1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Un problème de mathématiques est une sorte de jeu de piste dans lequel, partant d'une question souvent simple, l'auteur s'efforce d'orienter le candidat vers la réponse en lui fournissant une série d'indices qui doivent lui permettre de se diriger à l'aide de ses connaissances du cours et de sa perspicacité. C'est ce qui fait la spécificité de l'épreuve de mathématiques à la française, alors que dans de nombreux pays cette discipline est évaluée par un sujet comportant de nombreuses questions sans aucun lien entre elles. À l'opposé du bachotage stérile dont sont accusées régulièrement les classes préparatoires, cette continuité dans la réflexion contribue chez leurs étudiants à la mise en œuvre de leurs connaissances, au développement de l'esprit scientifique et à l'initiation à la démarche de recherche.

C'était typiquement le cas avec le sujet de cette année qui partait du problème très simple suivant. On dit qu'une matrice carrée d'ordre n est binaire : si elle ne contient que des 0 et des 1 et si elle comporte exactement deux 1 par ligne et deux 1 par colonne. On se pose alors les trois questions suivantes : combien y a-t-il de telles matrices ? Quel est un équivalent simple de leur nombre quand n tend vers $+\infty$? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'elles engendrent ?

Le cheminement permettant de répondre à ces questions passait par des raisonnements simples de dénombrement, puis par les séries entières, les équations différentielles, les intégrales généralisées et se terminait par un peu d'algèbre linéaire et bilinéaire. Plusieurs questions ponctuelles, tout en faisant avancer dans le problème, permettaient aux étudiants désorientés de faire au moins valoir leur connaissance du cours et leur capacité à résoudre des exercices particuliers. Cependant, peu de réponses étaient fournies. Face à de nombreuses questions ouvertes, les candidats devaient faire appel à leurs qualités de réflexion pour faire usage des informations qui leur étaient fournies par les questions précédentes du problème. C'est ce que nous allons tâcher d'exposer dans ce qui suit.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Question 1. Il suffisait ici de décrire les ensembles U_2 et U_3 , sans chercher particulièrement à détailler le raisonnement correspondant. Tout au plus pouvait-on dans le cas $n = 3$ indiquer qu'il a 3 ! = 6 façons de disposer les éléments nuls d'une matrice binaire.

Question 2. Chaque ligne d'une matrice binaire A ayant exactement deux coefficients égaux à 1, il est évident que $AX_0 = 2X_0$. Il était nécessaire de préciser que X_0 est non nul pour assurer qu'il s'agit bien d'un vecteur propre, ce qui a rarement été fait.

Question 3. On ne pouvait se contenter dans cette question de fournir la réponse $\sum_{A\in\mathsf{U}_n} A = h_n J$. On ne pouvait non plus se contenter d'affirmer que « la somme des éléments situés à la ligne i et à la colonne j de toutes les matrices de U_n est égale à h_n ». C'était déjà mieux d'évoquer la symétrie du problème, ou l'égale probabilité d'obtention d'un 1 à chaque position d'une matrice binaire. C'était encore mieux quand on indiquait d'une manière ou d'une autre que l'on peut mettre en bijection l'ensemble des matrices ayant un 1 en position (i, j) avec H_n , de sorte que ces deux ensembles ont même cardinal.

Question 4. Les deux questions précédentes permettaient d'obtenir facilement la relation $2u_nX_0 = nh_nX_0$ dont on déduisait l'égalité demandée, en rappelant une fois encore que X_0 est non nul de façon à pouvoir égaler les deux coefficients. Plusieurs autres méthodes étaient possibles et elles ont été acceptées dans la mesure où elles étaient correctes et rigoureuses.

Question 5. On introduit une condition encore plus restrictive sur les matrices binaires considérées en leur imposant d'avoir trois coefficients précis égaux à 1. De même que dans la question 3, la rétribution de la question allait croissant avec le caractère complet et rigoureux de la justification de la formule $h_n = (n-1)^2 k_n$.

Question 6. Les possibilités pour le coefficient situé en position (2, 2) ne sont pas bien nombreuses : il ne peut guère valoir que 1 ou 0… Le premier cas est simple, dans le second il suffit de remarquer que les conditions imposées à la matrice obtenue en barrant la première ligne et la première colonne sont identiques à celles d'une matrice de H_{n-1} . Il s'agit là typiquement d'une question dont la rédaction se devait d'être rigoureuse et précise pour assurer à son auteur de bénéficier du maximum de points.

