MPI — *Samedi 10 février – 4 heures*

Devoir en Temps Limité n° 6

Vous avez le choix entre deux sujets :

- **Sujet CCINP** : CCP Maths 1 MP 2004 : sujet un peu ancien qui peut surprendre : on apprend à définir des fonctions sur des matrices. Prendre le temps de bien comprendre toutes les notations et ce qui est demandé.
- **Sujets Mines-Ponts + X** : Mines-Ponts Maths 1 MP 2017 : sujet plus technique, calibré pour 3 heures, certaines questions sont vraiment difficiles. **Ne pas y passer plus de 3 heures.** Puis extrait de X Maths 2 MP 2007 : sujet d'algèbre linéaire, dont les notations peuvent surprendre... ne pas se laisser impressionner. Et **ne pas y passer plus de 2 heures, ne pas traiter la fin du sujet.** Ce qui n'aura pas été traité sur place (y compris la fin de la troisième et la quatrième parties, donc), sont à traiter en devoir libre.

Nous sommes plus très loin des écrits.
Placez-vous dans des conditions de concours : vous y êtes, vous donnez tout.

Je vous fais confiance, vous êtes capable du meilleur !

💪

$\boxed{\text{Les calculatrices sont interdites}}$

Extraits d'un rapport de jury CCINP : *« Voici quelques conseils pour les futurs candidats :*

1. *Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.*
2. *Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.*
3. *Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.*
4. *Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figures quelques lignes plus haut ou à la question précédente.*
5. *Numéroter les copies et les rendre dans l'ordre.*
6. *Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.*
7. *C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.*
8. *Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.*
9. *Soigner la présentation.*
10. *Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultats qui doit être prouvé. »*

Sujet CCINP : CCP Mathématiques 2 – MP – 2004

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Fonctions de matrices

Notations

1. Les $\mathbb{R}$-algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :

- L'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, on note C_I^∞ l'algèbre commutative des fonctions de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.
- L'algèbre des fonctions polynomiales de I dans $\mathbb{R}$ est usuellement identifiée à l'algèbre $\mathbb{R}[X]$.

2. On y rencontre aussi les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :
   - L'espace des colonnes réelles à n lignes noté $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
   - L'espace $\mathbb{R}_N[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant N\}$, où $N \in \mathbb{N}$.
3. Les notions de convergence dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{R})$ sont relatives aux normes respectives :
   - $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, si $X = [x_1, \dots, x_n]^\intercal$.
   - $\|M\| = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$, si $M = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Objectifs du problème

Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on sait donner un sens à la matrice $P(A)$ et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur A qui en résulte. En particulier, si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on appelle polynôme minimal de M le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P(M) = 0$; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice $f(A)$ pour toute fonction f de classe C^∞, et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice A.

Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur A.

Notations fixées pour tout le problème

- On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et l'on suppose que son polynôme minimal Π_A peut être écrit sous la forme : $\Pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec : $r \geqslant 1$; les λ_j sont des réels distincts ; les m_j sont dans $\mathbb{N}^*$. On note alors $m = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} m_j$ le degré de Π_A.
- On considère aussi un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et contenant tous les λ_j.

La matrice A et l'intervalle I sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

Préliminaires :

1. Établir que pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et M dans $M_n(\mathbb{R})$, on a : $\|MX\|_\infty \leqslant \|M\| \; \|X\|_\infty$.

2. Soit $\mathscr{M}$ un sous-espace vectoriel de dimension $d \geqslant 1$ de $M_n(\mathbb{R})$, et soit $\beta = (B_1, \dots, B_d)$ une base de $\mathscr{M}$.

a) Montrer que l'on définit une norme $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{M}$ en posant $\mathscr{N}(M) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} |x_k|$, si $M = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} x_k B_k$ est la décomposition de l'élément M de $\mathscr{M}$ sur la base β.

b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives a et b vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}, \; a\|M\| \leqslant \mathscr{N}(M) \leqslant b\|M\|.$$

c) Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}$; on note $M_p = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} x_p(k) B_k$ la décomposition de M_p sur β. Montrer que la suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ si et seulement si chaque suite réelle $\big(x_p(k)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ $(k = 1, \dots, d)$ converge vers 0.

