. $A \in \mathcal{O}(n) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. $A^2 = I_n$ et $A \in \mathcal{O}(n)$
4. $A^2 = I_n$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

15 Calculer la norme d'une matrice orthogonale pour la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique puis exprimer la norme d'une matrice symétrique réelle à l'aide de ses valeurs propres.

Solution de 15 :

Soit $Q \in \mathcal{O}(n)$.

$$\|Q\|^2 = \mathrm{Tr}\left(Q^T Q\right) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$$

Donc $\|Q\| = \sqrt{n}$. On retrouve que $O(n)$ est borné. Même mieux, pour cette norme, $O(n)$ est inclus dans une sphère.

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathrm{R})$, par théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathrm{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Mais alors

$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left(A^T A\right) = \mathrm{Tr}\left(PDP^T PDP^T\right) = \mathrm{Tr}(D^2)$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées autant que de fois que leur multiplicité. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(A^\intercal A) = \mathrm{Ker}\,A$ et $\mathrm{rg}(A^\intercal A) = \mathrm{rg}\,A$.

Solution de 16 :

On a $\mathrm{Ker}\,A \subset \mathrm{Ker}(A^\intercal A)$ directement et si $X \in \mathrm{Ker}(A^\intercal A)$, $\|AX\|^2 = X^\intercal A^\intercal AX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}\,A$.

Il suffit ensuite d'utiliser la formule du rang.

17 **Linéarité automatique**

1. Montrer qu'une application de E euclidien dans lui-même qui conserve le produit scalaire est automatiquement linéaire (et donc une isométrie de E).
2. Même question si $u(0_E) = 0_E$ et u conserve la distance euclidienne entre deux vecteurs (donc en particulier la norme).
3. Vérifier que plus généralement, si u conserve la distance euclidienne, il existe un vecteur $a \in E$ et une application $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout x, $u(x) = a + v(x)$ (on dit que u est une application affine).
4. Montrer que si e est un vecteur de norme 1, $u : x \mapsto \|x\|\, e$ conserve la norme sans être linéaire.

Solution de 17 : Linéarité automatique

1. Si u conserve le produit scalaire (donc la norme) :

$$\begin{aligned}\left\|u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)\right\| &= \left\|u(x+\lambda y)\right\|^2+\|u(x)\|^2+\lambda^2\left\|u(y)\right\|^2-2(u(x+\lambda y)|u(x))\\ &\quad -2\lambda(u(x+\lambda y)|u(y))+2\lambda(u(x)|u(y))\\ &=0.\end{aligned}$$

2. Si u conserve les distances et $u(0_E)=0_E$, comme

$$(u(x)|u(y))=\frac{1}{2}\left(\|u(x)\|^2+\left\|u(y)\right\|^2-\left\|u(x)-u(y))\right\|^2\right),$$

u conserve le produit scalaire.

3. Si u conserve les distances et $a=u(0_E)$, on peut appliquer la question précédente à $v=u-a$.
4. Facile.

18 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{O}(n)$.

1. En utilisant le vecteur $u\in\mathbb{R}^{n^2}$ qui ne contient que des 1, montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{i,j}\right|\leqslant n\sqrt{n}$.
2. Montrer ensuite que $\displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\right|\leqslant n$ en utilisant $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
Cas d'égalité ?

Solution de 18 :

1. Soit a le vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ contenant les $\left|a_{i,j}\right|$. Alors, par Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{i,j}\right|=(a|u)\leqslant\|a\|\times\|u\|=n\times\sqrt{n}$$

car les colonnes de A sont normées.

2. Savoir que AU est une matrice colonne dont les coefficients sont les sommes des coefficients de chaque ligne de A aide à trouver

$$U^{\mathsf{T}}\ A\ U=\sum_{i,j}a_{i,j}$$

Mais considérons le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on peut alors interpréter

$${}^{\mathsf{T}}U\ A\ U=\langle U,AU\rangle$$

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle U,AU\rangle|\ \leqslant\ \|U\|\ \|AU\|$$

Mais A, orthogonale, conserve la norme euclidienne. Comme $\|U\|=\sqrt{n}$, l'inégalité est démontrée (assez facile avec l'indication, mais sans ladite indication ce le serait nettement moins). L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si AU et U sont liés, soit si et seulement si $AU=\pm U$ (A conserve la norme). Soit si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 (respectivement -1).

19 Déterminer $|(\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))|$, puis $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$, et enfin $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ pour $n\in\{2,3\}$.

