Réduction et polynômes

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Si $A^2-3A+2I_n=0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

2 Résoudre $y^{(4)}=y$ dans $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, en posant u l'opérateur de dérivation.

Solution de 2 :

On cherche donc $\operatorname{Ker}\big((X^4-1)(u)\big)$ avec $X^4-1=(X-1)(X+1)\big(X^2+1\big)$.

Les solutions sont les $x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}+C\cos x+D\sin x$ pour $A,B,C,D\in\mathbb{R}$.

3 Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A=\begin{pmatrix}5&-8&-4\\4&-7&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Solution de 3 :

On commence par diagonaliser A : $\operatorname{Sp}A=\{1,-3\}$, $E_1(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-3}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, donc u est bien diagonalisable.

Notons $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(0,1,-2)$ et $e_3=(1,1,0)$ et classons les sous-espaces stables par dimensions :

- $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont comme toujours stables par u.
- Les droites stables par u sont les droites
  - ⋆ $D(\alpha,\beta)=\mathbb{R}(\alpha e_1+\beta e_2)$ pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ contenues dans $E_1(A)$.
    Pour éviter les redondances, on peut par exemple considérer
    - ∘ $D(1,0)=\mathbb{R}e_1=\mathbb{R}(1,0,1)$ d'équations $\begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$
    - ∘ et les droites $D(\alpha,1)=\mathbb{R}(\alpha,1,\alpha-2)$ d'équations $\begin{cases}x=\alpha y\\z=(\alpha-2)y\end{cases}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.
  - ⋆ $D'=\mathbb{R}(1,1,0)=E_{-3}(A)$ d'équations $\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$
- Les plans stables par u sont des plans engendrés par des vecteurs propres : il s'agit donc
  - ⋆ $P_1=E_1(A)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ d'équation $z=x-2y$.
  - ⋆ $P(\alpha,\beta)=\operatorname{Vect}(\alpha e_1+\beta e_2,e_3)$ pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.
    De nouveau, on peut éviter les redondances en considérant

- $P(1,0)=\mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ d'équation $x=y+z$
- pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $P(\alpha,1)=\mathrm{Vect}(\alpha e_1+e_2,e_3)$ d'équation $(\alpha-2)(x-y)=(\alpha-1)z$.

$\boxed{4}$ **CCINP 65** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$, $P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u)\Longrightarrow(PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R=X^4+2X^3+X^2-4X$ est un polynôme annulateur de A.

Solution de 4 : CCINP 65

1. Soit $(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2$.

   $P=\sum_{p=0}^{n}a_pX^p$ et $Q=\sum_{q=0}^{m}b_qX^q$.
   Donc $PQ=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}\left(a_pb_qX^{p+q}\right)$.
   Donc $(PQ)(u)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}\left(a_pb_qu^{p+q}\right)$ (*)
   Or $P(u)\circ Q(u)=\left(\sum_{p=0}^{n}a_pu^p\right)\circ\left(\sum_{q=0}^{m}b_qu^q\right)=\sum_{p=0}^{n}\left(a_pu^p\circ\sum_{q=0}^{m}b_qu^q\right)$.
   Donc, par linéarité de u, $P(u)\circ Q(u)=\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{q=0}^{m}a_pu^p\circ b_qu^q\right)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}\left(a_pb_qu^{p+q}\right)$. (**)
   D'après (*) et (**), $(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)$.
2. (a) Soit $(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2$.
   D'après 1., $P(u)\circ Q(u)=(PQ)(u)$.
   De même, d'après 1., $Q(u)\circ P(u)=(QP)(u)$.
   Or $PQ=QP$ donc $(PQ)(u)=(QP)(u)$.
   On en déduit que $P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$.
   (b) Soit $(P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2$.
   On suppose que P est annulateur de u.
   Prouvons que PQ est annulateur de u.
   D'après 1. et 2.(a), $(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)$. (***)
   Or P est annulateur de u donc $P(u)=0$ donc, d'après (***), $(PQ)(u)=0$.
   On en déduit que PQ est annulateur de u.
3. Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A.
   $P_A(X)=\det(XI_2-A)$. On trouve $P_A(X)=X(X-1)$.
   Soit $R=X^4+2X^3+X^2-4X$.

On remarque que $R(0)=R(1)=0$ et on en déduit que R est factorisable par $X(X-1)$.
C'est-à-dire : $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]\ /\ R = X(X-1)Q$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(X)=X(X-1)$ annule A.
Donc, d'après 2.b., comme $R=P_A(X)Q$, R est annulateur de A.

5 **CCINP 91** On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

6 **CCINP 88**

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j}=\begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i\neq j \end{cases}$.
Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M\in E, u(M)=M+\mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme X^2-2X+1 est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).

Solution de 6 : CCINP 88

1. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in\mathbb{K}[X]$.
On suppose que P annule u.
Soit λ une valeur propre de u.
Prouvons que $P(\lambda)=0$.
λ valeur propre de u donc : $\exists\, x\in E\backslash\{0\}\ /\ u(x)=\lambda x$.
On prouve alors par récurrence que : $\forall\, k\in\mathbb{N},\ u^k(x)=\lambda^k x$.
Ainsi : $P(u)(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k x = P(\lambda)\,x$.
Or $P(u)=0$ donc $P(u)(x)=0$ donc $P(\lambda)x=0$.
Or $x\neq 0$ donc $P(\lambda)=0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j}=\begin{cases} 0 \text{ si } i=j \\ 1 \text{ si } i\neq j \end{cases}$.

