Endomorphismes d'un espace euclidien

- L'outil principal pour l'étude des endomorphismes autoadjoints (ou matrices symétriques) est le théorème spectral. Les exercices vus en cours sur les matrices symétriques positives ou définies positives ou sur les formules variationnelles sont incontournables.
- Il ne faut pas chercher systématiquement à caractériser la positivité ou la définie-positivité d'un endomorphisme autoadjoint par ses valeurs propres : la définition est souvent plus utile.
- L'existence d'une « racine carrée » autoadjointe positive pour tout endomorphisme (ou matrice) autoadjoint positif est très utile et très simple : à connaître (voir exercice).
- Si A matrice de u dans la base orthonormale des e_i, alors $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$.
- Les projections orthogonales sont les projections qui sont symétriques, les symétries orthogonales sont les symétries qui sont orthogonales (symétries isométriques) ou encore les symétries symétriques, ou encore les isométries symétriques voir exercice .
- Pour étudier les isométries en petite dimension :
  - Dans le plan, c'est simple : il n'y a que des rotations et des réflexions. Il suffit de vérifier que la matrice en base orthonormale est orthogonale et de trouver son déterminant. Il faut savoir trouver l'angle d'une rotation et l'axe d'une réflexion (ce sont les vecteurs invariants).
  - En dimension 3, on montre que la matrice est orthogonale avec l'orthonormalité de vecteurs colonnes C_1, C_2 et C_3 (ou lignes). On détermine le signe de l'isométrie avec un déterminant ou plus simplement en comparant une coordonnée de $C_1 \wedge C_2$ à la coordonnée correspondante de C_3 : si c'est le même signe, il s'agit d'une rotation, sinon c'est une isométrie négative.
  - Pour étudier une rotation en dimension 3, on cherche un vecteur directeur a de son axe en recherchant les vecteurs invariants. Puis l'angle θ est donné par $\mathrm{tr}(r) = 2\cos\theta + 1$ et le signe de $\sin\theta$ est celui de $[u, r(u), a]$ où u n'est pas invariant (souvent un vecteur de la base canonique).
- Dorénavant, lorsque l'on demande d'étudier une matrice 3×3, penser aux projections, symétries et aux isométries.

Exercices vus en cours

1 Montrer que l'image et le noyau de u^* sont respectivement l'orthogonal du noyau de u et l'orthogonal de l'image de u.

2 **CCINP 63**

3 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\}$ est compact.

4 **Classique : décomposition QR** Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et d'une matrice R triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.
   On pourra interpréter A comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la base formée des vecteurs colonnes de A.
2. Si (Q_0, R_0) est un couple qui convient, trouver tous les couples solution.

5 **CCINP 78**

6 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

7 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$.

8 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

9 Montrer que si u est autoadjoint, alors $\mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u = E$

10 **CCINP 68**

11 **CCINP 66**

12 **[Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire**

1. **Racine carrée** : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$. Que dire de B si A est supposée définie positive ?
   On montre l'unicité de B géométriquement dans la question suivante.
2. Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
   (a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$.
   (b) En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
3. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\intercal M$.
4. **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\intercal A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
5. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.
6. Étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.

13 **Formules variationnelles ; norme subordonnée et rayon spectral** Soit E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sup\limits_{\|y\|=1} (x|y)$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.
3. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\mathrm{Sp}\, u)$ et $\max(\mathrm{Sp}\, u)$.
   Traduction matricielle ?

Le **rayon spectral** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} |\lambda|$.

4. Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, montrer que $\max(\mathrm{Sp}\, u) = \rho(u) = |||u|||$.
5. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $|||u||| = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.

Autres exercices

14 Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ où E euclidien. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une symétrie orthogonale.
2. f est une isométrie et est symétrique (ie $f\in\mathscr{O}(E)\cap\mathscr{S}(E)$.)
3. f est une symétrie et une isométrie.
4. f est une symétrie et est symétrique.

Donner une traduction matricielle.

15 Calculer la norme d'une matrice orthogonale pour la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique puis exprimer la norme d'une matrice symétrique réelle à l'aide de ses valeurs propres.

16 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(A^\intercal A)=\operatorname{Ker}A$ et $\operatorname{rg}(A^\intercal A)=\operatorname{rg}A$.

