Espaces préhilbertiens réels

Exercices vus en cours

1 Montrer qu'on définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, et en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Définir sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire rendant la base canonique orthonormale.

3 Si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, montrer que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $\left(f|g\right) = \int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$.

4 Si $\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles de carré sommable (ie terme général de série – absolument – convergente) montrer qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

5 **CCINP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Solution de 5 : CCINP 76

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| \leqslant \|x\|\|y\|$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.

   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = \left(x + \lambda y | x + \lambda y\right)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = \|y\|^2\lambda^2 + 2\lambda\left(x|y\right) + \|x\|^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|\left(x|y\right)| = 0$ et $\|x\|\|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$

Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
On en déduit que le dicaliminant réduit Δ est négatif ou nul.
Or $\Delta = \left(x|y\right)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $\left(x|y\right)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
Et donc, $|\left(x|y\right)| \leqslant ||x||\,||y||$.

(b) On reprend les notations de 1. .
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y|| \Longleftrightarrow x$ et y sont colinéaires.
Supposons que $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y||$.

Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le dicaliminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|\left(x|y\right)| = |\alpha|.|\left(y|y\right)| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $A = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$.
$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.
On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2$.
D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2 = \left(\int_a^b 1 \mathrm{d}t \right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ on obtient :
$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

6 **CCINP 79** Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0 \Longrightarrow h=0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose : $\forall (f,g)\in E^2$, $\displaystyle (f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 6 : CCINP 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$.

   On pose $\forall\, x\in[a,b]$, $\displaystyle F(x)=\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\, x\in[a,b]$, $F'(x)=h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a)=0$ et, par hypothèse, $F(b)=0$. C'est-à-dire $F(a)=F(b)$. (**)
   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.

   Donc $\forall\, x\in[a,b]$, $F'(x)=0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x\in[a,b]$, $h(x)=0$.

2. On pose $\forall (f,g)\in E^2$, $\displaystyle (f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
   On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f\in E$. $\displaystyle (f|f)=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a<b$ donc $(f|f)\geqslant 0$.
   Donc $(|)$ est positive. (**)
   Soit $f\in E$ telle que $(f|f)=0$.

   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$.
   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(|)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

7 Orthonormaliser la base $e_1=(0,1,1)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Solution de 7 :

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2)=0$ ie $(\varepsilon_1|\mathrm{e}_2)+\lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1)=1+2\lambda=0$ donc $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon_2=\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3+\mu\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3)=0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3)=0$, on trouve $\mu=-\dfrac{1}{2}$ et $\nu=-\dfrac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\epsilon_1'=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\epsilon_2'=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\epsilon_3'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

8 Dans $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $F^\perp=\{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstraß.
2. En déduire que $F\subsetneq\left(F^\perp\right)^\perp=E$.
3. Soit $G=\{t\mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P\in F\}$. Montrer que $G^\perp=\{0\}$ et en déduire que $(F\cap G)^\perp\supsetneq F^\perp+G^\perp$.
4. Montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Que vaut $\mathrm{d}(\exp,F)$? Est-elle atteinte ?
5. Montrer plus généralement que si $\mathrm{d}(f,F)$ est atteinte pour un $g\in F$, alors $f-g\in F^\perp$. Pour quelles fonctions est-ce le cas ?

9 **CCINP 39** On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Solution de 9 : CCINP 39

1. (a) Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.
   Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)
   $\forall\, x = (x_n) \in l^2$, $|x_p|^2 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant \|x\|$.

   Donc $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, $|\varphi(x)| = |x_p| \leqslant \|x\|$ (**)
   D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.

3. Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\perp}$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.
   On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   $y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
   On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Synthèse :

   la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.
   Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

   Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.

   On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

10 **CCINP 77** Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$.

