Problème Mines-Ponts MP 2010

Dénombrements de certaines matrices binaires

A. Questions préliminaires

1. Pour $n=2$, c'est facile, on a $\boxed{\mathscr{U}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } u_2 = 1.}$

   Pour $n=3$, on remarque que chaque ligne et chaque colonne doit comporter exactement un terme nul. On tire $\boxed{\mathscr{U}_3 = \left\{\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&1&0\\1&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\1&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\0&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\1&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } u_3 = 6.}$

---

2. Vu la définition de $\mathscr{U}_n$, on a pour $A \in \mathscr{U}_n$, $AX_0 = 2X_0$ et comme $X_0 \neq 0$,

$$\boxed{X_0 \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 2.}$$

---

3. Pour des raisons de symétrie, en sommant toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$, on obtient une matrice dont tous les cœfficients sont égaux. Vu la définition de h_n, on a alors $\boxed{\sum_{A \in \mathscr{U}_n} A = h_n J.}$

   Pour un argument plus précis, si on appelle $\mathscr{H}_n'$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{U}_n$ ayant un 1 en une position fixée (i,j), alors l'application qui à A associe la matrice obtenue par les transformations $L_1 \longleftrightarrow L_i$ et $C_1 \longleftrightarrow C_j$ est une bijection de $\mathscr{H}_n'$ vers $\mathscr{H}_n$ (la réciproque consiste à faire les mêmes opérations), ce qui confirme qu'il y a autant de 1 en une position (i,j) quelconque dans les matrices de $\mathscr{U}_n$ que de 1 en position $(1,1)$, soit h_n.

B. Étude du cardinal de $\mathscr{U}_n$

4. On a alors d'une part

$$\sum_{A \in \mathscr{U}_n} AX_0 = \sum_{A \in \mathscr{U}_n} 2X_0 = 2u_n X_0$$

   et d'autre part

$$\sum_{A \in \mathscr{U}_n} AX_0 = \left(\sum_{A \in \mathscr{U}_n} A\right) X_0 = h_n J X_0 = n h_n X_0.$$

   Comme $X_0 \neq 0$, on tire $\boxed{n h_n = 2u_n.}$

---

5. Comme dans la question 3., les matrices de $\mathscr{H}_n$ ont un 1 en position $(1,1)$ et deux autres 1 en positions $(1,j)$ et $(i,1)$ avec $i,j \in [\![2,n]\!]$. Quitte à considérer la bijection qui effectue $L_2 \longleftrightarrow L_i$ et $C_2 \longleftrightarrow C_j$, on obtient que le nombre de telles matrices à (i,j) fixé est aussi k_n.

   Finalement, tous ces $(n-1)^2$ cas étant disjoints, $\boxed{h_n = k_n \times (n-1)^2.}$

---

6. Soit $n \geqslant 4$.

   Notons $\mathscr{K}_n^1$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{K}_n$ avec un 1 en position $(2,2)$. Une telle matrice A s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ où $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' \in \mathscr{U}_{n-2}$: elles sont donc au nombre de $\left|\mathscr{K}_n^1\right| = u_{n-2}$.

Notons $\mathcal{K}_n^2$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{K}_n$ un 0 en position $(2,2)$. Une telle matrice s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ & & & A' & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$ où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ possède un 0 en position $(1,1)$, un 1 sur la première ligne et un 1 sur la première colonne, et exactement deux 1 dans chacune des autres lignes et colonnes. En modifiant le cœfficient en position $(1,1)$ en 1, on décrit exactement les matrices de $\mathcal{H}_{n-1}$. De telles matrices A sont donc au nombre de $\left|\mathcal{K}_n^2\right| = h_{n-1}$.

Les cas étant disjoints, $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n^1 \sqcup \mathcal{K}_n^2$, on tire $\boxed{k_n = u_{n-2} + h_{n-1}.}$

---

7. Soit $n \geqslant 4$. D'après les questions précédentes,
   - $h_{n-1} = \dfrac{2u_{n-1}}{n-1}$ (question 4)
   - $k_n = \dfrac{h_n}{(n-1)^2} = \dfrac{2u_n}{n(n-1)^2}$ (questions 4 et 5)
   - $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ (question 6)

   Ainsi, $\boxed{\dfrac{2u_n}{n(n-1)^2} = \dfrac{2u_{n-1}}{n-1} + u_{n-2}.}$ Puis, en divisant par $(n-2)!^2$, $\boxed{2n w_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2}.}$

   Comme $w_0 = 1$, $w_1 = 0$, $w_2 = \dfrac{1}{4}$, $w_3 = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$, on vérifie qu'on a bien aussi $6w_3 = 4w_2 + w_1$ et $4w_2 = 2w_1 + w_0$ de telle sorte que la relation est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

---

8. On a déjà $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ w_n \geqslant 0.}$

   On montre par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $w_n \leqslant 1$ ».
   On a déjà $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in [\![0,3]\!]$ (il faut au moins deux initialisations).
   Soit $n \geqslant 4$ tel que $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies.
   Alors $2n w_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2} \leqslant 2(n-1) + 1 \leqslant 2n$ donc $w_n \leqslant 1$ ce qui établit la récurrence.