1. Une relation d'équivalence sur C_I^∞

On convient de dire que des fonctions f et g de C_I^∞ « coïncident sur le spectre de A » lorsque : $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$. Ce que l'on résume par la notation $f \underset{A}{\equiv} g$.

Un exemple : si $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$ la notation $f \underset{A}{\equiv} g$ signifie : $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ et $f(-1) = g(-1)$

3. Soient ℓ dans $\mathbb{N}^*$, λ dans I et f dans C_I^∞ vérifiant : $f^{(k)}(\lambda)=0$ pour $k=0,1,2,\ldots,\ell-1$.
   - **a)** Établir l'identité : $\forall x\in I, f(x)=\displaystyle\int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)\ \mathrm{d}u$.
   - **b)** En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction h vérifiant :
     - **(1)** $\forall x\in I, f(x)=(x-\lambda)^\ell h(x)$
     - **(2)** $h\in C_I^\infty$
4. Soient f et g dans C_I^∞.
   - **a)** On suppose : $\exists h\in C_I^\infty, f=g+h\Pi_A$.
     En considérant les dérivées successives de $f-g$, établir que $f\underset{A}{\equiv}g$.
   - **b)** On suppose $f\underset{A}{\equiv}g$; en exploitant le **3.** justifier l'existence de h dans C_I^∞ vérifiant :
     $f=g+h\Pi_A$.
5. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - **(1)** $P\underset{A}{\equiv}Q$
   - **(2)** $\exists H\in\mathbb{R}[X], P=Q+H\Pi_A$.

2. Définition de la matrice $f(A)$

A. On considère l'application φ de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^m$ qui associe à un polynôme P le m-uplet :

$$\varphi(P)=\Big(\big(P^{(k_1)}(\lambda_1)\big)_{0\leqslant k_1\leqslant m_1-1},\ldots,\big(P^{(k_r)}(\lambda_r)\big)_{0\leqslant k_r\leqslant m_r-1}\Big).$$

6. Établir le caractère bijectif de φ.
7. Soit f dans C_I^∞ ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme P_f de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ et tel que : $f\underset{A}{\equiv}P_f$. On convient alors de définir la matrice $f(A)$ en posant : $f(A)=P_f(A)$.

B. Quelques exemples

8. On suppose ici que f est polynomiale et l'on écrit : $\forall x\in I, f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^N a_k x^k$.
   En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question **7**, on obtient le résultat naturel : $f(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^N a_k A^k$.
9. Ici : $A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ et $I=\mathbb{R}$.
   - **a)** Calculer $\Pi_A(X)$.
   - **b)** Calculer la matrice $f(A)$ dans chacun des cas suivants :
     - **(1)** $f(x)=ax+b$, les réels a et b étant donnés.
     - **(2)** $f(x)=\sin(\pi x)$
     - **(3)** $f(x)=(x-1)^2g(x)$, où la fonction g est donnée dans C_I^∞.

3. Le calcul systématique de $f(A)$

A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire φ du **2.A**, justifier l'existence et l'unicité de polynômes $Q_{j,k}$ $(1\leqslant j\leqslant r$, $0\leqslant k\leqslant m_j-1)$ vérifiant : pour toute fonction f de C_I^∞, on a

$$P_f=\sum_{1\leqslant j\leqslant r}\ \sum_{0\leqslant k\leqslant m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Q_{j,k}$$

On considère alors les matrices dites « associées » à A : $Z_{j,k}=Q_{j,k}(A)\quad (1\leqslant j\leqslant r,\ 0\leqslant k\leqslant m_j-1)$.

11. Montrer que les diverses matrices $Z_{j,k}$ sont linéairement indépendantes et que

$$\forall f \in C_I^\infty,\ f(A) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum_{0 \leqslant k \leqslant m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

B. Deux exemples

12. Ici : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.

- **a)** Justifier l'existence de matrices Z_1 et Z_2 de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $\forall f \in C_I^\infty,\ f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$.
- **b)** En déduire le calcul de Z_1 et Z_2.
- **c)** Calculer les matrices A^{2004}, $\sqrt{A}$ et plus généralement A^α pour α dans $\mathbb{R}_+^*$.

13. Ici : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.

- **a)** Présenter sous forme factorisée le polynôme $\Pi_A(X)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
- **b)** Calculer les matrices $Z_{j,k}$ « associées » à A.

4. Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g dans C_I^∞ et α dans $\mathbb{R}$.