Solution de 10 : CCINP 77

1. On a $A\subset\left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x\in A, \forall y\in A^{\perp}, (x\mid y)=0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x\in A,\ x\in(A^{\perp})^{\perp}$.
   Comme E est un espace euclidien, $E=A\oplus A^{\perp}$ donc $\dim A=n-\dim A^{\perp}$.
   De même, $E=A^{\perp}\oplus\left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=n-\dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=\dim A$. (**)
   D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.
   Prouvons que $F^{\perp}\cap G^{\perp}\subset(F+G)^{\perp}$.
   Soit $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
   Soit $y\in F+G$.
   Alors $\exists(f,g)\in F\times G$ tel que $y=f+g$.
   $(x\mid y)=\underbrace{(x\mid f)}_{\substack{=0\\ \text{car } f\in F \text{ et } x\in F^{\perp}}}+\underbrace{(x\mid g)}_{\substack{=0\\ \text{car } g\in G \text{ et } x\in G^{\perp}}}=0.$
   Donc $\forall\, y\in(F+G)$, $(x\mid y)=0$.
   Donc $x\in(F+G)^{\perp}$.
   Prouvons que $(F+G)^{\perp}\subset F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
   Soit $x\in(F+G)^{\perp}$.
   $\forall\, y\in F$, on a $(x\mid y)=0$ car $y\in F\subset F+G$.
   Donc $x\in F^{\perp}$.
   De même, $\forall\, z\in G$, on a $(x\mid z)=0$ car $z\in G\subset F+G$.
   Donc $x\in G^{\perp}$.
   On en déduit que $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$.

   (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}=\left(F^{\perp}\right)^{\perp}\cap\left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}=F\cap G$.
   Donc $\left(\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}=(F\cap G)^{\perp}$.
   C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp}+G^{\perp}=(F\cap G)^{\perp}$.

11 $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

12 **CCINP 92** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Solution de 12 : CCINP 92

1. $\langle , \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
   De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
   $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t\left({}^tAB\right)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle$.
   Donc $\langle , \rangle$ est symétrique.
   On en déduit que $\langle , \rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)
   Soit $A = \left(A_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.
   $\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{i,k}A_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$ donc $\langle A, A\rangle \geqslant 0$.
   Donc $\langle , \rangle$ est positive. (2)
   Soit $A = \left(A_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$ telle que $\langle A, A\rangle = 0$.
   Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2 \geqslant 0$.
   Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.
   Donc $\langle , \rangle$ est définie. (3)
   D'après (1),(2) et (3), $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

   Remarque importante : Soit $(A,B) \in E^2$.
   On pose $A = \left(A_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = \left(B_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   Alors $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left({}^tA\right)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}B_{k,i}$.
   Donc $\langle , \rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
   alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
   Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)
   Soit $M \in E$.
   Posons $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.
   On a $M = S + A$.
   ${}^tS = {}^t\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + {}^t({}^tM)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.

$^t A = {}^t\left(\dfrac{M-{}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - {}^t({}^tM)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)
D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tSA) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-{}^tAS) = -\mathrm{tr}({}^tAS) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle$.
Donc $2\langle S, A\rangle = 0$ soit $\langle S, A\rangle = 0$.
On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (1)
De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. (2)
D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,j} = \left(e_{k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \text{ et } l=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On a alors $F = \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}\right)$.
Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \left\langle M, E_{i,i}\right\rangle = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], m_{i,i} = 0$.
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

13 CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\left(f \mid g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution de 13 : CCINP 80

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $\left(f|g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
Soit $f \in E$. $\left(f|f\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0,2\pi]$ et $0<2\pi$, donc $(f|f)\geqslant 0$.
Donc $(|)$ est positive. (**)
Soit $f\in E$ telle que $(f|f)=0$.

Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=0$.
Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0,2\pi]$.
Donc, f est nulle sur $[0,2\pi]$.
Or f est 2π-périodique donc $f=0$.
Donc $(|)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

2. On a $\forall x\in\mathbb{R}, \sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)\in F$.
   De plus, si on note h l'application $x\mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0$ et $(h|g)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2x)\mathrm{d}x=0$ donc $h\in F^{\perp}$ (car $F=\mathrm{Vect}(f,g)$).
   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x\longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

14 Soit $E=\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x-z=0$. On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à p ?

Solution de 14 :
Vecteur normal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big)=(x,y,z)-\frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1)=\left(\frac{1}{2}(x+z),y,\frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)$, $p_P(e2)=e_2$ et $p_P(e3)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

15 **CCINP 81** On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A,A')=\mathrm{tr}({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^{\perp}$.

4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Solution de 15 : CCINP 81

1. On a immédiatement $\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$,
   $M \in \mathscr{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathscr{F}^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathscr{F})$ la distance de J à $\mathscr{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)||$ où $p_{\mathscr{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathscr{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

16 **CCINP 82** Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Solution de 16 : CCINP 82

1. On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(A+A'|B)=\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right)=(a+a')a''+(b+b')b''+(c+c')c''+(d+d')d''$.
Donc $(A+A'|B)=(aa''+bb''+cc''+dd'')+(a'a''+b'b''+c'c''+d'd'')=(A|B)+(A'|B)$.
$(\alpha A|B)=\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right)=\alpha a a''+\alpha b b''+\alpha c c''+\alpha d d''=\alpha(A|B)$.
On en déduit que $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(.|.)$ est symétrique.
Donc $(.|.)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)
Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in E$.

