Vrai ou faux

1. S'il existe une suite (u_n) convergeant vers a telle que $f(u_n) \to \ell$, alors f admet ℓ comme limite en a.
2. Pour que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to F$ admette une limite en $(0,0)$, il suffit que les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ convergent vers la même limite.
3. Toute application continue est uniformément continue.
4. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
5. Une application linéaire est toujours continue.

1. Exercices cherchés en cours

1 Étudier les limites en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ et $g : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{\left|x-y\right|}$.

Solution de 1 :
$f(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: s'il y a une limite, c'est 0. $f(0,y) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ aussi mais cela ne suffit pas !
$\left|f(x),y)\right| \leqslant |x| + \left|y\right| \to 0$.
Autre méthode : changement de variable en polaire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.
$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \to 0$.
$g(0,y) \to 0$ et $g(x, x+x^2) \to 1$ donc pas de limite (par composition ou par caractérisation séquentielle).

2 Étudier la continuité de $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{|x|+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Solution de 2 :
f est discontinue en $(0,0)$ malgré la continuité des applications partielles, mais continue ailleurs par opérations.
g est discontinue en $(0,0)$ vu les applications partielles, mais continue ailleurs par opérations.

3 Montrer que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4 **CCINP 35** E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.
   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Solution de 4 : CCINP 35

1. Prouvons que $P1. \Longrightarrow P2.$.
Supposons f continue en a.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers a. Prouvons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par continuité de f en a, $\exists \alpha > 0$ / $\forall x \in E, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\|f(x) - f(a)\right\| \leqslant \varepsilon$. (*)
On fixe un tel α strictement positif.
Par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - a\| \leqslant \alpha$.
On fixe un N convenable.
Alors, d'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \left\|f(x_n) - f(a)\right\| \leqslant \varepsilon$.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
Prouvons que $P2. \Longrightarrow P1.$

Supposons $P2.$ vraie.
Raisonnons par l'absurde en supposant que f non continue en a.
C'est-à-dire $\exists\, \varepsilon > 0$ / $\forall\, \alpha > 0$, $\exists\, x \in E$ tel que $\|x - a\| \leqslant \alpha$ et $\|f(x) - f(a)\| > \varepsilon$.
On fixe un tel ε strictement positif.
Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n - a\| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(a)\| > \varepsilon$. (*)
Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n - a\| \leqslant \dfrac{1}{n}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a.
Donc, d'après l'hypothèse, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(a)$.
Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \|f(x_n) - f(a)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, on obtient une contradiction avec (*).

2. Soit $x \in E$.
Puisque la partie A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = g(x_n)$.
Et en passant à la limite, sachant que f et g sont continues sur E, on obtient $f(x) = g(x)$.

5 **CCINP 36** Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.

P2. f est continue en 0_E.

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

Solution de 5 : CCINP 36

1. P1 $\Rightarrow$ P2 de manière évidente.
   Prouvons que P2 $\Rightarrow$ P3.

   Supposons f continue en 0_E.
   Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - 0_E\| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\|f(x) - f(0_E)\right\| \leqslant 1$.
   Soit $x \in E$

   Si $x \neq 0_E$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$. Puisque $\left\|y\right\| = \alpha$, on a $\left\|f(y)\right\| \leqslant 1$.

   Donc, par linéarité de f on obtient $\left\|f(x)\right\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$.
   Si $x = 0_E$ l'inégalité précédente est encore vérifiée.

   En prenant alors $k = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat voulu.

   Prouvons que P3 $\Rightarrow$ P1.

   Supposons que $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\| \leqslant k\|x\|$.
   Comme f est linéaire, $\forall (x, y) \in E^2$, $\left\|f(y) - f(x)\right\| = \left\|f(y - x)\right\| \leqslant k\left\|y - x\right\|$.
   La fonction f est alors lipschitzienne, donc continue sur E.

2. L'application φ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale et continue car :
   $\forall f \in E$, $\left|\varphi(f)\right| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left\|f\right\|\mathrm{d}t = \left\|f\right\|$.

6 Montrer qu'une norme est 1-lipschitzienne.

Solution de 6 :
Conséquence de l'inégalité triangulaire (celle de gauche).

7

1. Montrer que $\varphi : f \in (\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C}), N_\infty) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est continue. Est-ce encore le cas avec la norme N_1 de la convergence en moyenne ?
2. Montrer que $f \in (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), N_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est non continue.

Solution de 7 :

1. C'est une forme linéaire telle que pour tout f, $\varphi(f) \leqslant (b-a)N_\infty(f)$. C'est encore le cas avec N_1.
2. Considérer f_n telle que $f_n(0) = 1$ mais $\left\|f_n\right\|_1 = \dfrac{1}{n}$ (par exemple un triangle : $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = 0$ si $x \geqslant \frac{2}{n}$ et f_n affine entre 0 et $\frac{2}{n}$) ou alors $f_n : x \mapsto x^n$

8 CCINP 38

1. On se place sur $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\,\|_1$ définie par : $\forall f\in E$, $\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f)=g \end{array}$ avec $\forall x\in[0,1]$, $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t)=n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,...,x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\,\|_2$ où $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2=\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\,\|_\infty$ où $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$.
   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

Solution de 8 : CCINP 38

1. Soit $f\in E$. On pose $g=u(f)$.
   On a $\forall x\in[0,1]$, $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   Donc $\|g\|_1=\displaystyle\int_0^1 \left|g(x)\right|dx=\int_0^1\left|\int_0^x f(t)dt\right|dx$.
   Or, $\forall x\in[0,1]$, $\left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right|\leqslant\int_0^x\left|f(t)\right|dt$.
   De plus, $|f|$ est positive donc $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\int_0^x\left|f(t)\right|dt\leqslant\int_0^1\left|f(t)\right|dt=\|f\|_1$.
   Donc $\|g\|_1\leqslant\displaystyle\int_0^1\|f\|_1dt=\|f\|_1$.
   Donc $\forall f\in E$, $\|u(f)\|_1\leqslant\|f\|_1$.
   Donc u est continue sur E et $|||u|||=\sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}}\frac{\|u(f)\|_1}{\|f\|_1}$.
   Et on en déduit que $|||u|||\leqslant 1$ (*)
   On pose, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $f_n(t)=n\mathrm{e}^{-nt}$.