(a) Posons $P = X^2 - 2X + 1$.
Prouvons que P est annulateur de u c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
Soit $M \in E$.
$u^2(M) = u \circ u(M) = (M + \mathrm{tr}(M)A) + \mathrm{tr}(M + \mathrm{tr}(M)A)A$.
C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $u^2(M) = M + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A$.
Or $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc $u^2(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A$.
Ainsi $u^2(M) - 2u(M) + \mathrm{Id}(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A - 2M - 2\mathrm{tr}(M)A + M = 0$.
On a donc prouvé que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.

C'est-à-dire P est annulateur de u.

(b) Notons I_n la matrice unité de E.
Première méthode :
Notons $\mathrm{Spec}(u)$ le spectre de u.
$P = (X-1)^2$ et P est annulateur de u.
Donc d'après 1., $\mathrm{Spec}(u) \subset \{1\}$.
De plus $A \neq 0$ et $u(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
Ainsi, si u était diagonalisable alors on aurait $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
C'est-à-dire, on aurait $u = \mathrm{Id}$.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.
Deuxième méthode :

Notons P_m le polynôme minimal de u.
$P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de u donc $P_m | P$.
Si u était diagonalisable alors P_m serait scindé à racines simples.
On aurait donc $P_m = X - 1$.
Ce qui impliquerait que $u = \mathrm{Id}$ car P_m est également un polynôme annulateur de u.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

7 **CCINP 93** Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Solution de 7 : CCINP 93

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0$ (*)
   Soit $y \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u$.
   Alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$.
   Donc, d'après (*), $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$.

Donc $y=0$.
Donc $\mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}u = \{0\}$. (1)
De plus, E étant de dimension finie, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}u + \dim \mathrm{Im}u$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.

2. (a) Lemme des noyaux pour deux polynômes :
Si A et B sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\mathrm{Ker}(AB)(u) = \mathrm{Ker}A(u) \oplus \mathrm{Ker}B(u)$.
(b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\mathrm{Ker}P(u) = E$.
$P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
Donc, d'après le lemme des noyaux, $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}u = \dim \mathrm{Im}u$. (3)
Prouvons que $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

Soit $y \in \mathrm{Im}u$.
alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$.
$(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ d'après (*).
Donc $y \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$. (4)
Donc, d'après (3) et (4), $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de u.
Donc si on note $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\mathrm{sp}(u) \subset \{\text{racines réelles de } P\}$.
Or $\{\text{racines réelles de } P\} = \{0\}$ donc $\mathrm{sp}(u) \subset \{0\}$. (5)
Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif.
Donc $\mathrm{Ker}u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u. (6)
On en déduit, d'après (5) et (6), que $\mathrm{sp}(u) = \{0\}$.

2. Un grand classique

8 Réduction simultaneé

1. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables. Démontrer qu'il y a équivalence entre
   (i) u et v sont simultanément diagonalisables (c'est-à-dire diagonalisables dans une même base, soit encore il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v).
   (ii) u et v commutent.
   (iii) Chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

   Reformuler $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ en termes de matrices.
2. Dans cette question, le corps de base est $\mathbb{C}$. On suppose que u et v commutent, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.
   Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.
3. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

Solution de 8 : Réduction simultaneé

1. Si u et v sont diagonalisables dans une même base, soit $\mathscr{B}$ une telle base. Deux matrices diagonales commutent, donc
$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v\circ u)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u\circ v)$$
ce qui permet bien de conclure $u\circ v=v\circ u$.
Supposons, réciproquement, $u\circ v=v\circ u$. Notons $\mathrm{Sp}(u)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ (les λ_i étant deux à deux distincts), et, pour tout i entre 1 et p,
$E_i(u)=\ker(u-\lambda_i Id)$. Comme u est diagonalisable,
$$E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$$
(on note E l'espace vectoriel sur lequel sont définis u et v). Les E_i sont stables par v (car v commute avec les $u-\lambda_i Id$). Donc v induit sur chaque E_i un endomorphisme v_i qui est, d'après le cours, diagonalisable. Soit $\mathscr{B}_i$ une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i, donc de vecteurs propres de v. En « réunissant » les bases $\mathscr{B}_1,\ldots,\ \mathscr{B}_p$, on obtient une base de E (adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$) formée de vecteurs propres pour u et pour v. Donc u et v sont simultanément diagonalisables.
En termes de matrices : soit A, B deux matrices diagonalisables ; $AB=BA$ si et seulement s'il existe $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et D,Δ diagonales telles que $A=PDP^{-1}$ et $B=P\Delta P^{-1}$
2. Le corps de base étant algébriquement clos, $\mathrm{Sp}(u)\neq\emptyset$. Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$. v laisse stable $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, car v et $u-\lambda Id$ commutent. Et donc v induit sur $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.
Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A=PTP^{-1}$ et $B=PT'P^{-1}$ ».
Pour $n=1$, c'est bien clair.
Montrons que $\mathscr{P}_n\Rightarrow\mathscr{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme
$$A'=\begin{pmatrix}\lambda & *\ldots\ldots *\\ 0 & \\ \vdots & A''\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B'=\begin{pmatrix}\mu & *\ldots\ldots *\\ 0 & \\ \vdots & B''\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$
A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathscr{P}_n$, il existe donc $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que
$$P^{-1}A''P=T''\quad,\quad P^{-1}B''P=U''$$
Soit alors $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\ldots\ldots 0\\ 0 & \\ \vdots & P\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}\in\mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.

3. Montrons par récurrence $\mathscr{P}_n$: « si $u_1,\dots,u_n$ sont n endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales ».

   $\mathscr{P}_2$ a été démontrée.