Solution de 19 :

Les colonnes des matrices de $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ contiennent chacune un seul cœfficient non nul, valant ± 1, jamais sur la même ligne (car lesdites colonnes sont orthonormées).

On part de I_n, on permute les colonnes, et on à deux choix par colonne pour le cœfficient non nul : 1 ou -1.

Ainsi, $|(\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))| = 2^n n!$.

En examinant les colonnes dans l'ordre, on trouve que $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}\right\}$.

Une matrice antisymétrique étant de déterminant nul en dimension impaire, $\mathscr{O}(3)\cap\mathscr{A}_3(\mathbb{R})=\varnothing$.

Et on trouve $\mathscr{O}(2)\cap\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

20 Reconnaître les endomorphismes dont les matrices dans une base orthonormée directe (i,j) d'un espace vectoriel euclidien orienté sont $M=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$ et $N=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$.

21 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$A=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&4&4\\-4&8&-1\\4&1&-8\end{pmatrix}\qquad B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&4&-8\\4&7&4\\-8&4&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\qquad E=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\qquad F=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}$$

22 Soit $A=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}6&3&\cdot\\-3&2&\cdot\\2&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ et $f\in\mathscr{L}(E)$ où E euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans la base orthonormale directe (i,j,k) est A.

Compléter la matrice pour que $A\in\mathscr{SO}(3)$ puis déterminer ses éléments caractéristiques.

23 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$.

1. Trouver une CNS sur (a,b) pour que A soit orthogonale.
2. Cette condition étant remplie, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien orienté dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) est A.

24 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathscr{B}=(i,j,k)$ une base orthonormée directe de E. Former la matrice dans $\mathscr{B}$ de la rotation R d'axe orienté par $w=\dfrac{1}{3}(2i-2j-k)$ et d'angle $\theta=\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

25 Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère des rotations r et R. Étudier l'endomorphisme $f = r \circ R \circ r^{-1}$.

Dans quels cas r et R commutent-elles ?

26 **Écrit CCINP 2020 - CCMP 2017** Soit E euclidien et f un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité.

1. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.

   Indication : faire un dessin, qui incite à s'intéresser à $x-y$ et $x+y$.
2. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout x de E, $\|f(x)\| = k\|x\|$.
3. Montrer que f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

27 Soit E euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $v = u - \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.
2. Soit p projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\right).$$

   Démontrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$.

Solution de 27 :

1. Considérons $x \in \ker v$, $y \in \mathrm{im}\, v$. Il existe z tel que $y = v(z)$. Et

$$(x|y) = (x|v(z)) = (x|z) - (x|u(z))$$

Mais $x = u(x)$, donc $(x|u(z)) = (u(x)|u(z))$ et u conserve le produit scalaire ; on conclut bien que

$$(x|y) = 0$$

Il en ressort que $\ker v \perp \mathrm{im}\, v$. Donc $\ker v \subset (\mathrm{im}\, v)^{\perp}$. L'égalité résulte alors de l'égalité des dimensions, elle-même conséquence du théorème du rang.

2. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Ker}\, v$, c'est-à-dire $y = u(y)$, et $z \in (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp} = \mathrm{im}(v)$, ce qui signifie qu'il existe $t \in E$ tel que $z = v(t) = t - u(t)$. On a alors

$$p_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

Mais pour tout k on a $u^k(y) = y$ (récurrence sur k), et $u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$ ce qui fait que la deuxième somme est télescopique. Donc

$$p_n(x) = y + \frac{1}{n}\left(t - u^n(t)\right)$$

Mais par orthogonalité de u, on a $\|u^n(t)\| = \|t\|$, donc

$$p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

ce qui conclut.

28

1. À quelle condition une rotation et une réflexion du plan euclidien orienté commutent-elles ?
2. Étudier en général $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$ où r est une rotation et s une réflexion.

29 Mines MP (sans l'indication)

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n)$ où A et D sont carrées. En multipliant par une matrice triangulaire par blocs bien choisie, montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

30 Mines MP

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a+b+c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{O}(3)$.
2. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{SO}(3)$.
3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}(3)$ si et seulement si a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.

Solution de 30 : Mines MP

1. $M \in \mathcal{O}(3) \Longleftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$.
2. $M \in \mathcal{SO}(3) \Longleftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = 1$.
3. Étudier la fonction.

31

Déterminer toutes les matrices symétriques réelles vérifiant $A^4 = -A^2$.