$\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \left|f_n(t)\right| dt = \left[-e^{-nt}\right]_0^1 = 1 - e^{-n}$.

$\|u(f_n)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |u(f_n)(x)| dx$.

Or, $u(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^x n e^{-nt} dt = 1 - e^{-nx}$.

De plus, $\forall x \in [0,1]$, $1 - e^{-nx} \geqslant 0$.

Donc $\|u(f_n)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - e^{-nx}\right) dx = \left[x + \frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n}$.

On en déduit que $\dfrac{\|u(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \dfrac{1 + \frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - e^{-n}}$.

Puis, comme $|||u||| = \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(f)\|_1}{\|f\|}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{\|u(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{1 + \frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - e^{-n}}$.

Et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $|||u||| \geqslant 1$ (**)

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que $|||u||| = 1$.

2. (a) u est clairement linéaire et $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc, d'après le cours, u est continue sur $\mathbb{R}^n$ et ce, quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisqu'elles sont toutes équivalentes.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\,\|_2$, qui est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, noté $(\,|\,)$. $|||u||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_2}$.

   Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

   On pose $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On a $|u(x)| = |(x|a)|$.

   Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|u(x)| \leqslant \|a\|_2 \|x\|_2$.

   Donc $|||u||| \leqslant \|a\|_2$ (*)

   On pose $x = a$.

   $a \neq 0$ donc $\dfrac{|u(x)|}{\|x\|_2} = \dfrac{\|a\|_2^2}{\|a\|_2}$.

   Donc $|||u||| \geqslant \|a\|_2$ (**).

   Donc, d'après (*) et (**), $|||u||| = \|a\|_2$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\,\|_\infty$. $|||u||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_\infty}$.

   Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

   D'après l'inégalité triangulaire, $|u(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i x_i|$.

   De plus, $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_i x_i| = |a_i||x_i| \leqslant \|x\|_\infty |a_i|$.

   On en déduit que $|u(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty |a_i|$.

   Donc $\forall x \in E$, $|u(x)| \leqslant (\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|) \|x\|_\infty$.

   Donc $|||u||| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ (*)

   On pose alors $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \begin{cases} \frac{|a_i|}{a_i} & \text{si } a_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$a \neq 0$ donc $\|x\|_\infty = 1$ puis $\dfrac{|u(x)|}{\|x\|_\infty} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

Donc $|||u||| \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ (**).

Donc, d'après (*) et (**), $|||u||| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

3. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$.
   Pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de E, on pose $\|P\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant p} |a_k|$.
   On considère alors l'endomorphisme u de E défini par :$\forall P \in E,\ u(P) = P'$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = X^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\|u(P_n)\|}{\|P_n\|} = n$ et donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\|u(P_n)\|}{\|P_n\|} = +\infty$.
   Donc $\nexists k \in \mathbb{R}^+ / \ \forall P \in E, \|u(P)\| \leqslant k\|P\|$.
   Donc u n'est pas continue sur E muni de la norme $\|\ \|$.

9 CCINP 13

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Solution de 9 : CCINP 13

1. Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite à valeurs dans A on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.
   C'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.
   Remarque : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant strictement croissante, on a, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie compacte de E.
   Montrons que A est une partie fermée de E.
   C'est-à-dire montrons que toute suite à valeurs dans A qui converge, converge dans A.
   Soit (u_n) une suite à valeurs dans A telle que (u_n) converge vers ℓ. A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell' \in A$.
   Or, (x_n) converge vers ℓ donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers ℓ, en tant que sous-suite de (x_n). Par unicité de la limite, $\ell' = \ell$.
   Or, $\ell' \in A$ donc $\ell \in A$.

3. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé.
   Rappel : Soit B une partie de E. B est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in B, \|x\| \leqslant M$.
   Soit A une partie compacte de E. Montrons que A est une partie bornée de E.
   Raisonnons par l'absurde. Supposons que A est non bornée.
   C'est-à-dire, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A / \|x\| > M$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \|x_n\| > n \quad (*)$
   (x_n) est une suite à valeurs dans A et A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.
   Donc, d'après $(*), \forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n)$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\varphi(n)}\right\| > n$.
   Donc, $\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = +\infty$.
   Absurde car $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est bornée.
4. Posons $S = S(0,1)$.
   (a) $\forall x \in S, \|x\| = 1$ donc S est bornée.
   Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ $\forall (x,y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$ donc f est 1-lipschitzienne.
   Donc f est continue sur E.
   Or, $S = f^{-1}(1)$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc S est une partie fermée de E, en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé.
   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   $\|X^n - X^m\|_1 = 2$
   Supposons que S soit une partie compacte.
   (X^n) est une partie compacte de E donc existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in S$.
   Alors $\lim_{n \to +\infty} \left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = |\ell - \ell| = 0$ contredit $\left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = 2$.
   Donc S est non compact.

10 Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\right\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

Solution de 10 :

1.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Si ℓ est valeur d'adhérence, φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$, $\varepsilon > 0$, alors apcr $u_{\varphi(n)} \in B(\ell, \varepsilon)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, si $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est majoré et si $p \in \mathbb{N}$, $\left\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\right\}$ ne peut être vide, sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ serait majoré par p et inclus dans $\mathbb{N}$ donc fini.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Si pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\{n\geqslant p, u_n\in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide, on construit une suite extraite convergeant vers ℓ : on pose $\varphi(0)\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi(0)\geqslant 0$ et $u_{\varphi(0)}\in B\left(\ell,\frac{1}{2^0}\right)$.
Puis $\varphi(1)\geqslant p=\varphi(0)+1$ tel que $u_{\varphi(1)}\in B\left(\ell,\frac{1}{2^1}\right)$.
Et par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)\geqslant p=\varphi(n-1)+1$ tel que $u_{\varphi(n)}\in B\left(\ell,\frac{1}{2^n}\right)$.
Alors φ est strictement croissante et, par construction, $u_{\varphi(n)}\to\ell$.

2. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences de u. Montrons que A^c est ouverte.
Si $x\in A^c$, on a $\varepsilon>0$ tel que $\{n, u_n\in B(x,\varepsilon)\}$ est fini et donc aucun des élément de $B(x,\varepsilon)$ ne peut être valeur d'adhérence non plus, c'est-à-dire que $B(x,\varepsilon)\subset A^c$, ce qui signifie bien que A^c est ouverte et que A est fermée.

11 Montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left|p_k\right|$ n'est pas compacte.

On pourra utiliser la suite $(X^n)_n$.

Solution de 11 :
$X^n\in S(0,1)$ (qui est fermée et bornée).
Si (X^n) a une valeur d'adhérence, on a $P\in\mathbb{K}[X]$ et φ extractrice telle que $\left\|X^{\varphi(n)}-P\right\|_\infty\to 0$. Alors chaque cœfficient de $X^{\varphi(n)}$ tend vers le cœfficient correspondant de P, donc $P=0_{\mathbb{K}[X]}$. Mais alors $1=\left\|X^{\varphi(n)}\right\|_\infty\to 0$ ce qui est contradictoire.

12 **Oral Mines** Montrer que la boule unité fermée de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

Solution de 12 : Oral Mines
$f_n : x\in[0,1]\mapsto x^n$ est continue, de norme 1 et converge simplement vers $\delta_{\cdot,1}$. Si on pouvait en extraire une suite uniformément convergente, la limite devrait être continue.

Topologie Matricielle

13 Montrer que $\det$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 13 :
En effet, elle est polynomiale en les cœfficients de la matrice.

14 Montrer que $M\mapsto\mathrm{Com}(M)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 14 :
En effet, ses cœfficients sont polynomiaux en les cœfficients de la matrice.

15 Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

Solution de 15 :
Il s'agit de l'ouvert $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ par l'application continue $\det$.

16 Montrer de deux manières différentes que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Solution de 16 :

1re méthode : pour k assez grand, $\dfrac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car le nombre de valeurs propres est fini. Alors $M_k = M - \dfrac{1}{k} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $M_k \to M$.

2e méthode : on a P, Q inversibles telles que $M = P J_r Q$ avec $r = \operatorname{rg} M$. On pose $J_{r,k} = J_r + \dfrac{1}{k} I_n$. Alors $J_{r,k}$ est inversible et $J_{r,k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} J_r$. Par continuité de l'application linéaire en dimension finie $A \mapsto PAQ$, $(M_k)_k = (P J_{r,k} Q_k$ est une suite de matrices inversibles telles que $M_k \to M$.

On vérifie que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A est inversible car $AB = A(BA)A^{-1}$ et le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Donc $A \mapsto \chi_{AB} - \chi_{BA}$ est nulle sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et continue car les cœfficients du polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ sont polynomiaux en ceux de A.

Autre argument : si (A_k) suite de matrices inversibles convergeant vers A, alors pour tout k, $\chi_{A_k B} = \chi_{B A_k}$, puis $A_k B \to AB$ et $BA_k \to BA$ car $A \mapsto AB$ et $B \mapsto BA$ sont linéaires en dimension finie (au départ) donc continues. Et $A \mapsto \chi_A = \det(XI_n - A)$ est continue car les cœfficient du polynôme caractéristiques sont polynomiaux en ceux de A.

Donc avec $k \to +\infty$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

17 Montrer que les ensembles de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures, symétriques et de trace nulle respectivement sont fermés.

Solution de 17 :

Ce sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, ils sont donc fermés.

Autre rédaction possible :

Soit $\varphi_{i,j} : A \mapsto a_{i,j}$, linéaire donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \bigcap\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n} \varphi_{i,j}^{-1}(\{0\})$ fermé comme intersection (finie) de fermés où les $\phi_{i,j} : M \mapsto m_{i,j}$ sont des applications linéaires sur des espaces de dimension finie, donc sont continues.

Soit $u : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^\intercal - A$ définie sur un espace de dimension finie et linéaire donc continue. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = u^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par cette application.

Enfin l'ensemble des matrices de trace nulle est l'image réciproque du fermé $\{0_n\}$ par l'application linéaire en dimension finie donc continue tr.

18 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\}$ est compact.

Solution de 18 : Trèèèèès classique

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^\intercal M$ (bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|^2 = \operatorname{tr}(M^\intercal M)$, on a $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}(0, \sqrt{n})$.

19 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Solution de 19 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est trigonalisable : on peut écrire $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire, avec sur la diagonale les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

Soit, pour $k \geqslant 1$, $T_k = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{n}{k}\right)$.

Il n'y a qu'un nombre fini de k pour lesquels on ait $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$ avec $i \neq j$ (ce qui revient à $\frac{1}{k} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{i-j}$), on est sûr à partir d'un certain rang que T_k possède n valeurs propres distinctes en dimension n, donc est diagonalisable. C'est donc aussi le cas de $M_k = PT_kP^{-1}$.

Or $M_k \to M$ car $T_k \to T$ et $A \mapsto PAP^{-1}$ linéaire sur un espace de dimension finie donc continue.

D'où la densité.

Or le théorème de Cayley-Hamilton est facile pour une matrice diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$, $\chi_A(A) = \chi_D(A) = P\chi_D(D)P^{-1} = 0$ car les cœfficients diagonaux de D sont justement les racines de $\chi_D = \chi_A$.

Soit pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, une suite $(A_k)_k$ de matrices diagonalisables tendant vers A.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_k}(A_k) = 0$.