17 **Linéarité automatique**

1. Montrer qu'une application de E euclidien dans lui-même qui conserve le produit scalaire est automatiquement linéaire (et donc une isométrie de E).
2. Même question si $u(0_E)=0_E$ et u conserve la distance euclidienne entre deux vecteurs (donc en particulier la norme).
3. Vérifier que plus généralement, si u conserve la distance euclidienne, il existe un vecteur $a\in E$ et une application $v\in\mathscr{L}(E)$ tels que pour tout x, $u(x)=a+v(x)$ (on dit que u est une application affine).
4. Montrer que si e est un vecteur de norme 1, $u:x\mapsto\|x\|e$ conserve la norme sans être linéaire.

18 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{O}(n)$.

1. En utilisant le vecteur $u\in\mathbb{R}^{n^2}$ qui ne contient que des 1, montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|\leqslant n\sqrt{n}$.
2. Montrer ensuite que $\displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\right|\leqslant n$ en utilisant $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
Cas d'égalité ?

19 Déterminer $|(\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))|$, puis $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$, et enfin $\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ pour $n\in\{2,3\}$.

20 Reconnaître les endomorphismes dont les matrices dans une base orthonormée directe (i,j) d'un espace vectoriel euclidien orienté sont $M=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$ et $N=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$.

21 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$A=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&4&4\\-4&8&-1\\4&1&-8\end{pmatrix}\qquad B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&4&-8\\4&7&4\\-8&4&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\qquad E=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\qquad F=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}$$

22 Soit $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&3&\cdot\\-3&2&\cdot\\2&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ et $f\in\mathscr{L}(E)$ où E euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans la base orthonormale directe (i,j,k) est A.
Compléter la matrice pour que $A\in\mathscr{S}\mathscr{O}(3)$ puis déterminer ses éléments caractéristiques.

23 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$.

1. Trouver une CNS sur (a,b) pour que A soit orthogonale.
2. Cette condition étant remplie, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien orienté dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) est A.

24 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathscr{B}=(i,j,k)$ une base orthonormée directe de E.
Former la matrice dans $\mathscr{B}$ de la rotation R d'axe orienté par $w=\frac{1}{3}(2i-2j-k)$ et d'angle $\theta=\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$.

25 Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère des rotations r et R. Étudier l'endomorphisme $f=r\circ R\circ r^{-1}$.
Dans quels cas r et R commutent-elles ?

26 **Écrit CCINP 2020 - CCMP 2017** Soit E euclidien et f un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité.

1. Montrer que si $\|x\|=\|y\|$, alors $\|f(x)\|=\|f(y)\|$.

   Indication : faire un dessin, qui incite à s'intéresser à $x-y$ et $x+y$.
2. Montrer qu'il existe $k>0$ tel que pour tout x de E, $\|f(x)\|=k\|x\|$.
3. Montrer que f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

27 Soit E euclidien, $u\in\mathscr{O}(E)$ et $v=u-\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}v=(\operatorname{Ker}v)^\perp$.
2. Soit p projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}v$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$p_n=\frac{1}{n}\left(\mathrm{id}+u+u^2+\cdots+u^{n-1}\right).$$
Démontrer que pour tout $x\in E$, $p_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}p(x)$.

28

1. À quelle condition une rotation et une réflexion du plan euclidien orienté commutent-elles ?
2. Étudier en général $s\circ r\circ s$ et $r\circ s\circ r$ où r est une rotation et s une réflexion.

29 **Mines MP (sans l'indication)**

Soit $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathscr{O}(n)$ où A et D sont carrées. En multipliant par une matrice triangulaire par blocs bien choisie, montrer que $(\det A)^2=(\det D)^2$.

30 Mines MP

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\sigma=ab+bc+ca$, $S=a+b+c$ et la matrice $M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M\in\mathcal{O}(3)$.
2. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M\in\mathcal{SO}(3)$.
3. Montrer que $M\in\mathcal{SO}(3)$ si et seulement si a, b et c sont racines de X^3-X^2+k avec $k\in[0,4/27]$.

31

Déterminer toutes les matrices symétriques réelles vérifiant $A^4=-A^2$.

32

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour toutes $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$.
2. Si A est symétrique, écrire $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.
3. Si $Q\in\mathcal{O}(n)$, calculer $\|Q\|$.