32

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
2. Si A est symétrique, écrire $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.
3. Si $Q \in \mathcal{O}(n)$, calculer $\|Q\|$.

Solution de 32 :

1.
2. Par théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Mais alors

$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left(A^T A\right) = \mathrm{Tr}\left(PDP^T PDP^T\right) = \mathrm{Tr}(D^2)$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées autant que de fois que leur multiplicité. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

3.
$$\|Q\|^2 = \text{Tr}\left(Q^T Q\right) = \text{Tr}(I_n) = n$$

Donc $\|Q\| = \sqrt{n}$. On retrouve que $O(n)$ est borné. Même mieux, pour cette norme, $O(n)$ est inclus dans une sphère.

33 Soit A nilpotente commutant avec sa transposée. Montrer que $A^{\mathsf{T}}A = 0$ puis que A est nulle.

34 Connexité par arcs de $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$

1. Définir une application continue ϕ de $[0,1]$ dans $\mathscr{S}\mathscr{O}(2)$ telle que $\phi(0) = I_2$ et $\phi(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. On considère $M \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ ($n \geqslant 2$). En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ et $M' \in \mathscr{O}(n) \setminus \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathscr{O}(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$.

35 Les réflexions engendrent $\mathscr{O}(n)$

On se propose dans cet exercice de démontrer le résultat suivant : toute matrice $A \in \mathscr{O}(n)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions. Plus précisément : si $A \in \mathscr{O}(n)$, il existe $p \leqslant n$ et des matrices de réflexions $M_1, \ldots, M_p$ telles que

$$A = M_1 M_2 \ldots M_p$$

On rappelle (en fait, ce n'est pas vraiment dans le programme...) qu'on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Et donc qu'on appelle matrice de réflexion une matrice M de $\mathscr{O}(n)$ diagonalisable, telle que

$$\dim(E_1(M)) = n - 1 \qquad \text{et} \qquad \dim(E_{-1}(M)) = 1$$

1. **[Cas $n = 2$, matriciellement]** En calculant le produit matriciel
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$
démontrer qu'une matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme
$$R = M_1 M_2$$
où M_1 et M_2 sont deux matrices de réflexions, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement. En déduire que le résultat annoncé est vrai pour $n = 2$.
2. **[Cas $n = 2$, astucieusement]** Soit R une matrice de rotation, M une matrice de réflexion. Que peut-on dire de MR ? Que vaut M^2 ? retrouver alors le résultat de la question précédente, sans avoir besoin de calcul.
3. **[Cas général]** On suppose $n \geqslant 3$. En utilisant le cas $n = 2$ et le théorème de réduction des isométries vectorielles, démontrer le résultat annoncé.

On dit que les réflexions engendrent le groupe des isométries vectorielles.

Solution de 35 : Les réflexions engendrent $\mathscr{O}(n)$

1. Calcul facile :
$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$
Toute matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme
$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$
et donc peut s'écrire $M(\alpha)M(\alpha-\phi)$ pour tout α, ou $M(\phi+\beta)M(\beta)$ pour tout β. Or les $M(\alpha)$ sont bien des matrices de réflexion (polynôme caractéristique : X^2-1, elles sont donc diagonalisables avec pour valeurs propres -1 et 1, chacune avec un sous-espace propre qui est une droite vectorielle).
2. Une propriété vraie en dimension 2 mais pas en dimension $\geqslant 2$ est que les isométries vectorielles sont soit des rotations soit des réflexions. Autre manière de dire la même chose : les éléments de $\mathscr{O}(2)$ qui ont pour déterminant -1 sont des réflexions. Donc si M et R ont pour déterminants respectifs -1 et 1, MR a pour déterminant -1 et est donc…une réflexion (insistons encore sur le fait que ce raisonnement simple n'est valable qu'en dimension 2). Mais $M^2=I_2$ (valable pour toute symétrie, a fortiori orthogonale, a fortiori pour toute réflexion). Donc, si on note $M'=MR$, en multipliant par M' à droite on aura $R=MM'$.
3. On ne va pas faire une récurrence, mais un produit par blocs. En effet, notant $R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, le théorème de réduction dit que pour toute matrice $A\in\mathscr{O}(n)$ il existe $P\in\mathscr{O}(n)$ telle que
$$A=P\begin{pmatrix}R_{\alpha_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\alpha_s} & \\ & & & I_t\end{pmatrix}P^T.$$
(si $A\in\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$) ou telle que
$$A=P\begin{pmatrix}R_{\alpha_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\alpha_s} & & \\ & & & -1 & \\ & & & & I_t\end{pmatrix}P^T.$$
(si $A\in\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$). Rappelons que pour obtenir une écriture de ce type, on met les éventuels -1 du théorème de réduction dans des matrices R_π, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'au plus un. Il n'y a en revanche pas tellement d'intérêt à mettre les 1 dans des matrices R_0. Traitons le premier cas : on peut écrire
$$A=A_1\dots A_s$$
avec $A_1=P\begin{pmatrix}R_{\alpha_1} & \\ & I_{n-2}\end{pmatrix}P^T$, $A_2=P\begin{pmatrix}I_2 & & \\ & R_{\alpha_2} & \\ & & I_{n-4}\end{pmatrix}P^T$, etc…
Le cas $n=2$ donne l'existence de deux matrices M_1 et M_2 de réflexions (des matrices 2×2) telles que
$$R_{\alpha_1}=M_1M_2$$
Mais alors
$$A_1=\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2$$