En remarquant que $\chi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_B(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue car les cœfficients de χ_B sont polynomiaux en ceux de B et les fonctions $B \mapsto B^p$ sont continues car $(B_1, \dots, B_p) \mapsto B1 \times \cdots \times B_p$ est p-linéaire, on tire, en passant à la limite, $\chi_A(A) = 0$.

Remarquons qu'il n'y a pas de problème de corps car le polynôme caractéristique de A dans $\mathbb{K}$ est le même que celui dans $\mathbb{C}$.

20 L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?

On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.

Solution de 20 :

$\Delta : M \mapsto$ le discriminant de χ_M est continue car polynomiale en les cœfficients de M.

Tout matrice diagonalisable M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a des racines réelles donc $\Delta(M) \geqslant 0$. Ainsi, tout matrice M limite d'une suite de matrices diagonalisable vérifie aussi $\Delta(M) \geqslant 0$.

Or il existe des matrices réelles sans valeur propre réelle, d'où l'absence de densité.

21 Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

Solution de 21 :

22 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

Solution de 22 :

Formule de la comatrice !

23 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal et que l'application rang ne sont pas continue.

Solution de 23 :

Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ (0) & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$, alors $M_k = \dfrac{1}{k} M \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_n$ avec $\pi_{M_k} = X^n \not\to X$.

On a aussi $\operatorname{rg} M_k = n-1 \not\to \operatorname{rg} O_n = 0$.

24 Donner le cœfficient de degré 1 de χ_A en fonction de la trace et de la comatrice de A.

On suggère de commencer par supposer A inversible et d'exprimer χ_A en fonction de $\chi_{A^{-1}}$.

Solution de 24 :

Si A est inversible, on montre que $\chi_A(X) = (-1)^n X^n \det(A) \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{X}\right)$ et on en déduit que le cœfficient recherché est $(-1)^{n+1} \operatorname{tr}(\operatorname{Com} A)$.

Puis, ce cœfficient étant une fonction continue de A car polynomiale et l'application $A \mapsto (-1)^{n+1} \operatorname{tr}(\operatorname{Com} A)$ l'étant aussi (linéarité en dimension finie de la trace et application comatrice polynomiale), on généralise la formule par densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

25 Étudier la connexité par arcs de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 25 :

- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs alors que $\det$ est continue.
- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs : on montre que chaque matrice inversible peut être jointe continûment à I_n.

  Pour cela, on trigonalise (on peut), $M = PTP^{-1}$. On note d_i les cœfficients diagonaux de T.

  Par connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$, pour chaque $d_i (\neq 0)$, on a un chemin continu $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ tel que $\phi_i(1) = d_i$ et $\phi_i(0) = 1$.

  On pose alors $A(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & (t \cdot t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_n(t) \end{pmatrix}$.

  $\Phi : t \mapsto PA(t)P^{-1}$ continue par opérations, à valeurs inversibles, $\Phi(0) = I_n$ et $\Phi(1) = M$.
- $\mathscr{O}(n)$ n'est pas connexe par arcs car $\det \mathscr{O}(n) = \{\pm 1\}$ non connexe par arcs alors que $\det$ est continue.

26 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Solution de 26 :

L'ensemble des matrices diagonalisable est étoilé par rapport à la matrice diagonalisable 0_n.

2. Limites et continuité

27 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x+y} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{1-\cos(xy)}{y^2} \qquad j : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$$

$$g : (x,y) \mapsto \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad i : (x,y) \mapsto \frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y} \qquad k : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$$

Solution de 27 :

- Pas de limite : $f\left(x, -x+x^2\right) \to -1 \neq 0 = f(x,0)$.
- Pas de limite : $f(x,x) = 2$ et $f(x,0) = 1$.
- $h(x,y) \sim \dfrac{x^2y^2}{2y^2} = \dfrac{x^2}{2} \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.
- $i(x,y) \to 1$ car $\dfrac{\sin y}{y} \to 1$.
- Avec des formules de trigonométrie (la formule hyperbolique est à redémontrer),
$$j(x,y) = \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \sim \frac{\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = 1.$$
- $k(x,0) \to 1$ et $k(x,x) = -1$: pas de limite.

28 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes

$$f : (x,y) \mapsto \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x}$$

Solution de 28 :

- On prolonge en tout $(x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $(x,y) \neq (x_0, x_0)$, par théorème des accroissements finis (dont $\cos$ vérifie bien les hypothèses), on a $c_{x,y}$ entre x et y tel que $f(x,y) = \cos' c_{x,y} = -\sin c_{x,y}$.
  Lorsque $(x,y) \to (x_0,x_0)$, $c_{x,y} \to x_0$ par encadrement et par continuité de $\sin$, $f(x,y) \to -\sin x_0$.
  On prolonge f en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = -\sin x$.
  Attention, contrairement aux fonctions d'une seule variable, la continuité du prolongement n'est pas automatique.
  Mais il est automatiquement continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ et si $x_0 \in \mathbb{R}$, on a
  - ⋆ $f(x,y) = \dfrac{\cos x - \cos y}{x-y} \to -\sin x_0 = f(x_0,x_0)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$
  - ⋆ $f(x,x) = -\sin x \to -\sin x_0 = f(x_0,x_0)$

  donc, avec le lemme du préambule, le prolongement est bien continu sur $\mathbb{R}^2$ entier.
- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ par opérations.
  Si $y_0 \in \mathbb{R}$, $g(x,y) = x + \dfrac{y^2}{x}$ n'a pas de limite pour $(x,y) \to (0,y_0)$ si $y_0 \neq 0$, et $g(x,0) \to 0$ pour $x \to 0$, $g\left(x^2, x\right) \to 1$ pour $x \to 0$ donc g n'a pas de limite en $(0,0)$ non plus.
  Il n'y a donc pas de prolongement de g par continuité.