Question 7. C'est là qu'une lecture attentive de l'énoncé s'imposait. Les relations obtenues dans les questions précédentes permettent d'obtenir une relation de récurrence pour la suite (u_n) seulement pour $n \geq 2$. À partir du moment où on demande d'établir celle-ci pour $n \in \mathbb{N}$, il est nécessaire de vérifier qu'elle s'applique pour les premiers termes, les valeurs de u_0 et de u_1 étant fournies dans le préambule et celles de u_2 et de u_3 ayant été calculées dans la première question. Du reste, cette vérification permettait au candidat de contrôler que les relations qu'il avait obtenues aux questions 4 et 5 étaient correctes et dans le cas contraire de conjecturer les bonnes égalités, même s'il ne parvenait pas à les établir. Cela compensait dans une certaine mesure le caractère ouvert des questions 7 à 9. Bien évidemment, la relation de récurrence pour la suite (w_n) n'était acceptable que si elle était débarrassée de toutes ses factorielles.

Question 8. L'appartenance de w_n à $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ se démontre au moyen d'une récurrence double ou totale et implique que le rayon de convergence R de la série entière $\sum w_n x^n$ est au moins égal à 1. La divergence de la série de terme général w_n résulte entre autres méthodes de l'inégalité $nw_n \geq (n-1)w_{n-1}$, conséquence immédiate de la relation de récurrence, grâce à laquelle on obtient par récurrence la minoration $w_n \geq \dfrac{1}{2n}$ valable pour tout $n \geq 2$, et implique $R \leq 1$, grâce à quoi on conclut que $R = 1$. La plupart des candidats ont établi la première et la dernière de ces quatre propriétés. La majoration de u_n par $(n!)^2$ n'est pas facile à établir directement, en tout cas il est faux d'affirmer que si l'on procède par écriture successive des lignes, pour remplir la k-ième ligne de la matrice on dispose d'au plus $(n-k+1)^2$ possibilités pour placer les deux 1. Ce nombre est nettement plus élevé pour les premières valeurs de k.

Question 9. C'est là qu'il importait de faire preuve tant de rigueur dans les calculs que de maîtrise du cours et de sens pratique. La relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (w_n), à savoir :

$$nw_n = (n-1)w_{n-1} + \frac{1}{2} w_{n-2} \qquad (1),$$

a incité nombre de candidats à chercher une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont W est solution. Or la dérivée seconde d'une série entière implique des termes de la forme $n(n-1)w_n$. Ceux-ci n'apparaissent pas dans la relation de récurrence et il est nécessaire de compliquer celle-ci au lieu de la maintenir sous sa forme simple. De plus, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients variables ne se résout pas si facilement que cela. Il faut soit connaître déjà une solution particulière, soit utiliser la méthode des séries entières, ce qui est ici bien évidemment exclu. C'est donc une équation du premier ordre qu'il fallait chercher à obtenir. Cela était aisé en multipliant les trois termes de la relation (1) par x^{n-1} et en sommant sur n, ce qui donnait :

$$W'(x) = xW'(x) + \frac{x}{2} W(x) \qquad (2),$$

équation dont la solution valant 1 en 0 est $W(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$.

Bien évidemment, il est inacceptable de proposer une équation différentielle dont certains coefficients dépendent encore de n. Il est tout aussi inacceptable de chercher ensuite à résoudre l'équation caractéristique, ainsi que dans le cas d'une équation différentielle du second ordre à coefficients variables.

Question 10. De trop nombreux candidats s'imaginent qu'il suffit qu'une fonction soit indéfiniment dérivable pour être somme d'une série entière. D'autres, scrupuleux à l'excès, tâchent de majorer le reste intégral de la formule de Taylor pour prouver la convergence de cette série, ce qui les a menés à des calculs laborieux et souvent non aboutis. D'autres encore ont tâché de justifier cette propriété en déterminant une équation différentielle dont ϕ est solution, puis en cherchant les solutions de cette équation différentielle sous forme de série entière dont ils ont ensuite essayé de déterminer le rayon de convergence. Autant de méthodes difficiles à mener à leur terme, alors qu'il suffisait de dire que ϕ est produit de deux fonctions développables en série entière dans $]-1, 1[$. La considérer comme un quotient, ou même comme une composition de telles fonctions, ne suffisait pas, car on perdait alors la propriété fondamentale de conservation du minimum des deux rayons de convergence, en raison de la convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Question 11. L'explicitation des coefficients de la fonction $\dfrac{1}{(1-x)^{\beta}}$ n'était nécessaire qu'ici, et on pouvait se contenter de réciter son cours :