avec $\widetilde{M_1} = P\begin{pmatrix} M_1 & \\ & I_{n-2}\end{pmatrix}P^T$, $\widetilde{M_2}$ de même. Les matrices $\widetilde{M_1}$ et $\widetilde{M_2}$ sont des matrices de réflexions (matrices orthogonales, avec 1 pour valeur propre et un sous-espace propre de dimension $n-1$, -1 valeur propre simple). On fait de même avec les autres A_k et on en déduit le résultat. Le deuxième cas se traite de même, avec une matrice en plus contenant le -1 sur la diagonale...

36 Endomorphismes antisymétriques

On dira qu'un endomorphisme u de l'espace euclidien E est antisymétrique lorsque

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)$$

On note $\mathscr{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E. Il est assez clair que c'est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout vecteur x de E, $u(x)$ est orthogonal à x.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles pour un endomorphisme antisymétrique ? peut-il être diagonalisable ?
3. Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale. A quelle propriété de A reconnaît-on que l'endomorphisme u est antisymétrique ?
4. Démontrer que $\mathscr{L}(E)$ est somme directe de l'espace des endomorphismes antisymétriques et de l'espace des endomorphismes symétriques. Quelles sont les dimensions de ces deux espaces ?
5. Démontrer que, si u est antisymétrique, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r J & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

37 Oral ens

Démontrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (on note $\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ qui sont à coefficients rationnels).

Indication : se demander ce que cet énoncé peut bien faire ici.

Solution de 37 : Oral ens

Il est très raisonnable de commencer par le cas $n=2$, même si cela finalement ne servira à rien, voir plus bas. On voit assez vite que le problème est de trouver, pour un couple (x,y) de réels tels que $x^2+y^2=1$, une suite de couples de rationnels (s_n,t_n) tels que

$$(s_n,t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x,y)$$

La manière la plus efficace de traiter ça est d'être très performant en trigonométrie : si $\theta\in\mathbb{R}$ n'est pas un multiple de π, notant $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

Or tout réel t est limite d'une suite de rationnels, ce qui permet de conclure.

On peut aussi chercher les points à coordonnées rationnelles sur le cercle unité, ce qui revient à chercher les triplets d'entiers pythagoriciens, i.e. vérifiant

$$m^2+n^2=p^2$$

Problème assez bien documenté (voir par exemple la tablette Plimpton 322, datée d'environ -1800), rappelons que c'est le seul cas dans lequel l'équation de Fermat a des vraies solutions, bref on se trouve dans un endroit bien visité des mathématiques.

On peut alors, à partir du cas $n=2$, conclure par récurrence.

Mais il y a mieux : soit s_u la réflexion d'hyperplan $H=\text{Vect}(u)^\perp$ où $u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. On voit très bien sur un dessin la formule (non au programme, mais intéressante)

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \qquad s_u(x)=x-\frac{2}{\|u\|^2}(u|x)u$$

(commencer par l'établir dans le cas où u est unitaire). Mais alors, si $\mathscr{B}$ est la base canonique, pour tout $u\in\mathbb{Q}^n$ la formule précédente montre que

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(s_u)\in\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$$

Or tout vecteur non nul u de $\mathbb{R}^n$ est limite d'une suite de vecteurs non nuls à coefficients rationnels (il suffit d'approcher chaque composante par une suite de rationnels). On en déduit sans grande difficulté que toute matrice de réflexion est limite d'une suite de matrices à coefficients rationnels. Et on n'a plus qu'à utiliser l'exercice précédent, et la continuité du produit.