29 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \qquad h:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x\neq y,\\ |x| & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Solution de 29 :

- En polaires, $f(x,y)=r^2\cos^4\theta\sin^4\theta\to 0=f(0,0)$ lorsque $(x,y)\to(0,0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- g est continu en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\in\mathbb{R}\}$ par opérations.
  Et si $x_0\in\mathbb{R}$, Pour $y\neq 0$, $g(x,y)=\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y}\to 1+x_0=g(x_0,0)$, et $g(x,0)=1+x^2\to 1+x_0^2=g(x_0,0)$ donc, avec le lemme du préambule, g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- On remarque que $x^4-2x^3y+x^2y^2=(x^2-xy)^2$, donc, si $x\neq y$, $h(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)|x|$.
  h est continue par opérations sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}$.
  Si $x\neq 0$, $f\left(x,x+\frac{1}{n}\right)=-|x|\not\to|x|=f(x,x)$ donc f n'est pas continue en (x,x).
  En $(0,0)$, si $x\neq 0$, $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$ et $f(x,x)=|x|\xrightarrow[x\to 0]{}0=f(0,0)$ donc avec le lemme du préambule, f en continue en $(0,0)$.

30 Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

31 Soir $f:E\to E$ telle que $f(x)=x$ si $\|x\|<1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ sinon.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

3. Continuité des applications linéaires, normes subordonnées

32 Un exemple de norme subordonnée

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ et $\Delta(u)=(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Δ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Calculer la norme de Δ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

33 Soit u l'application de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(f)=f(1)$.

1. Démontrer que u n'est pas continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_1.
2. L'application u est-elle continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ ?

34 **Normes subordonnées matricielles**

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.

   Montrer que pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.

   Montrer que pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$.

Solution de 34 : Normes subordonnées matricielles

1. Si $X\in S$, $\|AX\|_\infty=\max\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}x_j\right|\right)=\max\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$.
2. Si $X\in S$, $\|AX\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}x_j\right|=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)\left|x_j\right|\leqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)\|X\|_1$, majorant atteint en prenant le vecteur de la base canonique correspondant au j pour lequel ce $\max$ est atteint.

4. Continuité et topologie

35 Montrer que si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Com}(AB)=\mathrm{Com}\,A\,\mathrm{Com}\,B$.

Solution de 35 :

La formule de la comatrice permet de traiter le cas des matrices inversibles.

Il suffit alors d'utiliser la densité de celles-ci et la continuité de la fonction comatrice pour conclure.

36

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'est ni ouvert ni fermé.
2. En utilisant par exemple l'application

$$\phi : M\mapsto(\mathrm{tr}\,M)^2-4\det M,$$

   déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

Solution de 36 :

1. Trouver une suite de matrices diagonalisables tendant vers une matrice qui ne l'est pas et une suite de matrices non diagonalisables tendant vers une matrice diagonalisable.

2. L'application ϕ proposée est continue et pour toute M, $\phi(M) = \chi_M$.
   Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices 2×2 diagonalisables.
   Alors $\phi^{-1}(]0,+\infty[)$ est l'ouvert des matrices diagonalisables ayant deux valeurs propres distinctes, inclus dans l'ensemble des matrices diagonalisable. Est-ce le plus grand ? Si on considère un autre ouvert $\mathscr{O}$ inclus dans $\mathscr{D}$, et si M est une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales, alors $M = \lambda I_2$ est une homothétie. Or au voisinage de λI_2, on trouve des matrices non diagonalisables : $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \varepsilon\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ avec $\varepsilon \neq 0$. Donc $\mathscr{O}$ est inclus dans l'ensemble des matrices ayant deux valeurs propres distinctes et qui est l'intérieur de $\mathscr{D}$.
   Puis $\mathscr{T} = \phi^{-1}([0,+\infty[)$ est le fermé des matrices trigonalisables, qui contient $\mathscr{D}$. Donc $\overline{\mathscr{D}} \subset \mathscr{T}$.
   Or toute matrice trigonalisable est classiquement limite d'une suite de matrices diagonalisables (il suffit de perturber les éléments diagonaux pour avec des valeurs propres distinctes), donc $\mathscr{T} \subset \overline{\mathscr{D}}$.
   Finalement, $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{T}$.

37 Autour de la distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Pour A partie de non vide de E et $x \in E$, on pose $\mathrm{d}(x,A) = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|$.

1. Rappeler pourquoi $d(x,A)$ est bien définie et $x \mapsto \mathrm{d}(x,A)$ est continue.
2. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E,\ \mathrm{d}(x,A) < \dfrac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que A_n est ouvert.
   (b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
   (c) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
   (d) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
4. **Cas où la distance à un fermé est convexe**
   On suppose que F est une partie non vide fermée de E et que $x \mapsto d(x,F)$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$, $\mathrm{d}(tx+(1-t)y, F) \leqslant t\,\mathrm{d}(x,F) + (1-t)\mathrm{d}(y,F)$.
   Prouver que F est convexe.
5. **Tout espace vectoriel normé est séparé et normal** On suppose que F_1 et F_2 sont des fermés non vides disjoints de E.
   (a) E est **séparé** [1] : c'est le cas où F_1 et F_2 sont des singletons. Si $x_1 \neq x_2$, montrer qu'on peut trouver des ouverts U, V disjoints de E tels que $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$.
   (b) Montrer qu'il existe une application continue $f : E \to [0,1]$ telle que $F_1 = f^{(-1)}(\{1\})$ et $F_2 = f^{(-1)}(\{0\})$.
   On pourra construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto \mathrm{d}(x,F_1)$ et $x \mapsto d(x,F_2)$.
   (c) E est **normal** : Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
   On pourra introduire $\varphi : x \mapsto \mathrm{d}(x,F_1) - \mathrm{d}(x,F_2)$.

38

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E. On veut démontrer que φ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé.