   Montrons $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$. Soit donc $u_1,\dots,u_{n+1}$ $n+1$ endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Soit E_λ un sous-espace propre de u_{n+1} ; E_λ est stable par $u_1,\dots,u_n$, qui induisent sur E_λ des endomorphismes $u_{\lambda,1},\dots,u_{\lambda,n}$. Ces endomorphismes commutent car ils sont induits par des endomorphismes qui commutent. Par $\mathscr{P}_n$, il existe une base de E_λ formée de vecteur propres communs à $u_{\lambda,1},\dots,u_{\lambda,n}$, donc de vecteurs propres communs à $u_1,\dots,u_n$. Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u_{n+1}, puisqu'ils sont dans E_λ. Or $E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_{n+1})} E_\lambda$; en « réunissant » des bases des E_λ comme celle qu'on vient de construire, on obtient une base de E formée de vecteur propres communs à $u_1,\dots,u_{n+1}$. D'où $\mathscr{P}_{n+1}$. Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ quelconque d'endomorphismes diagonalisables qui commutent, on commence par remarquer que si on considère une sous-famille finie $(u_j)_{j\in J}$, où J est une partie finie de I, ses éléments sont simultanément diagonalisables (d'après ce qui vient d'être fait). Donc toute combinaison linéaire des u_i est diagonalisable. Donc tous les éléments de $\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I}$ sont diagonalisables. Or ils commutent entre eux (facile). Mais cet espace est de dimension finie (comme sev de $\mathscr{L}(E)$), on peut en prendre une base et lui appliquer le cas « fini », ce qui conclut : tous les éléments de $\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I}$ sont simultanément diagonalisables.

3. Polynômes annulateurs

9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M et I_3. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer sans calcul le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de 9 :

On calcule $M^2 = 3I_3 - 2M$. Donc M est annulée par le polynôme simplement scindé $X^2+2X-3 = (X-1)(X+3)$: elle est diagonalisable.

π_M étant un polynôme unitaire non constant divisant ce polynôme, il vaut $X-1$, $X+3$ ou $(X-1)(X+3)$.

Comme M n'est pas scalaire, on a nécessairement $\pi_M = (X-1)(X+3)$.

Comme on travaille en dimension 3 avec M diagonalisable, on a que soit 1, soit -3 est valeur propre double, l'autre est simple.

Or $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre double et $\chi_M = (X-1)^2(X+3)$.

On calcule le reste de la division euclidienne de X^n par π_M : $X^n = \pi_M Q + aX + b$ avec $1^n = 1 = a+b$ et $(-3)^n = -3a+b$, d'où on tire $a = \dfrac{1-(-3)^n}{4}$ et $b = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Donc, comme $\pi_M(M) = 0_3$, $M^n = \dfrac{1-(-3)^n}{4} M + \dfrac{3+(-3)^n}{4} I_3$.

10 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 + A^\intercal = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.

Solution de 10 :

On suppose que $A^2 + A^\intercal = I_n$. Alors $A = (A^\intercal)^\intercal = \left(I_n - A^2\right)^\intercal = I_n - (A^\intercal)^2 = I_n - \left(I_n - A^2\right)^2 = 2A^2 - A^4$ donc A est annulée par $X^4 - 2X^2 + X = X\left(X^3 - 2X + I_3\right) = X(X-1)\left(X^2 + X - 1\right)$ avec le discriminant du dernier terme > 0 sans avoir ni 0 ni 1 comme racine. Il s'agit donc d'un polynôme simplement scindé ce qui assure la diagonalisabilité de A.

11 **Oral CCINP** Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que u est diagonalisable et décrire les sous-espaces de E stables par u.

Solution de 11 : Oral CCINP

$X^3 - X$ est scindé simple, les sous-espaces propres sont, classiquement, les sous-espaces engendrés par des familles de vecteurs propres (conséquence de la diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.)

12 Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, $\operatorname{tr} A = 3$ et A est non inversible.

Solution de 12 :

Comme A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A.

Comme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$ est simplement scindé, A est diagonalisable et la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égale à $\operatorname{tr} A = 3$.

Alors nécessairement, 0 est valeur propres simple, et les deux autres valeurs propres sont 1 et 2, toutes deux simples.

Les solutions sont donc les matrices $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$.

13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\Phi_A \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)$ définie par $\Phi_A(M) = AM$. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Solution de 13 :

On propose diverses méthodes, de la plus compliquée à la plus simple, mais avec la possibilité d'obtenir supplémentaires (description des valeurs propres et des sous-espaces propres).

- **Première solution** – écrire la matrice de Φ_A dans une base adaptée. Partons sur la base canonique.

  On calcule, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\Phi_A\left(E_{i,j}\right) = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}.$$

  On en déduit que $\operatorname{Vect}\left(E_{k,j}\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est stable par Φ_A (matrices dont seule la k^{e} colonne est éventuellement non nulle).

  Il vient que la matrice de Φ_A dans la base

$$\left(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,2}, \ldots, E_{1,n}, \ldots, E_{n,n}\right)$$

est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à A :

$$\Phi_A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}.$$

- ⋆ Soit on remarque qu'alors $\chi_{\Phi_A} = (\chi_A)^n$ donc $\operatorname{Sp}\Phi_A = \operatorname{Sp} A$ et si $\lambda \in \operatorname{Sp}\Phi_A = \operatorname{Sp} A$,

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!],\quad AX_i = \lambda X_i.$$

  On en déduit que les vecteurs propres de Φ_A sont les matrices non nulles dont les colonnes sont dans le sous-espace propre de A correspondant à la même valeur propre. Or l'ensemble de telles matrice est facilement isomorphe à $E_\lambda(A)^n$ donc de dimension $n \dim E_\lambda(A)$.
  On en tire alors $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\Phi_A} \dim E_\lambda(\Phi_A) = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\Phi_A} n \dim E_\lambda(A) = n \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\Phi_A} \dim E_\lambda(A)$.
  Donc Φ_A diagonalisable si et seulement si $\displaystyle n \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\Phi_A} \dim E_\lambda(A) = n^2$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\Phi_A} \dim E_\lambda(A) = n$ si et seulement si A est diagonalisable.
- ⋆ Soit on s'intéresse alors aux polynômes annulateurs de Φ_A :

$$P(\Phi_A) = 0_{n^2} \iff \begin{pmatrix} P(A) & & & \\ & P(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(A) \end{pmatrix} = 0_{n^2} \iff P(A) = 0_n.$$

  Les polynômes annulateurs de Φ_A étant ceux de A, le premier est annulé par un polynôme simplement scindé si et seulement si la deuxième l'est, d'où le résultat.