38

1. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs. Démontrer que

$$\Big[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\Big]^{1/n}\geqslant 1+\Big[\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)\Big]^{1/n}$$

2. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet une « racine carrée » symétrique positive (on ne demande pas d'examiner l'unicité).
3. Utiliser les questions précédentes pour montrer que, si A est symétrique positive d'ordre n,

$$\big[\det(I_n+A)\big]^{1/n}\geqslant 1+\big[\det(A)\big]^{1/n}$$

puis que, si A et B sont symétriques positives,

$$\big[\det(A+B)\big]^{1/n}\geqslant\big[\det(A)\big]^{1/n}+\big[\det(B)\big]^{1/n}$$

(on remarquera que seul le cas où au moins l'une des deux matrices est inversible est intéressant. Si A est symétrique positive inversible, on écrira, en notant $A^{1/2}$ la « racine carrée » de A et $A^{-1/2}$ son inverse $B=A^{1/2}\big(A^{-1/2}BA^{-1/2}\big)A^{1/2}$ et on se ramènera à l'inégalité précédente.

Solution de 38 :

On a, si f est convexe sur un intervalle I, et si $x_1,\dots,x_n\in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right)\leqslant\frac{1}{n}\big(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\big)$$

La fonction $\ln$ étant croissante, l'inégalité proposée équivaut à

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\lambda_i)\geqslant \ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\right)\right)$$

…du moins si les λ_i sont strictement positifs. Mais si l'un des λ_i est nul, l'inégalité que l'on cherche est simple, on peut donc les supposer tous strictement positifs. L'inégalité proposée est donc équivalente à :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\exp(\ln\lambda_i))\geqslant \ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\right)\right)$$

Et si on montre que l'application $x\mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe, on conclut (en appliquant l'inégalité générale de convexité aux $\ln\lambda_i$). Or cette fonction est C^∞ sur **R**, et sa dérivée est

$$x\mapsto \frac{e^x}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$$

qui croît manifestement (on peut aussi calculer la dérivée seconde).

Si $A\in\mathscr{S}_n^+(\mathrm{R})$, on écrit $A=P\ D\ P^{-1}=P\ D\ {}^tP$ où $P\in\mathscr{O}(n)$ et $D=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\forall i\quad \lambda_i\geqslant 0$. Donc $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $\det(I_n+A)=\det(P(I_n+D)P^{-1})=\det(I_n+D)=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$. On est donc ramené à l'inégalité du début.

Si A et B sont symétriques positives, $A+B$ l'est (classique, utiliser la définition et non la caractérisation par le spectre). Si les deux matrices sont positives non définies, leurs déterminants sont nuls, le membre de droite de l'inégalité souhaitée vaut 0, le membre de gauche est positif (une matrice symétrique positive a un spectre inclus dans R^+, et est diagonalisable, donc a un déterminant positif). On peut donc supposer $A\in\mathscr{S}_n^{++}$. Il est classique, à partir de la diagonalisation de A avec matrice de passage orthogonale, de trouver $A^{1/2}$ symétrique définie positive telle que

$$\left(A^{1/2}\right)^2=A$$

On notera $\left(A^{1/2}\right)^{-1}=A^{-1/2}$, on a donc

$$A+B=A^{1/2}(I_n+A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

Or, si $C=A^{-1/2}BA^{-1/2}$, on vérifie que C est symétrique (B et $A^{-1/2}$ le sont, et le produit est palindromatique). De plus, si X est une colonne non nulle,

$${}^tXCX={}^tYBY\qquad\text{avec}\qquad Y=A^{-1/2}X\neq(0)$$

donc ${}^tXCX>0$. On conclut que C est symétrique définie positive (symétrique positive suffisait). Et donc on est ramené à ce qui précède :

$$\begin{aligned}
[\det(A+B)]^{1/n}&=\left[\det\left(A^{1/2}(I_n+A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}\right)\right]^{1/n}\\
&=\left[\left(\det(A^{1/2})\right)^2\right]^{1/n}\left[\det\left(I_n+A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)\right]^{1/n}\\
&\geqslant(\det A)^{1/n}\left(1+\left[\det(A^{-1/2}BA^{-1/2})\right]^{1/n}\right)
\end{aligned}$$

Mais $\det(A^{-1/2}BA^{-1/2})=\dfrac{\det B}{\det A}$, on conclut…