1. C'est cet axiome qui garantit l'unicité de la limite.

1. Montrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose $\operatorname{Ker}\varphi$ fermé et φ non nulle.
   Fixons $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. On note $\delta = \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker}\varphi)$. Montrer que $\delta > 0$ puis que pour tout $y \in E$
   $$\left|\varphi(y)\right| \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\delta} \left\|y\right\|$$
   puis conclure.

Solution de 38 :

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
2. $\delta = 0$ signifierait que x_0 est dans $\overline{\operatorname{Ker}\varphi}$, adhérence de $\operatorname{Ker}\varphi$. Or $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé, donc $\overline{\operatorname{Ker}\varphi} = \operatorname{Ker}\varphi$, et par hypothèse $x_0 \notin \operatorname{Ker}\varphi$, on a donc bien $\delta > 0$.
   L'inégalité suivante est moins évidente. Mais elle est claire si $\varphi(y) = 0$.
   Supposons donc $\varphi(y) \neq 0$. Alors
   $$\left|\varphi(y)\right| \leqslant \frac{\left|\varphi(x_0)\right|}{\delta} \left\|y\right\| \iff \delta \leqslant \frac{\left|\varphi(x_0)\right|}{\left|\varphi(y)\right|} \left\|y\right\| = \left\|\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(y)} y\right\|$$
   Mais, si on pose $z = \dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(y)} y$, on remarque que $\varphi(z) = \varphi(x_0)$, donc $x_0 z \in ker\, T$, donc $\|z\| = \|x_0(x_0 z)\| \geqslant \delta$ ce qui donne bien la conclusion.
   Comme l'inégalité est vraie pour tout y, on en déduit la continuité de φ.

39 **Oral X** Soit T une forme linéaire continue sur un espace vectoriel normé E.

1. Donner plusieurs définitions de la norme subordonnée de T.
2. On suppose $T \neq 0$. Soit x_0 tel que $T(x_0) \neq 0$. Montrer :
   $$|||T||| = \frac{|T(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \ker T)}$$
   (justifier l'existence du second membre).
3. Montrer que
   $$\exists a \in E \setminus \{0\}\ |||T||| = \frac{T(a)}{\|a\|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker} T \quad \|x_0 - b\| \ = \ \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T)$$

40 **Caractérisations de la continuité**

Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que le continuité de f est équivalente à chacune des propositions suivantes :

1. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
3. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
4. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
5. Pour toute partie C de F, $\mathrm{Fr}\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(C))$.

5. Compacité

41 **Écrits Mines** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q\in\mathcal{O}(n)\}$ est compact.

Solution de 41 : Écrits Mines

C'est image du compact $\mathcal{O}(n)$ par l'application continue $Q\mapsto AQ$ car linéaire en dimension finie.

42 **Classique – Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue**

Montrer que si K est compact, pour tout $\varepsilon>0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de K telle que $K\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon)$.

Solution de 42 : Classique – Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue

Sinon, supposons $K\neq\varnothing$. On a $\varepsilon>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x_0,\dots,x_n$, $K\not\subset\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n}B(x_i,\varepsilon)$.

Donnons-nous $x_0\in K$. puis $x_1\in K$ tel que $x_1\notin B(x_0,\varepsilon)$. Puis $x_2\notin\displaystyle\bigcup_{i=0}^{1}B(x_i,\varepsilon)$.

Et, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in\mathbb{K}$ tel que $x_n\notin\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1}B(x_i,\varepsilon)$.

On a alors, pour tout $n,m\in\mathbb{N}$ tel que $n\neq m$, $\|x_n-x_m\|\geqslant\varepsilon$.

Or on peut extraire de (x_n) une suite convergente, ce qui est contradictoire.

43 Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E,\|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$ est compact.

Solution de 43 :

Soit $K=\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$. On montre que K est une partie fermée et bornée de E.

La suite étant convergente, elle est bornée donc K l'est.

Si $x\notin K$, $u_n\not\to x$ donc on a $\varepsilon>0$ tel que à partir d'un certain rang N, $u_n\notin B(x,\varepsilon)$, et alors, nécessairement, $\ell\notin B(x,\varepsilon)$.

Puis, comme $x\notin K$, en prenant ε' strictement inférieur à ε et au minimum des $\|x-u_n\|$ pour $n\in[\![0,N-1]\!]$, on aura $K\cap B(x,\varepsilon')=\varnothing$ donc K^c est ouvert et K est fermé.

44 Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n$ des points de E, $A=\{a_1,\dots,a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à cœfficients positifs, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme égale à 1 d'éléments de A. Notons-la $\mathrm{Conv}(A)$. Il s'agit du plus petit convexe contenant A.

1. Montrer que $K=\left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

Solution de 44 :

1. Fermé (image réciproque continue d'une fermé) et borné est dimension finie.
2. Image continue de K.

45 Diamètre d'une partie bornée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup\left\{\left\|x-y\right\|,\ (x,y)\in A^2\right\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a,b)\in A^2$ tel que $D = \|a-b\|$.
3. Soit $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Solution de 45 : Diamètre d'une partie bornée

1. Partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ car A est borné.
2. $(x,y)\mapsto \left\|x-y\right\|$ est un fonction continue (car lipschitzienne, en prenant la norme produit sur A^2) sur le compact A^2 donc atteint un maximum.
3. $2r$: par IT, $\left\|x-y\right\| \leqslant 2r$ et il est facile de voir que cette borne est atteinte.

46

Soit $f : E\to\mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x)\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}+\infty$. Montrer que f atteint sur E un minimum global.

Solution de 46 :

On a $A\in\mathbb{R}$ tel que si $\|x\|\geqslant A$, $f(x)\geqslant f(0_E)+1$.
Puis f atteint un minimum sur le compact $\overline{B}(0_E, A)$ qui est en fait global.