$(A|A)=a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 0$. Donc $(.|.)$ est positive. (**)
Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in E$ telle que $(A|A)=0$.

Alors $a^2+b^2+c^2+d^2=0$.
Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a=b=c=d=0$ donc $A=0$.
Donc $(.|.)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\in F^{\perp}$ car $\forall (a,b,d)\in\mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)=0$.
   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A,F)=||A-p_F(A)||=||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}||=1$.

17 Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathscr{D}: 3x+4y=0$ et $\mathscr{D}': 5x-12y=0$.

Produit scalaire

18 **Le retour des polynômes de Tchebbychev**

1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles $\langle P,Q\rangle_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}P(t)Q(t)dt$.
   On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ , $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.
2. Soit E l'espace $C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que, si $(f,g)\in E^2$, $\langle f,g\rangle_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)g(t)dt$ est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E.

19 Soient f et g des applications de E dans E telles que $\forall(x,y)\in E^2, (f(x)|y)=(x|g(y))$.

Montrer que f et g sont linéaires.

Solution de 19 :

Par symétrie, il suffit de montrer par exemple que f est linéaire.

Soient $x,x'\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x+\lambda x')=f(x)+\lambda f(x')$.

On calcule, pour $y\in E$,

$$\begin{aligned}\left(f(x+\lambda x')-f(x)-\lambda f(x')\middle|y\right)&=\left(f(x+\lambda x')|y\right)-\left(f(x)|y\right)-\lambda\left(f(x')\middle|y\right)\\&=\left(x+\lambda x'|g(y)\right)-\left(x|g(y)\right)-\lambda\left(x'\middle|g(y)\right)\\&=0\end{aligned}$$

donc $f(x+\lambda x')-f(x)-\lambda f(x')\in E^\perp=\{0\}$.

20 Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}P(t)Q(t)dt$$

1. Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tels que pour tout n, P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n.
2. Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $P_n=(X-\lambda_n)P_{n-1}-\mu_nP_{n-2}$
(Indication : décomposer XP_{n-1} dans la base des P_k).

Solution de 20 :

1. L'existence vient de Schmidt.
Pour l'unicité, on prend deux suites (P_n), (Q_n) convenant, et pour tout n, on décompose $P_n\in\mathrm{Vect}(Q_0,\dots,Q_n)$ et on obtient $P_n=Q_n$ par orthogonalité.
2. XP_{n-1} de degré n et unitaire se décompose dans la base orthogonale $(P_0,\dots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $XP_{n-1}=\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_{n-1}P_{n-1}+P_n$, avec $\lambda_i=\dfrac{(P_i|XP_{n-1})}{\|P_i\|}=\dfrac{(XP_i|P_{n-1})}{\|P_i\|}=0$ si $i<n-2$ pour des raisons de degré.

21 **Écrit Mines – CCINP** On considère le produit scalaire $(P,Q)\longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$ sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n)=n$ pour tout n.
3. Soit $n\geqslant 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$, $a_1,\dots,a_k$, avec $k<n$.
   (a) Vérifier que, si $Q=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)$, alors $(P_n|Q)=0$
   (b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.
   (c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.

4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on ait
$$\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$
Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0,1]$ des L_k, où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n, montrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \qquad \int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)\ .$$
Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

22 Décomposition QR et inégalité de Hadamard – oral Mines

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que $A = QR$.
(On interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).
2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.
3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \ldots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, alors
$$|\det M| \leqslant ||c_1|| \ldots ||c_n||$$
(a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
(b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma 1, \ldots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R, si q est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à Q, exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k
(c) Conclure
(d) Peut-il y a voir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Solution de 22 : Décomposition QR et inégalité de Hadamard – oral Mines

1. Si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A, A est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathscr{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathscr{C}$ par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{C}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$
Mais $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Schmidt garantit que, pour tout k,
$$c_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

où l'on note $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ (on a en effet, pour tout k,

$$\text{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\text{Vect}(c_1,\dots,c_k)\quad)$$

et donc…ça marche.