- **a)** Que valent $P_{\alpha f}$ et P_{f+g} ?
- **b)** Justifier l'existence d'un polynôme H de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{fg} = P_f P_g + H\Pi_A$.

15.
- **a)** Montrer que l'application $S : f \mapsto f(A)$ de C_I^∞ dans $M_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.
- **b)** Quel est son noyau ?

16. On considère les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On peut ainsi définir les matrices $\cos A$, $\sin A$, et même $\sqrt{A}$ et $\dfrac{1}{A}$ si les λ_j sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

- **a)** En exploitant le morphisme S, calculer $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$.
- **b)** On suppose ici que les λ_j sont strictement positifs. Reconnaître : $\left(\sqrt{A}\right)^2$ et $\dfrac{1}{A}$.

B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté $\mathscr{M}_A = \left\{ f(A) \mid f \in C_I^\infty \right\}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

18. Montrer que si un élément de $\mathscr{M}_A$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ alors son inverse est aussi dans $\mathscr{M}_A$.

19. Soit f dans C_I^∞ ; établir l'équivalence des énoncés suivants :

- **(1)** $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$.
- **(2)** $\forall j \in \{1, \dots, r\}, f\left(\lambda_j\right) \neq 0$

20. Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on note Λ_M l'ensemble de ses valeurs propres réelles.
En exploitant la question **19** comparer les ensembles : Λ_A et $\Lambda_{f(A)}$ où f est donnée dans C_I^∞ .

Fin de l'énoncé

Sujet Mines-Ponts – X

* * *

Mines-Ponts – Mathématiques 1 – MP – 2017 (maximum 3 h)

Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a,a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathscr{D}$ la partie de $\mathscr{E}$ constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;
- $\mathscr{P}$ la partie de $\mathscr{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt$$

et si $f \in \mathscr{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules

$$\forall x \in I,\ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) \, dt$$

$$\forall x \in I,\ v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) \, dt$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A. Préliminaires

1. Justifier que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
2. Montrer que si $f \in \mathscr{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies.
   On admet qu'elles appartiennent à $\mathscr{E}$.
   Justifier que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathscr{E}$.
3. Montrer que $\mathscr{P}$ est stable par u et v.
4. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Etude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathscr{E}$ définie pour tout $f \in \mathscr{E}$ par la formule $M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|$.

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même.
7. L'application v est-elle continue de $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même ?
8. Vérifier que l'application $N : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathscr{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathscr{E}, N)$ dans $(\mathscr{E}, M)$. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?
9. Si $f \in \mathscr{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathscr{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathscr{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, N)$.

C. Etude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathscr{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Conclure.

Application

13. Montrer que $f \in \mathscr{E}$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D. Etude des valeurs propres de u et v

14. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

15. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathscr{E}$.

16. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max\limits_{t \in I} \left| f^{(n)}(t) \right|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda| \cdot \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{2 m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathscr{P}$.

17. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.

18. L'espace vectoriel $\mathscr{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? De v ? L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

X – Mathématiques 2 – MP – 2007 (maximum 2 h)

Relations de commutation

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets (K, E, F) où K, E, F sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel satisfaisant certaines relations de commutation. On désignera toujours par q un nombre complexe non nul et tel que pour tout entier $n > 0$, $q^n \neq 1$.

Première partie

Dans cette partie, on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 2$, et par $(x_1, ..., x_n)$ une base de X.

1. Soit A un endomorphisme de X représenté dans la base $(x_1, ..., x_n)$ par une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, ..., a_n$ deux à deux distincts. Montrer que tout endomorphisme B de X, commutant à A, est aussi représenté par une matrice diagonale.

2. Soit $A_1, .., A_p$ des endomorphismes de X.

- **a)** Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de X stables par $A_1, .., A_p$ sont $\{0\}$ et X, alors tout endomorphisme B de X, commutant à $A_1, .., A_p$, est un multiple scalaire de l'identité.
- **b)** La réciproque est-elle vraie ?

Deuxième partie

On définit X et $(x_1, ..., x_n)$ comme à la première partie. On note K_0 et F_0 les endomorphismes de X définis comme suit :

$$\forall p = 1, ..., n,\ K_0 x_p = q^{n+1-2p} x_p,\ F_0 x_p = \begin{cases} x_{p+1} \text{ si } p < n \\ 0 \text{ si } p = n \end{cases}$$

3. Calculer $K_0 F_0 - q^{-2} F_0 K_0$.

4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0, puis ceux stables par F_0 et K_0.