47 Un théorème de point fixe (classique d'oral)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K\to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y)\in K,\quad x\neq y \Rightarrow \left\|f(x)-f(y)\right\| < \left\|x-y\right\|.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x\mapsto \left\|f(x)-x\right\|$.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0\in K$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.
   On s'intéressera à $\|x_n - a\|$ *et on séparera deux cas suivant s'il existe* n *tel que* $x_n = a$ *ou non.*

Solution de 47 : Un théorème de point fixe (classique d'oral)

1. (a) Si $a\neq b$ conviennent, $\|a-b\| < \|a-b\|$.
   (b) Soit $\varphi : x\mapsto \left\|f(x)-x\right\|$. Elle est continue par opération (f l'est car lipschitzienne) sur un compact donc elle atteint un minimum en $a\in K$.
   Si $f(a)\neq a$, alors $\left\|f(f(a))-f(a)\right\| = \varphi(f(a)) < \left\|f(a)-a\right\| = \varphi(a)$ ce qui est contradictoire.
   Donc m est un point fixe de f, le seul.

2. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$.
   S'il existe p tel que $x_p = a$, alors, par récurrence, a étant point fixe de f, pour tout $n \geqslant p$, $x_n = a$ donc $x_n \to a$.
   Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $\|x_{n+1} - a\| = \left\|f(x_n) - f(a)\right\| < \|x_n - a\|$. Donc $(\|x_n - a\|)_n$ est positive et (strictement) décroissante, donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^+$.
   Mais $x \in K^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $b \in K$.
   Et $x_{\varphi(n)+1} = f\left(x_\varphi(n)\right) \to f(b)$ par continuité.
   Puis $\left\|x_{\varphi(n)} - a\right\| \to \|b - a\| = \ell$ et $\left\|x_{\varphi(n)+1} - a\right\| \to \left\|f(b) - a\right\| = \ell$.
   Si $a \neq b$, alors $\ell = \left\|f(b) - a\right\| = \left\|f(b) - f(a)\right\| < \|b - a\| = \ell$ ce qui est contradictoire.
   Donc $a = b$ et $\|x_n - a\| \to \ell = \|b - a\| = 0$ donc $x_n \to a$.

48 Distance d'une fonction continue à $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f \in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n \in F_n$ telle que

$$\left\|f - \phi_n\right\|_\infty = \mathrm{d}(f, F_n) = \inf_{\phi \in F_n} \left\|f - \phi\right\|_\infty$$

Solution de 48 : Distance d'une fonction continue à $\mathbb{R}_n[x]$

$\left\|f\right\|_\infty \in \left\{\left\|f - \phi\right\|_\infty, \phi \in F_n\right\}$. Donc $\mathrm{d}(f, F_n) \leqslant \left\|f\right\|_\infty$.

On s'intéresse donc aux $\phi \in F_n$ telle que $\mathrm{d}(f, \phi) \leqslant \left\|f\right\|_\infty$.

Or l'intersection de boule fermée de centre f et de rayon $\left\|f\right\|_\infty$ et de F_n est un fermé borné dans F_n qui est de dimension fini, donc est compact.

L'application continue car lipschitzienne $\phi \mapsto \mathrm{d}(f, \phi)$ atteint un minimum sur $F_n \cap \overline{B}\left(f, \left\|f\right\|_\infty\right)$ qui est en fait global.

49 Distance à un compact; à un fermé

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et A une partie non vide de E. On rappelle la définition de la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $\mathrm{d}(x_0, A)$, par la formule $\mathrm{d}(x_0, A) = \inf\limits_{x \in A} \|x - x_0\|$.

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $y \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, A) = \left\|y - x_0\right\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé.
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall (a, b) \in A \times B,\ \|a - b\| \geqslant \delta$.
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Solution de 49 : Distance à un compact; à un fermé

1. La fonction $x \mapsto \|x - x_0\|$ est continue, à valeurs réelles. Elle atteint sa borne inférieure sur tout compact.

2. On fixe un point $z \in A$, et on pose $B = A \cap B(x_0, \|x_0 - z\|)$. Puisque $B \subset A$, il est clair que $\mathrm{d}(x_0, B) \geqslant \mathrm{d}(x_0, A)$. Maintenant, si $y \in A \setminus B$, on a $\|y - x_0\| \geqslant \|z - x_0\| \geqslant \mathrm{d}(x_0, B)$. Ceci prouve que $\mathrm{d}(x_0, A) = \mathrm{d}(x_0, B)$. Maintenant, B est fermé comme intersection de deux fermés, et est compact car il est aussi borné. Il existe $y \in B \subset A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, A) = \mathrm{d}(x_0, B) = \|y - x_0\|$.
3. On fixe x_0 et x_1 deux point de E, et y dans A.
   D'après l'inégalité triangulaire : $\|x_0 - y\| - \|x_1 - y\| \leqslant \|x_0 - x_1\|$.
   On obtient ensuite $\mathrm{d}(x_0, A) \leqslant \|x_0 - y\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y\|$. On prend enfin la borne inférieure pour y dans A :
   $$\mathrm{d}(x_0, A) \leqslant \|x_0 - x_1\| + \mathrm{d}(x_1, A) \Rightarrow \mathrm{d}(x_0, A) - \mathrm{d}(x_1, A) \leqslant \|x_0 - x_1\|.$$
   Par symétrie du rôle joué par x_0 et x_1, on a finalement
   $$|\mathrm{d}(x_0, A) - \mathrm{d}(x_1, A)| \leqslant \|x_0 - x_1\|.$$
   L'application $x_0 \mapsto \mathrm{d}(x_0, A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.
4. L'application étant continue sur le compact B, elle y atteint son minimum, disons en $y_0 \notin A$. Puisque A est fermé, $\mathrm{d}(y_0, A) > 0$, et donc
   $$\forall\, a \in A,\ \ \forall\, b \in B,\ \ \|a - b\| \geqslant \mathrm{d}(b, A) \geqslant \mathrm{d}(y_0, A) > 0.$$
5. Soit $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\right\}$ et $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x + \mathrm{e}^{-x}\right\}$. A et B sont deux fermés disjoints, mais ils ont des points infiniment proches.