   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0\ ,\ w_n \in [0,1].}$

   La relation de récurrence de la question précédente donne pour $n \geqslant 2$, $w_{n-2} = 2n w_n - 2(n-1)w_{n-1}$ qui est un terme général de série télescopique. Donc, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_{k-2} = 2n w_n - 0.$

   Ainsi $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_{k-2}\right)_{n \geqslant 2} = (2n w_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante donc a une limite finie ou $+\infty$. Si cette limite est finie et vaut ℓ, elle est strictement positive car $4w_2 = 1 > 0$ et $w_n \sim \dfrac{\ell}{2n}$ est un terme général de série divergente ce qui est contradictoire (même si c'est le résultat recherché !).

   Cette limite est donc $+\infty$ et donc $\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$

   Autre argument possible : comme cette suite $(2n w_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante, pour $n \geqslant 2$, $2n w_n \geqslant 4w_2 = 1$ donc $w_n \geqslant \dfrac{1}{2n}$ et on conclut en comparant à la série harmonique (divergente).
   Comme $\sum w_n$ diverge alors que $(w_n)_n$ est bornée,

   $$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum w_n x^n \text{ est égal à } 1.}$$

---

9. Soit $x \in]-1,1[$. On utilise la relation de récurrence de la question 7 :

$$2\sum_{n=2}^{+\infty} n w_n x^n = 2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)w_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2}x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+2}$$

donc, avec $w_1 = 0$,

$$2(1-x)x\sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n-1} - 2w_1 x = x^2 W(x)$$

et comme on peut dériver terme à terme W sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\quad 2(1-x)W'(x) - xW(x) = 0.}$$

encore valable pour $x = 0$ par continuité (W est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme somme de série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.)

Il s'agit d'une EDL d'ordre 1 avec $x \mapsto 2(1-x)$ et $x \mapsto -x$ continues sur $]-1,1[$, la première ne s'annulant pas.

On calcule $\displaystyle\int \frac{x}{2(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln|1-x| - x}{2} + C.$

On a donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que $W : x \mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{\ln|1-x|-x}{2}} = A\dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$.

Comme $W(0) = w_0 = 1$, on tire $A = 1$ et $\boxed{W : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}.}$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

10. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins, $\mathbb{R}$ si $\beta \in \mathbb{Z}^-$), par produit (de Cauchy), $\boxed{\phi \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[}$ (au moins).

---

11. Soit $x \in]-1,1[$. $(1-x)^{-\beta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\beta(-\beta-1)\dots(-\beta-n+1)}{n!}(-x)^n$ avec

$$a_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}$$

donc $\boxed{a_n = \dfrac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}}$ en remarquant d'abord que $\Gamma(\beta) > 0$ par positivité améliorée car $t \mapsto t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive, non contamment nulle sur $]0,+\infty[$ et que

$$\Gamma(n+\beta) = (n+\beta-1)\Gamma(n+\beta-1) = \cdots = (n+\beta)(n+\beta-1)\cdots\beta\cdot\Gamma(\beta)$$

en appliquant par récurrence la propriété $\Gamma(\beta+k) = (\beta+k-1)\Gamma(\beta+k-1)$.

---

12. On obtient par produit de Cauchy

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}a_k = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}\Gamma(k+\beta)}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\Gamma(k+\beta)$$
$$= \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}u^k\right)u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}(\alpha+u)^n u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

donc $\boxed{\phi_n = \dfrac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)}}$ (le calcul donne la bonne définition de ψ_n).

---

13. Comme proposé par l'énoncé, on étudie, pour $n \geqslant 1$ fixé, les variations de $f : u \mapsto e^{-u}(\alpha+u)^n$ qui est bien dérivable sur $[-\alpha, +\infty[$.
On a $f' : u \mapsto e^{-u}\left(n(\alpha+u)^{n-1} - (\alpha+u)^n\right) = e^{-u}(n-\alpha-u)(\alpha+u)^{n-1}$.
D'où le tableau de variation

x	$-\alpha$		$n-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\alpha-n}n^n$	$\searrow$	0

La suite est assez technique.
Comme a est fixé, on a un rang N à partir duquel $n-\alpha > a$.
Posons $n \geqslant N$. On a, vu les variations ci-dessus et par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^a u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du \leqslant \int_0^a u^{\beta-1} e^{-a}(\alpha+a)^n \, du = \frac{e^{-a}(\alpha+a)^n a^\beta}{\beta}.$$

