Sujet CCINP

Exercice 1 : topologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On considère l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
3. Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :
$$\exists\rho>0,\quad \forall\lambda\in]0,\rho[,\quad M-\lambda I_n\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$
Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
4. Application :
Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A\cdot B$ et $B\cdot A$ ont le même polynôme caractéristique.
A l'aide des matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.
5. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

Exercice 2 : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $H_{n+1}=XH_n-H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $H_{n+1}'=(n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose
$$\langle P\mid Q\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$
la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

3. **Un produit scalaire sur** $\mathbb{R}[X]$
   (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P\mid Q\rangle$.
   (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
4. **Une famille orthogonale**
Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.
   (a) Démontrer que, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle P\mid H_n\rangle=\langle P^{(n)}\mid H_0\rangle$.
   (b) En déduire que , pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(H_0,H_1,\dots,H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (d) Soit $P=X^3+X^2+X+1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0\leqslant i\leqslant 3)$ tels que $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{3}a_iH_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P-Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

Problème

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans cet ordre. Si $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\intercal$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\ \|$ associée. On note $\mathscr{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :
$$\forall(x,y)\in E^2,\quad \langle s(x)|y\rangle=\langle x|s(y)\rangle.$$
Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :
$$\forall x\in E,\quad \langle s(x)|x\rangle\geqslant 0\ \text{(respectivement } \forall x\in E\setminus\{0\},\ \langle s(x)|x\rangle>0).$$
Une matrice S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :
$$\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad X^\intercal SX\geqslant 0\ \text{(respectivement } \forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ X^\intercal SX>0).$$
On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1,\dots,a_n$,
$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ \text{(inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A\mapsto\mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

1.
   (a) Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.
   (b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$:
$$S=\begin{pmatrix}i&1\\1&-i\end{pmatrix}.$$
2. Soit $s\in\mathscr{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :
$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$
Soit $\beta=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, ϵ_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :
$$R_s(x)=\langle s(x)|x\rangle.$$
   (a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.
   (b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1))\subset[\lambda_1,\lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.
3. (a) On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

(b) Soit $S=(s_{i,j})\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots\leqslant\lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B=(e_1,\dots,e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\quad \lambda_1\leqslant s_{i,i}\leqslant\lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que l'application $M\mapsto M^{\mathsf{T}}M-I_n$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Justifier que, si $A=(a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2\quad |a_{i,j}|\leqslant 1.$$

6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Soit $S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. On pose $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.
Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A)=\mathrm{Tr}(AS)$.
   (a) Soit $A\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A)=\mathrm{Tr}(B\Delta).$$

   (b) Démontrer que l'application T de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t.
   (c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A)\leqslant\mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S=(s_{i,j})\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots\leqslant\lambda_n.$$

8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S)\leqslant\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n\quad(*).$$

9. Soit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, $D=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $S_\alpha=D^{\mathsf{T}}SD$. Démontrer que $S_\alpha\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.
10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1\leqslant i\leqslant n$, on pose $\alpha_i=\dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S)\leqslant\prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Pour tout réel $\varepsilon>0$, on pose $S_\varepsilon=S+\varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon)\leqslant\prod_{i=1}^n(s_{i,i}+\varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n\lambda_i\leqslant\prod_{i=1}^n s_{i,i}\quad\text{(inégalité d'Hadamard).}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0<\lambda_1\leqslant\dots\leqslant\lambda_n$, et $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Soit $\Omega\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S=\Omega\Delta\Omega^{\mathsf{T}}$.
On désigne par $\mathscr{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

12. Démontrer que, pour tout $A\in\mathscr{U}$, la matrice $B=\Omega^{\mathsf{T}}A\Omega$ est une matrice de $\mathscr{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(AS)=\mathrm{Tr}(B\Delta).$$

13. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}(AS),\ A\in\mathscr{U}\}=\{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B\in\mathscr{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.
14. Démontrer que, si $B=(b_{i,j})\in\mathscr{U}$:

$$\mathrm{Tr}(B\Delta)\geqslant n(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{1/n}(b_{1,1}\cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

15. En déduire que, pour $B=(b_{i,j})\in\mathscr{U}$, $\mathrm{Tr}(B\Delta)\geqslant n(\det(S))^{1/n}$.
16. Pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant n$, on pose $\mu_k=\dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D=\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$.
Déterminer le réel m.

Fin de l'énoncé