50 **Oral Centrale** Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E. On définit
$$A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}.$$
1. Montrer que si A est ouvert, $A + B$ l'est.
2. Montrer que si A est compacte et B est fermée, $A + B$ est fermée.
3. Montrer que si A et B sont compactes, $A + B$ l'est.
4. Trouver A et B fermées telles que $A + B$ ne le soit pas.

6. Connexité par arcs

51 Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

Solution de 51 :
Il suffit d'enlever un point qui n'est pas une borne du segment et on a une fonction continue dont l'image d'un connexe par arc ne l'est plus.

52 **Connexe par arcs ⇒ connexe**

En étudiant la continuité d'une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

Solution de 52 : Connexe par arcs ⇒ connexe

Soit B une partie ouverte et fermée de A.

On montre que $\mathbb{1}_B$ est continue en passant par la définition : si $a \in B$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans B sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 1 \xrightarrow[x\to a]{} \mathbb{1}_B(a) = 1$; si $a \in B^c$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans B^c sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 0 \xrightarrow[x\to a]{} 0\mathbb{1}_B(a) = 0$.

Mais alors, comme A est connexe par arcs, $\mathbb{1}_B(A) \in \mathscr{P}(\{0,1\})$ l'est donc $\mathbb{1}_B$ est constante et donc $B = \varnothing$ ou $B = A$.

53 Théorème de Darboux

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to R$ une application dérivable.
Notons $A = \{(x,y) \in I \times I, x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, autrement dit, f' a la propriété des valeurs intermédiaire.

Solution de 53 : Théorème de Darboux

1. A est convexe, donc connexe par arcs.
2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x,y) \in A$ tel que $z = g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que $z = g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$ et donc $z \in f'(I)$.

   D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que $g(a,b_n) \to f'(a)$. Mais $g(a,b_n) \in g(A)$, et donc $z \in g(A)$.
3. $g(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.

54 Oral X ? Pas si difficile !

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathscr{C}([0,1], \mathscr{L}(E))$.
On suppose que pour tout $t \in [0,1]$, $p(t)$ est un projecteur.
Démontrer que tous les endomorphismes $p(t)$ ont même rang.

Solution de 54 : Oral X ? Pas si difficile !

$f : t \mapsto \mathrm{rg}(p(t)) = \mathrm{tr}(p(t))$ est continue car la trace est linéaire en dimension finie et p est continue.

Or f est à valeurs discrètes (dans $[\![0, \dim E]\!]$) et $[0,1]$ est connexe par arcs.

Donc f vérifie le TVI : elle est nécessairement constante.

55

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n - 2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Solution de 55 :

1. Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$, f est continue et $f(E\backslash H) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs donc $E\backslash H$ ne peut l'être.
2. Oui. Introduisons une base de F notée $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_n)$. Sans peine tout élément $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de $E\backslash F$ peut être lié par un chemin continue dans $E\backslash F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$ (prendre $x(t) = (1-t)x_1 e_1 + \cdots + (1-t)x_{n-1} e_n + ((1-t)x_n + t) e_n)$. De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continue dans $E\backslash F$ en prenant $x(t) = (1-2t)e_n + \left(t - t^2\right) e_{n-1}$. Ainsi $E\backslash F$ est connexe par arcs.

56 **Oral Mines-Ponts** Déteminer les composantes connexes par arcs de l'ensemble

$$\mathscr{R} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = \mathrm{I}_n\right\}.$$

Solution de 56 : Oral Mines-Ponts

Soit $A \in \mathscr{R}$. Cette matrice est diagonalisable semblable à une matrice de la forme

$$J_k = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix} \text{ avec } k \in [\![0; n]\!]$$

et donc $\mathrm{tr}(A) = n - 2k$. L'application trace est continue (car linéaire au départ d'un espace de dimension finie) et prend uniquement des valeurs entières sur $\mathscr{R}$, cette application est donc constante sur chaque composante connexe par arcs de $\mathscr{R}$. Les composantes connexes par arcs de $\mathscr{R}$ sont donc incluses alors les parties

$$\mathscr{R}_k = \{A \in \mathscr{R} \mid \mathrm{tr}(A) = n - 2k\} \quad \text{pour } k \in [\![0; n]\!].$$

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Montrer que $\mathscr{R}_k$ est connexe par arcs. Soit $A \in \mathscr{R}_k$. Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1} J_k P$. Or on sait que GL ($\mathbb{C}$) est une partie connexe par arcs et il existe donc une application $\gamma : [0; 1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ continue prenant ses valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma(1) = P$. Considérons alors $\varphi : [0; 1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\varphi(t) = (\gamma(t))^{-1} J_k \gamma(t) \quad \text{pour } t \in [0; 1].$$

L'application φ est continue, prend ses valeurs dans $\mathscr{R}_k$ et relie $\varphi(0) = J_k$ à $\varphi(1) = A$. On en déduit que $\mathscr{R}_k$ est une partie connexe par arcs . Finalement ; les composantes connexes par arcs de $\mathscr{R}$ sont les $\mathscr{R}_k$ pour $k = 0, \dots, n$.

57 Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Solution de 57 :

Il nous suffit d'étudier la partie A. Soient $a, a' \in A$. Puisque $A \subset A \cup B$, il existe $\varphi : [0; 1] \to A \cup B$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$. Si φ ne prend pas de valeurs dans B alors φ reste dans A et résout notre problème. Sinon, posons

$$t_0 = \inf\{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in B\} \quad \text{et} \quad t_1 = \sup\{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in B\}.$$

L'application φ étant continue et les parties A et B étant fermées,

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B.$$

La partie $A \cap B$ étant connexe par arcs, il existe $\psi : [t_0; t_1] \to A \cap B$ continue telle que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. En considérant $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0; t_1]$ et $\theta(t) = \varphi(t)$ sinon, on a $\theta : [0; 1] \to A$ continue avec $\theta(0) = a$ et $\theta(1) = a'$.

Ainsi, A est connexe par arcs.