- **Deuxième solution** – calculer directement le vecteurs propres. Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, on remarque que les colonnes de $\Phi_A(M)$ sont les AC_j.
  Donc

$$\Phi_A(M) = \lambda M \iff \forall\, j \in [\![1,n]\!],\quad AC_j = \lambda C_j.$$

  On en déduit que les valeurs propres de Φ_A sont les mêmes que celles de A et que

$$E_\lambda(\Phi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix},\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\quad C_j \in E_\lambda(A) \right\}$$

  donc $\dim E_\lambda(\Phi_A) = n \dim E_\lambda(A)$ et on conclut comme dans la méthode précédente.
- **Dernière solution** – la plus efficace sans doute : par récurrence on vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \Phi_A^k\ :\ M \mapsto A^k M$$

  Et, par combinaison linéaire de ces résultats :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(\Phi_A)\ :\ M \mapsto P(A)M$$

  Donc $P(\Phi_A) = 0_n \iff \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\ P(A)M = 0_n \iff P(A) = 0_n$ Les polynômes annulateurs de Φ_A et ceux de A sont donc les mêmes. On en déduit que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est (car Φ_A admet un polynôme annulateur scindé simple si et seulement si A admet un polynôme scindé simple). Accessoirement, les valeurs propres de A et de Φ_A sont les mêmes.

14 Sur $E=\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D: f \mapsto f'$.

1. Si $f,g\in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g.
2. Si $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t\mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m\left(\mathrm{e}_{-\lambda} f\right)=(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m$.
4. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)}+\cdots+a_0 y=0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t\mapsto t^k\mathrm{e}^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.

15 **Oral Mines** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k\geqslant 2$.
Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

Solution de 15 : Oral Mines

L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons A^k triangulaire supérieure pour tout $k\geqslant 2$. Introduisons le polynôme caractéristique de A

$$P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X+(-1)^n\det(A)$$

Puisque celui-ci est annulateur de A, on peut écrire

$$a_nA^n+\cdots+a_1A+(-1)^n\det(A)\mathrm{I}_n=\mathrm{O}_n$$

En multipliant la relation par A et en réorganisant

$$A=\frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)}\left(a_1A^2+\cdots+a_nA^{n+1}\right)$$

et la matrice A est donc triangulaire supérieure. Pour $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $A^k=\mathrm{O}_2$ pour tout $k\geqslant 2$.

16 Existe-t-il dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant pour polynôme minimal X^2+1 ?

Solution de 16 :

Cas : n est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant de degré impair, il possède une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme X^2+1. Cas : n est pair. Considérons

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A_n=\operatorname{diag}(A,\dots,A)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

A_n n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2 . De plus, $A_n^2=-\mathrm{I}_n$ et X^2+1 annule donc A_n. Au final, X^2+1 est polynôme minimal de A_n.

17 **Oral CCINP** Soient $A,B\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B=A^p$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Solution de 17 : Oral CCINP

Si A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. On a alors $B = A^p = P^{-1}D^pP$ avec D^p diagonale et donc B est diagonalisable.

Inversement, si B est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de B scindé à racines simple de la forme $\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$.

De plus, puisque B est inversible, on peut supposer les λ_k tous non nuls.

Sachant $B = A^p$, le polynôme $\prod_{k=1}^{p}\left(X^p-\lambda_k\right)$ annule A et est scindé à racines simples d'après le résultat connu sur les racines p^{e} de l'unité.

On en déduit que A est diagonalisable.

18 **Oral CCINP** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque.

On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de u vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

Montrer que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$ puis que l'image et le noyau de u sont supplémentaires dans E.

Solution de 18 : Oral CCINP

On sait déjà $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$. On a $P = XQ$ avec $Q(0)\neq 0$. Pour $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, on a $u^2(x) = 0$ et $Q(u)(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u)\cap\operatorname{Ker}(Q(u))$ puis $u(x) = 0$ car $Q(0)\neq 0$, donc $X\wedge Q = 1$ et $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ sont supplémentaires par le lemme des noyaux. On en déduit $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\subset\operatorname{Ker}(u)$ puis l'égalité.

L'inclusion $\operatorname{Im}\left(u^2\right)\subset\operatorname{Im}(u)$ est entendue.

Inversement, soit $x\in\operatorname{Im}(u)$. On peut écrire $x = u(a)$ pour un certain $a\in E$. Or $P(u)(a)=0$ et l'on peut écrire P sous la forme $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X$ avec $a_1\neq 0$ donc $a_n u^{n-1}(a)+\cdots+a_2u^2(a)+a_1x=0_E$ et $x=-\dfrac{a_n}{a_1}u^{n-1}(a)-\cdots-\dfrac{a_2}{a_1}u^2(a)=u^2\left(-\dfrac{a_n}{a_1}u^{n-3}(a)-\cdots-\dfrac{a_2}{a_1}a\right)\in\operatorname{Im}u^2$.

Pour $x\in\operatorname{Ker}(u)\cap\operatorname{Im}(u)$, il existe $a\in E$, $x=u(a)$ et $a\in\operatorname{Ker}\left(u^2\right)=\operatorname{Ker}(u)$ donc $x=0$.