$$(1-x)^{-\beta} = 1 - \beta(-x) + \frac{(-\beta)(-\beta-1)}{2}(-x)^2 + \ldots + \frac{(-\beta)(-\beta-1)\ldots(-\beta-n+1)}{n!}(-x)^n + \ldots$$

puis d'exprimer les coefficients de cette série à l'aide de la fonction gamma.

Question 12. L'égalité demandée résultait de l'application de la linéarité de l'intégrale à la somme finie du produit de Cauchy des deux séries entières composant ϕ, la fonction gamma ayant été remplacée par sa définition par une intégrale. La convergence de celle-ci assurait celle de l'intégrale définissant ψ_n. Cette question a été correctement traitée par une grosse minorité de candidats.

Question 13. L'étude des variations de la fonction $u \mapsto e^{-u}(\alpha + u)^n$ fait apparaître un maximum global en $u = n - \alpha$, ce qui permet de majorer la première intégrale en valeur absolue par $(\alpha+a)^n e^{-a}\dfrac{a^{\beta}}{\beta}$ dès que n est supérieur à $a + \alpha$. De nombreuses minorations de la deuxième intégrale sont possibles, par exemple :

$$\int_a^{\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,du \geq \int_a^{n-\alpha} u^{\beta-1}e^{-a}(\alpha+a)^n\,du = (\alpha+a)^n e^{-a}\left(\frac{(n-\alpha)^{\beta}-a^{\beta}}{\beta}\right)$$

d'où on déduit la négligeabilité demandée. Une représentation graphique de la fonction étudiée permettait de soutenir le raisonnement, mais ne pouvait le remplacer, ne serait-ce que parce que ce n'était pas exactement la fonction intégrée en raison de l'absence du facteur $u^{\beta-1}$. La plupart des candidats se sont arrêtés aux variations de la fonction, ne sachant en tirer parti pour majorer la première intégrale et minorer (et non majorer…) la deuxième, alors que pour cette dernière opération, on pouvait la restreindre à pratiquement tout intervalle de longueur constante de $[a, +\infty[$ pour aboutir.

Question 14. Il s'agit là indubitablement de la question la plus difficile du problème. De nombreux candidats se sont fourvoyés en déduisant un équivalent en n de l'équivalence en u des fonctions intégrées. Ceux qui ont amorcé un raisonnement correct ont été gratifiés d'une partie des points attribués à cette question, même s'ils ne sont pas parvenus à conclure. Plusieurs démonstrations sont possibles, en voici une. Puisque $u^{\beta-2}$ et $(u + \alpha)^{\beta-2}$ sont équivalents à l'infini, il existe $a > |\alpha|$ tel que pour tout $u > a$ on a :

$$|(u + \alpha)^{\beta-2} - u^{\beta-2}| \leq (u + \alpha)^{\beta-2}.$$

Il résulte d'autre part de l'inégalité des accroissements finis que pour tout $u > a$ on a :

$$|(u + \alpha)^{\beta-1} - u^{\beta-1}| \leq \left|\alpha(\beta-1)\sup_{\gamma\in[0,\alpha]}(u+\gamma)^{\beta-2}\right|.$$

Or cette borne supérieure est atteinte à l'une des extrémités du segment $[0, \alpha]$, mais vu l'inégalité précédente, elle est de toute façon majorée par $2(u + \alpha)^{\beta-2}$. On en déduit :

$$\left|\int_a^{+\infty}(u+\alpha)^{n+\beta-1}e^{-u}du - \int_a^{+\infty}(u+\alpha)^n u^{\beta-1}e^{-u}du\right| \leq 2\left|\alpha(\beta+1)\right|\int_a^{+\infty}(u+\alpha)^{n+\beta-2}e^{-u}du \qquad (3).$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_a^{+\infty}(u+\alpha)^{n+\beta-1}e^{-u}du = (\alpha+a)^{n+\beta-1}e^{-a} + (n+\beta-1)\int_a^{+\infty}(u+\alpha)^{n+\beta-2}e^{-u}du \qquad (4),$$

où la partie tout intégrée est négligeable devant la deuxième intégrale. Cela prouve que le second membre de (3) est négligeable devant le premier membre de (4) et conclut la preuve de l'équivalence demandée.