On définit un troisième endomorphisme E_0 de X par

$$E_0 x_p = \begin{cases} (q - q^{-1})^{-2} (q^{p-1} - q^{1-p})(q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) x_{p-1} \text{ si } p > 1 \\ 0 \text{ si } p = 1 \end{cases}$$

5. Calculer $K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0$.

6. Vérifier la relation $E_0 F_0 - F_0 E_0 = (q - q^{-1})^{-1}(K_0 - K_0^{-1})$.

7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par K_0, E_0, F_0.

Troisième partie

Dans cette partie, on désigne par K et E deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe X de dimension n satisfaisant les conditions suivantes :

i) $KE = q^2 EK$

ii) K est inversible

iii) E est non nul.

Pour tout nombre complexe λ on pose

$$X_\lambda = \mathrm{Ker}(K - \lambda I),\ Y_\lambda = \mathrm{Ker}(E - \lambda I)$$

8. Vérifier les relations

$$E(X_\lambda) \subset X_{q^2\lambda},\ K(Y_\lambda) \subset Y_{q^{-2}\lambda}$$

9. Montrer que Y_λ est réduit à $\{0\}$ si λ est non nul.

10. Indiquer un nombre entier $r > 0$ tel que $E^r = 0$.

11. Montrer qu'il existe un élément x non nul de $\mathrm{Ker}\, E$, vecteur propre pour K.

NE PAS TRAITER LA SUITE AUJOURD'HUI

12. On suppose X de dimension 2, et on se propose de démontrer l'existence d'une base (x_1, x_2) de X possédant les propriétés suivantes :

(P1) $K x_1 = \lambda x_1$ où λ est un scalaire convenable

(P2) $K x_2 = q^{-2} \lambda x_2$

(P3) $E x_1 = 0$

(P4) $E x_2 = x_1$

a) Montrer qu'il existe un vecteur x_1^0 et un scalaire λ tels que l'on ait

$$K x_1^0 = \lambda x_1^0 \text{ et } E x_1^0 = 0.$$

On note x_2^0 un vecteur non nul et non proportionnel à x_1^0.

b) Montrer que le vecteur $E x_2^0$, qu'on note x_1, est un multiple non nul de x_1^0.

c) Montrer qu'il existe un scalaire β tel que

$$K x_2^0 = \beta x_1 + q^{-2} \lambda x_2^0.$$

d) Trouver un scalaire α tel que les vecteurs x_1 et $x_2 = x_2^0 + \alpha x_1$ répondent à la question.

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 2$ et on considère un triplet (K, E, F) d'endomorphismes de X satisfaisant les conditions suivantes :

i) K est inversible, $K^2 \neq I$

ii) $KE = q^2 EK$

iii) $KF = q^{-2} FK$

iv) $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$

v) les seuls sous-espaces vectoriels de X, stables par K, E, F, sont $\{0\}$ et X

13. Vérifier que, pour tout entier $m > 0$, on a

$$EF^m - F^m E = (q - q^{-1})^{-2}(q^m - q^{-m})F^{m-1}(q^{1-m}K - q^{m-1}K^{-1}).$$

Dans ce qui suit, on note v_1 un vecteur non nul de X, annulé par E et vecteur propre de K pour une certaine valeur propre que l'on notera λ. Pour tout entier $m > 0$, on pose $v_m = F^{m-1} v_1$.

14. Calculer $K v_m$.

15. Démontrer la relation

$$\forall m \geqslant 2,\ E v_m = (q - q^{-1})^{-2}(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m}\lambda - q^{m-2}\lambda^{-1}) v_{m-1}.$$

16. Démontrer les assertions suivantes :

a) Ceux des vecteurs v_m qui sont non nuls, sont linéairement indépendants.

b) Il existe $m_0 \geqslant 1$ tel que $v_m = 0$ pour tout $m > m_0$ et que $v_1, \ldots, v_{m_0}$ soient linéairement indépendants.

c) On a $m_0 = n$

d) On a $\lambda = \pm q^{n-1}$.

17. Comparer le triplet (K, E, F) avec le triplet (K_0, E_0, F_0) considéré à la deuxième partie.