2. On écrit le système équivalent $RX=Q^TB$, c'est un système triangulaire.
3. Visiblement non, vu le (petit) choix dans l'algorithme de Gram-Schmidt. Mais allons plus loin : à quelle condition a-t-on

$$QR=Q'R'$$

où Q et Q' sont orthogonales, R et R' triangulaires supérieures inversibles ?
On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q'^{-1}Q=R'R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm1,0,\dots,0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ±1 car il est unitaire. Ainsi de suite…Bref,

$$\mathscr{O}(n)\cap\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})=\left\{D_\epsilon\ ;\ \epsilon\in\{-1,1\}^n\right\}$$

où, si $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$, $D_\epsilon=\text{diag}(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$. On conclut que

$$QR=Q'R'\iff\exists\epsilon\in\{-1,1\}^n\quad R'=D_\epsilon R\text{ et }Q'=QD_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR, au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

4. (a) Le premier membre est nul, le second membre est positif.
   (b) $c_k=q(\gamma_k)$
   (c) Donc, pour tout k, $\|c_k\|=\|\gamma_k\|$. Or, pour tout k,

   $$\|\gamma_k\|=\sqrt{\sum_{i=1}^k R_{i,k}^2}\geqslant|R_{k,k}|$$

   Il suffit alors de remarquer que

   $$\prod_{k=1}^n|R_{k,k}|=|\det(R)|=|\det(M)|$$

   (d) Oui. Si et seulement si la matrice R est diagonale, d'après ce qui précède. Et donc si et seulement si les colonnes de M forment une famille orthogonale.

23 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de son produit scalaire canonique. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les parties de E contenant les fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que $\mathscr{I}=\mathscr{P}^\perp$ et déterminer la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

24 Étudier la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n^2\left(\sqrt{2}\right)^n}\displaystyle\sum_{k=0}^n\sqrt{\binom{n}{k}}$.

Solution de 24 :
Cauchy-Schwarz.

25 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. Montrer que $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)$.
Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Solution de 25 :
Cauchy-Schwarz.

26 Soient a et b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$ et de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. On étudie l'endomorphisme f de E donné par

$$f(x) = x - (a \mid x) \cdot b.$$

1. À quelle condition simple l'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. À quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution de 26 :

1. f est facilement linéaire sur un espace de dimension finie, son injectivité suffit.
   Or si $f(x) = 0_E$, $\|x\| = |(a \mid x)|$. Comme $\|a\| = 1$, c'est un cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donc x est colinéaire à a : on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$. Mais alors $f(x) = 0_E = \lambda a - \lambda \|a\|^2 b = \lambda(a - b)$.
   On en déduit que
   - si $a \neq b$, $\lambda = 0$ et $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ donc f est injectif donc bijectif.
   - si $a = b$, on reconnaît l'expression de la projection orthogonale sur à $(\mathbb{R}a)^\perp$ qui n'est pas bijective $f(a) = 0_E$ et $a \neq 0_E$...).

   Autre rédaction possible : on complète (a) en une base orthonormée $\mathscr{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$ de E.
   La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1-b_1 & & & (0) \\ -b_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -b_n & (0) & & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $1 - b_1 = 1 - (a|b)$, donc f est bijective si et seulement si $(a|b) \neq 1$.
   Or $(a|b) = 1 \iff (a|b) = |(a|b)| = \|a\|\|b\| \iff a$ et b positiviement liés $\iff a = b$ car ils sont de même norme.
2. En utilisant la matrice, on a $\chi_f = (X - 1 + (a|b))(X-1)^{n-1}$ et $A - I_n$ est de rang 1 si et seulement si $b \neq 0_E$.
   Donc f est diagonalisable si et seulement si $b = 0_E$ ou ($b \neq 0_E$ et $(a|b) \neq 0$).

27 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \|X\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

1. Établir
$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|A^\mathsf{T} X\| \leqslant \|X\|.$$
2. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors $A^\mathsf{T} X = X$

3. Établir
$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \mathbb{I}_n)$$

Solution de 27 :