Pour $x\in E$, $u(x)\in\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Im}\left(u^2\right)$ et l'on peut écrire $u(x)=u^2(a)$ pour un certain $a\in E$. On a alors $x=y+z$ avec $y=u(a)\in\operatorname{Im}(u)$ et $z=x-y$ où l'on vérifie $z\in\operatorname{Ker}(u)$.

19 **Oral CCINP** Soient $n\geqslant 2, A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M)=\operatorname{tr}(A)M-\operatorname{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace. Étudier la réduction de l'endomorphisme f et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

Solution de 19 : Oral CCINP

Méthode : On commence par déterminer un polynôme annulateur de f. On observe

$$f\circ f(M)=\operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}(A)M-\operatorname{tr}(M)A)-\operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)M-\operatorname{tr}(M)A)A=\operatorname{tr}(A)f(M)$$

Ainsi,

$$f\circ f=\operatorname{tr}(A).f.$$

Cas : $\operatorname{tr}(A)\neq 0$. L'endomorphisme f est diagonalisable car annule le polynôme $X^2-\operatorname{tr}(A)X$ qui est scindé à racines simples.

Cas : $\operatorname{tr}(A)=0$. Les valeurs propres de f figurent parmi les racines du polynôme X^2. Seule 0 peut être valeur propre de f et par conséquent f est diagonalisable si, et seulement si, $f=0$. Cela correspond au cas où $A=\mathrm{O}_n$.

Déterminons maintenant les sous-espaces propres de f. Le cas $A = 0_n$ est immédiat car alors l'endomorphisme f est l'endomorphisme nul. Supposons désormais ce cas exclu. Par le polynôme annulateur $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$, on sait

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, \mathrm{tr}(A)\}$$

Soit $M = A$ on remaraue $f(M) = 0$. Le réel 0 est donc valeur propre de A et l'espace propre associé contient au moins Vect (A) : il est de dimension au moins égale à 1 .

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$. On observe

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M = \lambda M \text{ avec } \lambda = \mathrm{tr}(A).$$

On en déduit que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé contient l'hyperplan des matrices de trace nulle : il est de dimension au moins égale à $n^2 - 1$. On a donc exactement

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$$

Il reste à discuter selon que ces deux valeurs sont distinctes ou non. Cas : $\mathrm{tr}(A) = 0$. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à l'unique valeur propre tr (A) est exactement $n^2 - 1$. Cas : $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. L'endomorphisme f est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et $\mathrm{tr}(A)$ sont respectivement 1 et $n^2 - 1$.

20 Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $\left(a_i a_j\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ est-elle diagonalisable ?

Solution de 20 :

En posant $M = \left(a_i a_j\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Cas : $\lambda \neq 0$. La matrice M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable. Cas : $\lambda = 0$. On a $M^2 = 0_n$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0_n$ ce qui revient à $(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Notons que la matrice M est symétrique mais pas nécessairement réelle, le théorème spectral ne s'applique pas. Notons aussi que la matrice M est de rang 1 et qu'il est classique d'établir que les matrices de rang 1 sont diagonalisables si, et seulement si, de trace non nulle.

21 **Oral Centrale** Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}\, M = n$

Solution de 21 : Oral Centrale

Quand une matrice est donnée par un poynôme annulateur, on essaye d'exploiter celui-ci. Mais pour la première, le problème est que

$$X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$$

n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Qu'importe, on passe sur $\mathbb{C}$: une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est a fortiori une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Mais le polynôme n'est pas scindé simple (0 est racine double), on ne peut donc pas utiliser de diagonalisation. L'idée est plus élémentaire : sur $\mathbb{C}$, comme le polynôme caractéristique est scindé, on peut utiliser la relation

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} m_\lambda \lambda$$

(où on désigne comme d'habitude par m_λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique). De plus, les valeurs propres de M sont dans $\{1, j, j^2, 0\}$ puisqu'elles sont toutes racines du polynôme annulateur $X^5 - X^2$. On a donc

$$m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0 = n$$

avec $n = m_1 + m_j + m_{j^2} + m_0$, donc, par inégalité triangulaire :

$$n = |m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0| \leqslant m_1 + m_j + m_{j^2} \leqslant n$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On en déduit en premier lieu que $m_0 = 0$. Ce qui fait que 0 n'est pas valeur propre de M. Ce qui fait que M est inversible, et que M^2 aussi, et donc que $X^3 - 1$ annule M, et donc que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On a aussi égalité dans une inégalité triangulaire, ce qui équivaut au fait que tous les nombres complexes figurant dans cette inégalité sont nuls ou de même argument. Et cet argument est nécessairement l'argument de leur somme, qui vaut n. Comme j et j^2 n'ont pas pour argument 0, on en déduit que 1 est la seule valeur propre. Et comme M est diagonalisable,

$$\boxed{M = I_n}$$

22 Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = \mathrm{O}_n$.

1. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose $H = \{I_n + P(B),\ P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

Solution de 22 :

(a) Posons $N = -A^{-1}BA$. On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = \mathrm{O}_n$$

donc

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - N^p = (\mathrm{I} - N)\left(\mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}\right)$$

On en déduit que $\mathrm{I} - N = \mathrm{I}_n + A^{-1}BA$ est inversible et

$$\left(\mathrm{I}_n + A^{-1}BA\right)^{-1} = \mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}.$$

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a

$$P(X) = aX + bX^2 + \ldots$$

Donc

$$P(B) = aB + bB^2 + \cdots$$

puis

$$P(B)^p = a^p B^p + b' B^{p+1} + \cdots = \mathrm{O}_n.$$

On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $\mathrm{I}_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme

$$\mathrm{I}_n - P(B) + P(B)^2 + \cdots + (-1)^p P(B)^p.$$

On en déduit que H est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H. Il est immédiat de vérifier que H est non vide et stable par produit. On en déduit que H est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Enfin, on vérifie que H est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.