Question 15. Un changement de variable affine permet de ramener l'intégrale décrite dans la question 14 à celle définissant la fonction gamma, moins une intégrale sur un segment qui est négligeable devant la précédente par le même raisonnement que dans la question 13. Ces étapes sont assez simples mais devaient être décrites avec précision.

Question 16. La solution W de l'équation différentielle obtenue à la question 9 est un cas particulier de ϕ pour des valeurs particulières de α et β. On en déduit un équivalent de w_n, puis un équivalent de u_n :

$$u_n \sim \frac{e^{-1/2}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(1/2)},$$

que l'on simplifie en utilisant la formule de Stirling, non seulement pour n !, mais aussi pour $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ que l'on exprime à son tour à l'aide de factorielles.

Question 17. Une lecture hâtive de l'énoncé a fait penser à de nombreux candidats qu'il fallait chercher le rang des matrices de U_n, et non celui du système qu'elles constituent. Heureusement pour ceux-là, dans le cas $n = 2$, le résultat est le même ! Par contre, il n'en est plus du tout ainsi dans le cas $n = 3$. Évidemment, la réponse ne saurait être supérieure à 6, et en tout cas pas à 9. Que ce soit par un examen des coefficients des matrices $J - A$, où A décrit U_3, ou par la résolution (finalement simple) du système de 9 équations à 6 inconnues obtenu en écrivant qu'une combinaison linéaire de ces matrices est nulle, on obtenait facilement le résultat correct $n = 5$.

Question 18. La première partie de la question est élémentaire, mais la deuxième a encore une fois été mal lue par de nombreux candidats qui ont pensé qu'il fallait comparer les valeurs propres de A et de ${}^tA$ associées à X_0 lorsque A appartient à U_n . Évidemment la solution est alors bien plus simple... Encore une fois, plusieurs méthodes étaient envisageables, la plus simple étant de calculer de deux manières ${}^tX_0\,AX_0$.

Question 19. Certains candidats semblent avoir oublié que quand on effectue un changement de base, on obtient une matrice semblable à la précédente, mais qui n'est pas la même matrice. Les conditions indiquées permettent de constater que la matrice obtenue est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

et que l'ensemble de ces matrices est de dimension $(n-1)^2 + 1$, et non seulement $(n-1)^2$ comme l'ont cru de nombreux candidats, supposant sans doute que λ est fixé, ou lui imposant d'être égal à 2. Mais dans ce cas, V_n ne saurait être un espace vectoriel. Il fallait ensuite conclure par l'égalité des dimensions résultant du fait que la conjugaison par la matrice de passage est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 20. À partir d'une constatation élémentaire, on fabrique aisément un système libre de $(n-1)^2$ matrices différences de matrices de U_n. On en déduit alors la minoration demandée. Seule la première partie de cette question a en général été traitée par les candidats.

Question 21. De nombreux candidats ont conclu que $r_n = r'_n = (n-1)^2$, ce qui dénote encore une fois un certain manque de réflexion, ce qu'on peut comprendre à l'approche du terme de quatre heures d'épreuve. Cela impliquerait que toute matrice de U_n est combinaison linéaire de différences de deux matrices de U_n, ce qui ne peut être le cas, comme on peut s'en convaincre par exemple en examinant la somme de ses coefficients. On a donc nécessairement $r_n > r'_n$, d'où $r_n = (n-1)^2 + 1$. Non seulement on obtient la valeur de r_n , mais de plus on peut conclure que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par U_n est exactement V_n .

III) <u>CONCLUSION</u>

Ce problème a donné à de nombreux candidats l'opportunité de faire montre de la connaissance de leur cours et ils en ont été récompensés. Mais plus encore l'ont été ceux qui ont su suivre quelques bouts du chemin qui leur était tracé en faisant le lien entre les différentes questions. Ceux-là ont fait preuve des qualités qu'ils ont développées pendant leur scolarité en classe préparatoire. Ils pourront suivre avec profit leurs études en grande école et de devenir ensuite les ingénieurs compétents, efficaces et… ingénieux dont les entreprises ont tant besoin.