1. On a
$$\left\|A^\top X\right\|^2 = X^\top A A^\top X = \left\langle X, AA^\top X\right\rangle$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left\|A^\top X\right\|^2 = \left\langle X, AA^\top X\right\rangle \leqslant \|X\| \left\|AA^\top X\right\| \leqslant \|X\| \left\|A^\top X\right\|.$$
Ainsi,
$$\left\|A^\top X\right\| \leqslant \|X\|$$
et ce, que $A^\top X = 0$ ou non.
2. Si $AX = X$ alors
$$\left\|A^\top X - X\right\|^2 = \left\|A^\top X\right\|^2 - 2\left\langle A^\top X, X\right\rangle + \|X\|^2 \leqslant 2\left(\|X\|^2 - X^\top AX\right) = 0.$$
On en déduit $A^\top X = X$.
3. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$.
On a $AX = X$ (et donc $A^\top X = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.
$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle = X^\top AY - X^\top Y.$$
Or
$$X^\top AY = \left(A^\top X\right)^\top Y = X^\top Y$$
et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi,
$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n) = \{0\}.$$
Enfin, le théorème du rang
$$\dim \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) + \mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_n) = \dim E$$
permet de conclure
$$E = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n).$$

Projection orthogonale

28 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit D la droite d'équation $x = -y = z$, s la symétrie orthogonale par rapport à D et p le projecteur orthogonal sur D.

1. Déterminer les matrices de s et p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :
$$f(x, y) = \left\langle x | p(y)\right\rangle \text{ et } g(x, y) = \left\langle x | s(y)\right\rangle.$$
Démontrer que f et g sont des formes bilinéaires symétriques. Sont-elles définies positives ?

29 **Oral Mines** Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien, p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall\, x\in E,\ \ \|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Solution de 29 : Oral Mines

Le sens direct s'appelle inégalité de Bessel, c'est du cours (et une conséquence du théorème de Pythagore.

L'autre sens est moins évident et se voit bien sur un dessin par contraposée.

On suppose que la projection p n'est pas orthogonale, et on cherche un vecteur $x\in E$ tel que $\|p(x)\|>\|x\|$.

p étant la projection sur F parallèlement à G, avec $G^\perp\neq F$, il apparaît assez clairement sur un dessin que si $x\in G^\perp\setminus F$, $\|p(x)\|>\|x\|$. Vérifions-le.

On a $x=p(x)+(x-p(x))$ avec $p(x)\in F$ et $x-p(x)\in G$. Comme $x\in G^\perp$, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$\|p(x)\|^2=\|x-(x-p(x))\|^2=\|x\|^2+\|x-p(x)\|^2>\|x\|^2$$

car $x\notin F$ donc $x-p(x)\neq 0_E$.

On peut aussi faire une preuve directe, plus astucieuse. On suppose que la projection p est telle que pour tout $x\in E$, $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Si $(x,y)\in F\times G$ et $t\in\mathbb{R}$, on considère

$$\|p(x+t\,y)\|^2=\|x\|^2\leqslant\|x+t\,y\|^2=\|x\|^2+2t(x|y)+\|y\|^2$$

donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $2t(x|y)+\|y\|^2\geqslant 0$ ce qui implique $(x|y)=0$ (comme dans la preuve de Cauchy-Schwarz dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique positive : reconnaître une équation de droite ou faire $t\to\pm\infty$).

Distance à un sous-espace

30 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on définit $v_1=(1,2,-1,1)$, $v_2=(0,3,1,-1)$ et $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (dans la base canonique) et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Soit $e_1=(1,0,0,0)$. Calculer $\mathrm{d}(e_1,F)$.

31 Calculer, pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\inf_{M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)$

Solution de 31 :

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V)=\sum_{i,j}U_{i,j}V_{i,j}=\mathrm{tr}(U^\top\,V)$$

Sur quel sous-espace ? sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^{\mathsf{T}})$$

et valant

$$\left\|\frac{1}{2}(A - A^{\mathsf{T}})\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left(a_{i,j} - a_{j,i}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_{i,j} - a_{j,i}\right)^2$$

32 Pour tous réels a, b, c, on pose $I(a,b,c) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a,b,c) tel que $I(a,b,c)$ soit minimum et le déterminer.

Solution de 32 :

Il s'agit de la distance euclidienne de X^3 au sous-espace de dimension finie $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_X$.

Il est atteint en l'unique $P_F\left(X^3\right) = aX^2 + bX + c \in F$ tel que $X^3 - P_F\left(X^3\right) \in F^{\perp}$, donc est orthogonal à X^2, X et 1.

On trouve $a = c = 0$ et $b = \dfrac{1}{5}$ après calculs.

33 Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP

On désigne par $\mathscr{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E.

1. On suppose $\mathscr{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que

$$||x - y|| = \inf_{z\in\mathscr{C}} ||x - z|| \quad (= d(x, \mathscr{C})).$$

Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.