4. Réduction par blocs

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

24 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.

   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M.

Solution de 24 :

1. Si M est diago(resp. trigo)nalisable, M est annulé par un polynôme scindé (resp. scindé simple), qui annule aussi A et B par matrice diagonale par bloc, donc A et B le sont.

   Si A et B sont diago(resp. trigo)nalisable, on a P, Q inversibles et D, D' diagonales (resp. T, T' triangulaires) telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ (resp. $A = PTP^{-1}$ et $B = QT'Q^{-1}$).

   Alors $M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$), les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant diagonale (resp. triangulaire).
2. Soient π_A et π_B les polynômes minimaux de A et de B. Il serait commode que $\pi_A\pi_B$ annule N car il est scindé à racines simples. Le calcul de $(\pi_A\pi_B)(N)$ donne une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & (*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Une meilleure idée est de remarquer que

$$(\pi_A\pi_B)(N) = \pi_A(N)\pi_B(N) = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ 0 & (*) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (*) & (*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (Attention, cela ne fonctionne pas avec $\pi_B(N)\pi_A(N)$!)

   Ainsi, N est diagonalisable. (Et on a même, dans ce cas là, que $\pi_N = \pi_A\pi_B$ car π_N annule A et B donc est divisible par π_A et π_B qui sont premiers entre eux, donc par $\pi_A\pi_B$, et le calcul précédent dit qu'il divise $\pi_A\pi_B$. On conclut en remarquant que les deux polynômes sont unitaires.)

   Autre méthode, directement (qui a la vertu de préciser les sous-espaces propres) : comme $\chi_N = \chi_A\chi_B$, $\mathrm{Sp}\, N = \mathrm{Sp}\, A \sqcup \mathrm{Sp}\, B$.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ (donc $\lambda \notin \operatorname{Sp} B$), $N\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} AX_1 + CX_2 = \lambda X_1 \\ BX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$ si et seulement si ($\lambda \notin \operatorname{Sp} B$) $\begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ X_2 = 0_{q,1} \end{cases}$

Donc $E_\lambda(N) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_1 \in E_\lambda(A) \right\}$ qui a comme dimension $\dim E_\lambda(A)$ (soit via un isomorphisme, soit en exhibant une base, ce n'est pas difficile.)

Puis si $\mu \in \operatorname{Sp} B$ (donc $\mu \notin \operatorname{Sp} A$), $N\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} AX_1 + CX_2 = \mu X_1 \\ BX_2 = \mu X_2 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} X^2 \in E_\mu(B) \\ X_1 = M_\mu X_2 \end{cases}$ où $M_\mu = (\mu I_p - A)^{-1} C$ est bien défini ($\mu \notin \operatorname{Sp} A$).

Donc $E_\mu(N) = \left\{ \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix},\ X_2 \in E_\mu(B) \right\}$ de dimension $\dim E_\mu(B)$ car

$$X_2 \in E_\mu(B) \mapsto \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \in E_\mu(N)$$

est un isomorphisme.

On a alors $p + q = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) + \sum_{\mu \in \operatorname{Sp} B} \dim E_\mu(B) = \sum_{\rho \in \operatorname{Sp} N} \dim E_\rho(N)$ et N est diagonalisable.

Enfin, comme $\chi_N = \chi_A \chi_B = \chi_M$, N a les mêmes valeurs propres que M avec même multiplicité, les deux étant diagonalisables : elles sont semblables.

25 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Solution de 25 :

Méthode 1 : polynômes

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule, par blocs :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Donc, si M est diagonalisable, M^2 l'est, donc A l'est (voir exercice sur la « réduction par blocs »). Réciproquement, si A est diagonalisable, M^2 l'est (voir le même exercice). Et il existe donc un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M^2) = (0)$. Le polynôme $P(X^2)$ annule alors M. Est-il scindé simple ? on peut écrire

$$P(X^2) = \prod_{i=1}^{d} (X^2 - \mu_i)$$

où les μ_i sont deux-à-deux distincts. Supposons dorénavant que le corps de base est $\mathbb{C}$. Si les μ_i sont non nuls, chaque $(X^2 - \mu_i)$ se factorise en

$$X^2 - \mu_i = (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$$

où $\pm\alpha_i$ sont les racines carrées de μ_i. On voit alors que $P(X^2)$ est scindé simple.

Conclusion partielle : Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ est si A est diagonalisable inversible, M est diagonalisable.

(en effet, on peut alors supposer tous les μ_i non nuls ; si un μ_i est nul, on peut enlever le terme X correspondant du polynôme annulateur P, car M^2 est inversible).

Et si A est diagonalisable mais non inversible ? On résout alors $MX=0$ et $M^2X=0$ en écrivant par blocs

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

(X_1 et X_2 étant deux colonnes de même « hauteur »). On voit que les dimensions des noyaux de M et de M^2 sont différentes. Or si M est diagonalisable, elle est semblable à une matrice D diagonale, M^2 est semblable à D^2, il y a autant de coefficients non nuls sur la diagonale de D que sur celle de D^2, donc les noyaux de M et de M^2 ont même dimension. Finalement,

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible

Méthode 2

L'avantage de cette deuxième méthode est de ne pas faire d'hypothèse sur le corps de base !

On résout $MX=\lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} X_2 &=& \lambda X_1 \\ AX_1 &=& \lambda X_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} X_2 &=& \lambda X_1 \\ AX_1 &=& \lambda^2 X_1 \end{array}\right.$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on retrouve le résultat précédent (heureusement !). Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_*^+$.

26 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m\in\mathbb{N}$.
2. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A=0$.

