MP

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail. Il est important que les résultats soient soulignés ou encadrés.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Le sujet se composait d'un exercice sur les espaces euclidiens suivi d'un problème autour de la décomposition de Dunford.

L'exercice proposait de déterminer l'orthogonal de l'espace vectoriel des matrices diagonales.

Le problème permettait aux élèves de découvrir un classique de la réduction d'endomorphismes : la décomposition de Dunford. Le sujet proposait notamment une jolie excursion en topologie dans la partie IV en proposant de montrer la non continuité de l'application qui à une matrice complexe associe la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford. Il était décomposé en 4 parties que l'on pouvait traiter de manière quasi-indépendante (seule la partie IV demandait une bonne compréhension des résultats démontrés dans les parties antérieures).

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

La moyenne de l'épreuve est de 10.12 et l'écart type est de 4.44. Ce sujet a permis de bien classer les candidats, la moyenne est bonne et les notes sont bien étalées. On notera que plusieurs candidats obtiennent la note de 20/20.

L'énoncé était clair et les questions, de difficulté variée, permettaient à tous les candidats, même faibles de s'exprimer. Le sujet a balayé une grande partie du programme dédié à cette épreuve, avec un bon équilibre entre questions calculatoires et théoriques.

Les candidats ont dans l'ensemble apprécié ce sujet et ont, pour la grande majorité, pu aborder quasiment toutes les questions.

Plusieurs correcteurs se plaignent de faiblesses en orthographe de la part des candidats.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

EXERCICE

Q1. Exercice assez peu réussi. On pouvait procéder par équivalence, en particulier en utilisant une base de l'espace des matrices diagonales. Certains ont fait une démarche par condition nécessaire oubliant la réciproque. Enfin, peu savent que le produit scalaire ici est le « même » que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

PROBLÈME

Q2. Question assez bien traitée. Quand A est diagonalisable ou nilpotente, certains étudiants ne donnent pas le couple (D,N) en fonction de A, ils se contentent de dire qu'il existe.

Q3. On rencontre souvent des réponses sans justification et souvent fausses. Par exemple la matrice nulle ou une matrice triangulaire diagonalisable ou encore les calculs faux du polynôme caractéristique de la matrice donnée.

Q4. Question réussie. Quelques erreurs dans le calcul du polynôme caractéristique.

Q5. Quelques candidats oublient de citer la commutativité des matrices I et N. On accepte comme réponse : $e^{-1}(I+N)$.

Q6. Question bien traitée par la plupart des candidats. Certains oublient de préciser que la matrice A^2 est diagonalisable car annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Q7. Certains candidats utilisent le polynôme minimal, d'autres étudient la dimension des sous espaces propres. Quelques candidats indiquent que la matrice est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé ! On rencontre aussi l'erreur : la matrice n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique n'est pas scindé simple !
Beaucoup de candidats partent dans des calculs sans fin afin de montrer directement la somme directe sans utiliser le lemme des noyaux. D'autres ne citent pas l'argument que les polynômes sont premiers entre eux avant d'appliquer le lemme des noyaux.
Vu que l'on demande de **démontrer**, on n'accepte pas : « on sait que les sous espaces caractéristiques sont en somme directe ».

Q8. La base est souvent bien déterminée mais la matrice B n'est pas toujours correcte. De manière surprenante, certains étudiants trouvent correctement l'espace propre associé à la valeur propre 2 alors qu'ils ont affirmé quelques lignes plus haut que la matrice A était diagonalisable.

Q9. Un grand nombre d'étudiants ne traitent pas cette question calculatoire. On constate que trouver l'inverse d'une matrice de taille 3 pose problème.

Q10. La plupart des candidats traitent cette question mais certains se trompent dans la décomposition en éléments simples en ne mettant que les termes en X-1 et en X-2. Il est très surprenant de constater que le concept de « décomposition en éléments simples » est loin d'être connu par tous.

Q11. Question plutôt bien traitée quand elle est abordée par les candidats. Le calcul de $p(x) + q(x)$ est et souvent faux, on trouve des termes en x^2, $u(x)ox$….
Peu démontrent rigoureusement que p et q sont des projecteurs.

Q12. Question marginalement traitée.

Q13. La plupart des copies traitent correctement la stabilité mais l'existence de base de diagonalisation commune donne lieu à des non-sens (confusion de bases, de sous-espaces et de vecteurs …).

Q14. Question facile et bien traitée.

Q15. Question classique, parfois traitée trop rapidement sauf pour les candidats qui font appel à un bon découpage en deux sommes de la formule du binôme de Newton pour les matrices. On attend des candidats qu'ils rappellent l'hypothèse fondamentale de commutativité.

Q16. Si l'implication est presque toujours correcte, il manque souvent la réciproque (la matrice nulle vérifie les hypothèses).

Q17. Ceux qui entament cette question pensent généralement à utiliser les précédentes et ne manquent pas de signaler que, d'une part, les matrices D et D' et d'autre part, les matrices N et N' commutent en tant que polynômes de A.

Q18. Ici, même si cela n'était pas spécifié, un contre-exemple était attendu. Pour cela, il fallait, par exemple, exhiber deux matrices diagonalisables dont la somme n'était pas diagonalisable.

Ceux qui y sont parvenus ont généralement choisi une matrice d'ordre 2 triangulaire avec une diagonale à coefficients égaux et l'autre matrice diagonale, avec les coefficients diagonaux égaux à l'opposé de ceux de la première matrice...
Pour la continuité, la plupart des candidats vérifient la linéarité de l'application puis la dimension finie pour établir la continuité.

Q19. Question délicate. Les candidats ont l'idée générale mais la rédaction est souvent hasardeuse. Dans ce genre de question, on récompense la démarche.

Q20. Bien réussie quand cette question est abordée.

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.