2. On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y = p(x)\ \Big) \iff \Big(\forall z \in \mathscr{C} \quad \langle y - x, y - z\rangle \leqslant 0\ \Big)$$

(pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z \in \mathscr{C}$, pour tout $t \in [0,1]$, $p(x) + t\big(z - p(x)\big) \in \mathscr{C}$).

4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :

$$||p(x) - p(x')||^2 \leqslant \langle x - x', p(x) - p(x')\rangle$$

puis démontrer que p est continue.

Solution de 33 : Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP

1. **On suppose $\mathscr{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :**

$$||x-y|| = \inf_{z\in\mathscr{C}} ||x-z|| \quad (= d(x,\mathscr{C})).$$

Existence : Soit x fixé dans E. L'application $z \mapsto ||x-z||$, continue sur le compact $\mathscr{C}$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y \in \mathscr{C}$.

Unicité : C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.

Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de $\mathscr{C}$ tels que

$$||x-y_1|| = ||x-y_2|| = d(x,\mathscr{C})$$

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2(||y_1-x||^2 + ||y_2-x||^2) = ||y_1+y_2-2x||^2 + ||y_1-y_2||^2$$

(ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela !) Divisons par 4 :

$$d(x,\mathscr{C})^2 = ||\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x||^2 + \frac{1}{4}||y_1-y_2||^2$$

Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)\in\mathscr{C}$, donc $||\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x||^2 \geqslant d(x,\mathscr{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $||y_1-y_2||^2 = 0$, donc $y_1 = y_2$.

On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, etc…

2. **On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat est encore vrai.**

Existence : On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de $\mathscr{C}$ « éloignés » de x que l'on trouvera y. On considère donc encore x fixé dans E. Soit $r > 0$ tel que

$$B'(x,r)\cap\mathscr{C} \neq \varnothing$$

(l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r = d(x,y)$ où y est un élément quelconque de $\mathscr{C}$). Posons alors $\mathscr{C}' = B'(x,r)\cap\mathscr{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, $\mathscr{C}'$ est compacte. Il existe donc $y_0 \in \mathscr{C}'$ tel que

$$||x-y_0|| = d(x,\mathscr{C}')$$

Si $z\in\mathscr{C}$, de deux choses l'une :

— Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $||x-y_0|| \leqslant ||x-z||$,

— Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $||x-y_0|| \leqslant r < ||x-z||$

On voit que $||x-y_0||$ minore $\{||x-z|| \ ; \ z\in\mathscr{C}\}$. Mais $y_0\in\mathscr{C}$, donc

$$||x-y_0|| = d(x,\mathscr{C})$$

Unicité : La démonstration du **1** marche encore : on n'a utilisé que la convexité de $\mathscr{C}$.

Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y = p(x)\ \Big) \iff \Big(\forall z\in\mathscr{C} \quad \langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0\ \Big)$$

— Supposons que $y \in \mathscr{C}$ vérifie

$$\forall z \in \mathscr{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leqslant 0 \,\Big)$$

Alors, pour tout $z \in \mathscr{C}$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle \\ &\geqslant \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &\geqslant \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y = p(x)$.

— Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathscr{C}$; par convexité, on a

$$\forall t \in [0, 1] \qquad (1 - t)y + tz \in \mathscr{C}$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \|(1 - t)y + tz - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

ce qui s'écrit

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \|(y - x) + t(z - y)\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

ou encore, en développant,

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \|y - x\|^2 + t^2\|z - y\|^2 + 2t\langle y - x, z - y \rangle \geqslant \|y - x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1] \qquad t^2\|z - y\|^2 + 2t\langle y - x, z - y \rangle \geqslant 0$$

d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,

$$\forall t \in]0, 1] \qquad t\|z - y\|^2 + 2\langle y - x, z - y \rangle \geqslant 0$$

et en prenant la limite quand $t \to 0$,

$$\langle y - x, z - y \rangle \geqslant 0$$

qui est bien ce qu'on voulait.

3. **En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :**

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leqslant \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle$$

puis démontrer que p est continue

Partons du second membre :

$$\begin{aligned} \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle = \langle x - p(x), p(x) - p(x') \rangle + \langle p(x) - p(x'), p(x) - p(x') \rangle \\ + \langle p(x') - x', p(x) - p(x') \rangle \end{aligned}$$

La question précédente permet alors de conclure à l'inégalité voulue. Puis, par Cauchy-Schwarz, on obtient que p est 1-lipschitzienne donc continue.