Solution de 26 :

1. On vérifie que $B^m = \begin{pmatrix} A^m & mA^m \\ 0 & A^m \end{pmatrix}$ par récurrence (en réalité, la preuve est nécessaire pour le seul bloc haut droite).
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & \sum_{k=\emptyset 1}^{p} k a_k A^k \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$
3. Si B est diagonalisable, B est annulée par un polynôme scindé à racines simples donc A aussi vu la question précédente.
4. Si $A = 0$, $B = O_{2n}$ est bien diagonalisable.
Réciproquement, si B est diagonalisable, d'après la question précédente, A l'est.
On veut montrer que 0 est sa seule valeur propre.
Soit P scindé à racines simples annulant B alors P et XP' annulent A. Comme P est scindé et que ses racines sont simples $P \wedge P' = 1$. Si, de plus, 0 n'est pas racine de P, alors $P \wedge XP' = 1$.
On a donc $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VXP' = 1$ et en évaluant en A, $O_n = I_n$ ce qui est contradictoire.
Donc 0 racine de tout polynôme annulateur de B (donc valeur propre de B, en prenant par exemple le polynôme caractéristique, ou le polynôme minimal).
Mais alors avec un polynôme annulateur scindé simple, on a cette fois $P \wedge XP' = X$ et $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + XVP' = X$ et en évaluant en A, $\boxed{A = 0.}$

5. Exercices X-ENS

27 Soit $\mathscr{B} = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ u \text{ bornée}\right\}$ et $T : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
Que dire d'un sous-espace de dimension finie stable par T ?

Solution de 27 :

On cherche à résoudre $T(u) = \lambda u$. Si on a une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui convient, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $u_{n+1} = \lambda u_n$.
Si $\lambda = 0$, on a nécessairement $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 0$, c'est-à-dire $u = (0)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Sinon, il vient alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \lambda^n$ et comme pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$,
$$v_{n+1} = u_{-n-1} = \frac{1}{\lambda} u_{-n} = \frac{1}{\lambda} v_n,$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_0}{\lambda^n}$ et $u_n = u_0 \lambda^n$.
Par ailleurs, il est nécessaire que u soit bornée, ce qui impose $|\lambda| = 1$.

Finalement, $\boxed{\text{tout } \lambda \in \mathbb{U} \text{ est valeur propre, de sous-espace propre associé la droite } \mathrm{Vect}(\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$

Si F est un sous-espace de $\mathscr{B}$ de dimension finie stable par T, et T_F l'endomorphisme de F induit par T. On montre que u_F est diagonalisable pour en déduire qu'il existe une base de F formée de vecteur propre de T. Malheureusement l'argument classique de l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable ne tient pas ici.

Comme $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\chi_{T_F}=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}$ est scindé et on a (théorème de Cayley-Hamilton + lemme de décomposition des noyaux) :

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^{m_k}.$$

Pour montrer que u_F est diagonalisable, on doit montrer que

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F).$$

On va donc essayer de voir que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^{m_k}=\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.

On pense bien sûr aux lemme classique des noyaux emboîtés.

Commençons par comparer $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$ et $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.

On a déjà $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)\subset\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$.

Prenons $u\in\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$:

$$(T^2-2\lambda_k T+\lambda_k^2\,\mathrm{id}_F)(u)=(0)_n$$

donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $u_{n+2}-2\lambda_k u_{n+1}+\lambda_k^2 u_n=0$.

On a alors $A,B\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(An+B)\lambda_k^n$.

On vérifie que c'est encore valable pour $n\leqslant 0$ par récurrence.

Or u est bornée et $|\lambda_k|=1$, donc $A=0$ et $u\in\mathrm{Vect}(\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}=\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)=\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$ et les noyaux itérés $K_m=\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^m$ sont classiquement stationnaires à partir du rang 1.

Cela permet de conclure : on a bien

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$$

donc T_F est diagonalisable : F possède une base formée de vecteurs propres de T_F donc de T, c'est-à-dire

$$\boxed{F \text{ possède une base formée de suites de la forme } (\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

La réciproque est facile.

28 Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 1$ et $u\in\mathscr{L}(E)$. Montrer l'existence d'un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E tel que

(i) $u=d+n$;

(ii) d et n commutent ;

(iii) d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

Solution de 28 : Décomposition de Dunford

- L'existence a été vue en cours : il suffit d'utiliser la supplémentarité des sous-espaces caractéristiques (le polynôme caractéristique étant scindé) : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)^{m_i}$.

  En posant d et n les endomorphismes stabilisant ces espaces et dont les endomorphismes induits sur $F_i = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \,\mathrm{id}_E)_i^m$ sont $d_i = \lambda_i \,\mathrm{id}_E$ et $n_i = u_i - \lambda_i \,\mathrm{id}_E$, autrement dit, si on décompose $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ dans $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$,

$$d(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

  et

$$n(x) = \sum_{i=1}^{p} (u(x_i) - \lambda_i x_i),$$

  on obtient bien d diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition) et n nilpotent d'indice au plus $\max_{1\leqslant i \leqslant p} m_i$.
  On a de plus bien $u = d + n$ et d et n commutent car c'est vrai sur chacun des F_i.

- On montre ensuite ces endomorphismes d et n sont des polynômes en u, ce qui aidera à prouver l'unicité (et redonne leur commutativité). C'est la partie la plus difficile.