33

Soit A nilpotente commutant avec sa transposée. Montrer que $A^{\mathsf{T}}A=0$ puis que A est nulle.

34 Connexité par arcs de $\mathcal{SO}(n)$

1. Définir une application continue ϕ de $[0,1]$ dans $\mathcal{SO}(2)$ telle que $\phi(0)=I_2$ et $\phi(1)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
2. On considère $M\in\mathcal{SO}(n)$ $(n\geqslant 2)$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M\in\mathcal{SO}(n)$ et $M'\in\mathcal{O}(n)\setminus\mathcal{SO}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathcal{O}(n)$, telle que $\psi(0)=M$ et $\psi(1)=M'$.

35 Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(n)$

On se propose dans cet exercice de démontrer le résultat suivant : toute matrice $A\in\mathcal{O}(n)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions. Plus précisément : si $A\in\mathcal{O}(n)$, il existe $p\leqslant n$ et des matrices de réflexions $M_1,\dots,M_p$ telles que
$$A=M_1M_2\dots M_p$$
On rappelle (en fait, ce n'est pas vraiment dans le programme…) qu'on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Et donc qu'on appelle matrice de réflexion une matrice M de $\mathcal{O}(n)$ diagonalisable, telle que
$$\dim(E_1(M))=n-1 \qquad \text{et} \qquad \dim(E_{-1}(M))=1$$

1. **[Cas $n=2$, matriciellement]** En calculant le produit matriciel
$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}$$
démontrer qu'une matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme
$$R=M_1M_2$$
où M_1 et M_2 sont deux matrices de réflexions, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement. En déduire que le résultat annoncé est vrai pour $n=2$.

2. **[Cas $n=2$, astucieusement]** Soit R une matrice de rotation, M une matrice de réflexion. Que peut-on dire de MR ? Que vaut M^2 ? retrouver alors le résultat de la question précédente, sans avoir besoin de calcul.
3. **[Cas général]** On suppose $n\geqslant 3$. En utilisant le cas $n=2$ et le théorème de réduction des isométries vectorielles, démontrer le résultat annoncé.

On dit que les réflexions engendrent le groupe des isométries vectorielles.

36 Endomorphismes antisymétriques

On dira qu'un endomorphisme u de l'espace euclidien E est antisymétrique lorsque
$$\forall(x,y)\in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big)=-\big(x|u(y)\big)$$
On note $\mathscr{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E. Il est assez clair que c'est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout vecteur x de E, $u(x)$ est orthogonal à x.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles pour un endomorphisme antisymétrique ? peut-il être diagonalisable ?
3. Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale. A quelle propriété de A reconnaît-on que l'endomorphisme u est antisymétrique ?
4. Démontrer que $\mathscr{L}(E)$ est somme directe de l'espace des endomorphismes antisymétriques et de l'espace des endomorphismes symétriques. Quelles sont les dimensions de ces deux espaces ?
5. Démontrer que, si u est antisymétrique, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type
$$\begin{pmatrix}\lambda_1 J & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r J & \\ & & & 0\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

37 Oral ens

Démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (on note $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui sont à coefficients rationnels).

Indication : se demander ce que cet énoncé peut bien faire ici.

38

1. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs. Démontrer que
$$\left[\prod_{i=1}^n(1+\lambda_i)\right]^{1/n}\geqslant 1+\left[\prod_{i=1}^n(\lambda_i)\right]^{1/n}$$
2. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet une « racine carrée » symétrique positive (on ne demande pas d'examiner l'unicité).
3. Utiliser les questions précédentes pour montrer que, si A est symétrique positive d'ordre n,
$$\left[\det(I_n+A)\right]^{1/n}\geqslant 1+\left[\det(A)\right]^{1/n}$$
puis que, si A et B sont symétriques positives,
$$\left[\det(A+B)\right]^{1/n}\geqslant\left[\det(A)\right]^{1/n}+\left[\det(B)\right]^{1/n}$$
(On remarquera que seul le cas où au moins l'une des deux matrices est inversible est intéressant. Si A est symétrique positive inversible, on écrira, en notant $A^{1/2}$ la « racine carrée » de A et $A^{-1/2}$ son inverse, $B=A^{1/2}\big(A^{-1/2}BA^{-1/2}\big)A^{1/2}$ et on se ramènera à l'inégalité précédente.)