34 Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

Si $u_1,\dots,u_n$ sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\big(E,\langle .,.\rangle\big)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1,\dots,u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i,u_j\rangle$.

1. Démontrer que si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant $(u_1,\dots,u_n)$ libre, et on considère $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$. On note :
$$A=\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u_1,\dots,u_n).$$
   (a) Exprimer $G=G(u_1,\dots,u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.
   (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.
3. On suppose la famille $(u_1,\dots,u_n)$ libre ; on désigne par F le s.e.v. engendré par $(u_1,\dots,u_n)$, et par x un vecteur de E. Démontrer :
$$\big[d(x,F)\big]^2 \;=\; \frac{\det\big(G(u_1,\dots,u_n,x)\big)}{\det\big(G(u_1,\dots,u_n)\big)}$$
On pourra par exemple, dans le calcul de $\det\big(G(u_1,\dots,u_n,x)\big)$ écrire $x=(x-z)+z$, z désignant le projeté orthogonal de x sur F.

Solution de 34 : Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

1. Supposons $u_n=\alpha_{n-1}u_{n-1}+\ldots+\alpha_1u_1$. Alors, pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$,
$$\langle u_i,u_n\rangle=\alpha_{n-1}\langle u_i,u_{n-1}\rangle+\ldots+\alpha_1\langle u_i,u_1\rangle$$
ou encore
$$\begin{pmatrix}\langle u_1,u_n\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_n\rangle\end{pmatrix}=\alpha_{n-1}\begin{pmatrix}\langle u_1,u_{n-1}\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_{n-1}\rangle\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_1\begin{pmatrix}\langle u_1,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_1\rangle\end{pmatrix}$$
que l'on peut lire de la manière suivante :
$$c_n=\alpha_{n-1}c_{n-1}+\ldots+\alpha_1c_1$$
où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1,\dots,u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.
Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i. Mais si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée, au moins un des u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k. Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

2. Rappelons que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

et, la base $(e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j \rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u_i \rangle \langle e_k, u_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j} \\ &= \left({}^t A\, A\right)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = A^{\intercal} A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

$(A \in GL_n(\mathbb{R}))$. En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

3. La dernière colonne de $G(u_1, \dots, u_n, x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle x, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u_1, x-z \rangle \\ \langle u_2, x-z \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x-z \rangle \\ \langle x, x-z \rangle \end{pmatrix}$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle z, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \langle x-z, x-z \rangle \end{pmatrix}$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\dots) = \det(G(\dots))$:

$$g(u_1, \dots, u_n, x) = g(u_1, \dots, u_n, z) + \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_1, u_n \rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_n, u_n \rangle & 0 \\ \langle z, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle z, u_n \rangle & \|x-z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k, x\rangle = \langle u_k, z\rangle + \langle u_k, x-z\rangle = \langle u_k, z\rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant ; tenant compte de la nullité de $g(u_1,\dots,u_n,z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1,\dots,u_n,x) = \|x-z\|^2\ g(u_1,\dots,u_n)$$

35 **ENS Rennes** On pose $E = \mathscr{C}^1([0;1],R)$ et

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $(\cdot,\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \left\{f \in E \mid f \text{ est de classe } \mathscr{E}^2 \text{ et } f'' = f\right\}.$$

   Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
   Exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ at

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}.$$

   Calculer

$$\inf_{f\in E_s, f} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t.$$

Solution de 35 : ENS Rennes

1. Vérification sans peine.
2. Soit $(f,g) \in V \times W$. On a

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g''(t) + f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 = 0$$

   et les espaces V et W sont donc en somme directe. Soit $f \in E$. Posons

$$\lambda = f(0) \text{ et } \mu = \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}.$$

   On a $f = g + h$ avec $h = \lambda\mathrm{ch} + \mu\mathrm{sh} \in W$ et $g = f - h \in V$ par construction. Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce qui précàde

$$p(f) = f(0)\mathrm{ch} + \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}.$$

3. Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g = \alpha\,\mathrm{ch} + \frac{\beta - \alpha\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\ \mathrm{sh}.$$

   Les fonctions de $E_{u,\beta}$ sont alors de la forme $f = g + h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2.$$

   On en déduit

$$\inf_{f\in E_s,} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|g\|^2 = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\mathrm{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}.$$