  En notant π_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} F_j$, on remarque que $d = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i$. Il suffit donc de montrer que les projections π_i sont des polynômes en u.
  Il s'agit d'une conséquence de la démonstration du lemme de décomposition des noyaux appliqué à χ_u qui permet justement de prouver cette supplémentarité : si $i \in [\![1, p]\!]$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ étant premier avec $Q_i = \prod_{j\neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$, on a une relation de Bézout $P_i U_i + Q_i V_i = 1$ qui, évaluée en u donne $P_i(u) \circ U_i(u) + Q_i(u) \circ QV_i(u) = \mathrm{id}_E$ puis pour tout $x \in E$,

$$x = \underbrace{P_i(u) \circ U_i(u)(x)}_{\in \bigoplus_{j\neq i} F_j = \mathrm{Ker}\, Q_i(u)} + \underbrace{Q_i(u) \circ V_i(u)(x)}_{\in F_i = \mathrm{Ker}\, P_i(u)} = \mathrm{id}_E$$

  avec $\chi_u(u) = (P_i Q_i)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ par le théorème de Cayley-Hamilton.
  Alors, avec les mêmes notations que précédemment,

$$x_i = Q_i(u) \circ V_i(u)(x)$$

  et $d(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (Q_i V_i)(u)(x)$ et

$$d = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i V_i \right)(u)$$

  est bien un polynôme en u. Enfin, $n = u - d$ est aussi un polynôme en u.

- Si un autre couple (d', n') convient, d' commute avec n' donc avec $u = d' + n'$ donc avec tout polynôme en u et en particulier d. De même, n' commute avec n.

  Or $d - d' = n' - n$, et par commutativité, d et d' sont codiagonalisables donc $d - d'$ est diagonalisable et $n' - n$ est nilpotent (deux exercices classiques).

  Le seulement endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant l'endomorphisme nul, on conclut.

29 Endomorphismes semi-simples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est **semi-simple** si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

1. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est diagonalisable ;
   (ii) χ_u est scindé et u est semi-simple.
2. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est semi-simple ;
   (ii) le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré.

Solution de 29 : Endomorphismes semi-simples

1. - On suppose u diagonalisable. On sait alors que χ_u est scindé.
     Soit F un sous-espace stable par u. Un résultat classique nous dit que F est engendré par des vecteurs propres de u. Comme u est diagonalisable, on peut compléter cette base de F est une base de vecteurs propres ce qui donne bien un supplémentaire stable.
   - Si χ_u est scindé et u est semi-simple, on considère $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ qui est un sous-espace stable par u. Il admet un supplémentaire G stable par u.
     En supposant que $\dim G \geqslant 1$ et en considérant une valeur propre de l'endomorphisme induit par u sur G, on aboutit à une contradiction au fait que F et G soient en somme directe, ce qui donne $F = E$ et u diagonalisable.
2. C'est nettement plus difficile.
   - On suppose u semi-simple. Supposons par l'absurde que $\pi_u = P^2 Q$ avec P unitaire non constant. Soit $F = \mathrm{Ker}\big(P(u)\big)$ qui est stable par u. Par hypothèse, F possède un supplémentaire G stable par u. On montre alors que PQ annule u pour aboutir à une contradiction.
     Comme $0_{\mathscr{L}(E)} = \big(P^2 Q\big)(u) = P(u) \circ (PQ)(u)$, $(PQ)(u)(G) \subset \mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = F$. Or G est stable par u donc par $(PQ)(u)$ donc $(PQ)(u)(G) \subset F \cap G = \{0_E\}$.
     Il reste à voir que $(PQ)(u)(F) = Q(u) \circ P(u)(F) = \{0_E\}$, ce qui est facile avec la définition de F.
     Finalement, comme $E = F + G$, on a bien $(PQ)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui contredit la minimalité de π_u.
   - On suppose maintenant que le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré :
     $$\pi_u = P_1 \cdots P_r$$
     où les P_i sont deux à deux distincts, unitaires et irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. Soit F un sous-espace stable par u, u_F l'endomorphisme induit. Par le lemme de décomposition des noyaux,
     $$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u_F)).$$
     Comme $F_i = \mathrm{Ker}(P_i(u_F)) = F \cap \mathrm{Ker}(P_i(u))$, on va chercher à construire des supplémentaires G_i des F_i dans les $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ et vérifier que $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r$ est un supplémentaire de F stable par u. Pour construire G_i, l'idée est d'ajouter autant que faire se peu le plus petit

sous-espace stable contenant un élément jusqu'à obtenir le supplémentaire de F_i dans $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ recherché.
Soit $F_i = \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et alors $G_i = \{0_E\}$, convient.
Soit ce n'est pas le cas et on peut trouver $x_1 \in \mathrm{Ker}(P_i(u)) \setminus F_i$. Le plus petit sous-espace contenant x_1 et stable par u est $E_{x_1} = \mathrm{Vect}\big(u^k(x_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est un sous-espace de $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ stable par u et non réduit à 0_E car $x_1 \neq 0_E$. Comme dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton, on a $\big(u^k(x_1)\big)_{0\leqslant k\leqslant d_1-1}$ base de E_{x_1} avec $d_1 = \dim E_{x_1}$ plus grand entier k tel que $\big(x_1, u(x_1), \ldots, u^{k-1}(x_1)\big)$ soit libre, ou le plus petit k tel que

$$u^k(x_1) \in \mathrm{Vect}\big(x_1, u(x_1), \ldots, u^{k-1}(x_1)\big).$$

Comme $P_1(u)(x_1) = 0_E$, $d_1 \leqslant \deg P_1$.
[...]

30 Endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$. On définit

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}.$$

1. Montrer l'existence de polynômes unitaires non nuls π et π_x tels que $I = \pi\mathbb{K}[X]$ et $I_x = \pi_x\mathbb{K}[X]$. Montrer que π_x divise π.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu$.
3. On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}\big(u^k(x)\big)_k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi = \chi_u$.
4. Montrer que u est cyclique si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

31 Endomorphismes simples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que u est **simple** lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont triviaux.
Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) u est simple ;

(ii) Le polynôme caractéristique χ_u de u est irréductible sur $\mathbb{K}$.