Par ailleurs, toujours avec les variations ci-dessus, la positivité et la croissance de l'intégrale,

$$\int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du \geqslant \int_a^{n-\alpha} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du \geqslant \frac{e^{-a}(\alpha+a)^n}{\beta}\left((n-\alpha)^\beta - a^\beta\right).$$

Ainsi, comme $n-\alpha > a$, $\left|\int_0^a u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\right| \leqslant \underbrace{\frac{a^\beta}{(n-\alpha)^\beta - a^\beta}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du.$

Finalement, $\boxed{\left|\int_0^a u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\right| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\right).}$

---

14. Cette question est très difficile ! La question précédente donne $\psi_n \sim \int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du$.
On cherche à montrer qu'on peut trouver $a > |\alpha|$ tel que

$$\int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du \sim \int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1} \, du.$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1} \, du - \int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\right| &= \left|\int_a^{+\infty} \left((\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}\right) e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\right| \\ &\leqslant \int_a^{+\infty} \left|(\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}\right| e^{-u}(\alpha+u)^n \, du\end{aligned}$$

Soit $f : t \mapsto t^{\beta-1}$ et $u \geqslant a$. f est continue sur $[u, u+\alpha]$ et dérivable sur $]u, u+\alpha[$, donc par théorème des accroissements finis, on a $c_u \in]u, u+\alpha[$ tel que $(\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1} = \alpha f'(c_u) = \alpha(\beta-1)c_u^{\beta-2}$.
Or

$$\begin{aligned}0 \leqslant c_u^{\beta-2} &\leqslant \max_{t\in[u,u+\alpha]} t^{\beta-2} = \max\left(u^{\beta-2}, (u+\alpha)^{\beta-2}\right) = (\alpha+u)^{\beta-2}\max\left(\left(\frac{u}{u+\alpha}\right)^{\beta-2}, 1\right) \\ &\leqslant (\alpha+u)^{\beta-2}\max\left(\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+u}\right)^{\beta-2}, 1\right) \\ &\leqslant u^{\beta-2}\max\left(1, \left(1-\frac{\alpha}{a+\alpha}\right)^{\beta-2}\right) \quad \text{(valable pour } \beta > 0 \text{ quelconque).}\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $C=|\alpha|\left|\beta-1\right|\max\left(1,\left(\dfrac{a}{a+\alpha}\right)^{\beta-2}\right)$,

$$\int_a^{+\infty}\left|(\alpha+u)^{\beta-1}-u^{\beta-1}\right|\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\ \mathrm{d}u\leqslant C\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,\mathrm{d}u.$$

En intégrant par partie sur un segment $[a,A]$ puis en faisant $A\to+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,\mathrm{d}u&=-\frac{\mathrm{e}^{-a}(\alpha+a)^{n+\beta-1}}{n+\beta-1}+\frac{1}{n+\beta-1}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u\\&\leqslant\underbrace{\frac{1}{n+\beta-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

l'inégalité étant valable au moins à partir d'un certain rang.
On obtient alors $\displaystyle\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\ \mathrm{d}u-\int_a^{+\infty}u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\ \mathrm{d}u=\mathrm{o}\left(\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u\right)$ ce qui permet bien de conclure avec la question précédente que $\boxed{\displaystyle\psi_n\sim\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\ \mathrm{d}u.}$

---

15. Question plutôt difficile également.
À l'aide du changement de variable $t=\alpha+u$ (licite car affine, donc $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $]a,+\infty[$ sur $]a+\alpha,+\infty[$), avec la question précédente, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\psi_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{\alpha}\int_{a+\alpha}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\alpha}\left(\Gamma(n+\beta)-\int_0^{a+\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t\right).$$

Reste à voir que $\displaystyle\int_0^{a+\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t=\mathrm{o}\big(\Gamma(n+\beta)\big)$.
Soit $n\geqslant1$. On a alors $n+\beta-1>0$ et on remarque que pour tout $t\in]0,a+\alpha[$, $0\leqslant\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\leqslant(a+\alpha)^{n+\beta-1}$, donc, par croissance de l'intégrale, avec $0<a+\alpha$,

$$0\leqslant\int_0^{a+\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t\leqslant(a+\alpha)^{n+\beta}.$$

Mais $\Gamma(n+\beta)=(n-1+\beta)(n-2+\beta)\cdots\beta\cdot\Gamma(\beta)\geqslant(n-1)(n-2)\cdots1\cdot\beta\cdot\Gamma(\beta)=(n-1)!\beta\cdot\Gamma(\beta)$.
donc $(a+\alpha)^{n+\beta}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(\Gamma(n+\beta)\big)$ par croissances comparées, puis, par encadrement,

$$\int_0^{a+\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(\Gamma(n+\beta)\big).$$

Finalement, $\boxed{\psi_n\sim\mathrm{e}^{\alpha}\Gamma(n+\beta).}$

---

16. Avec les questions 12 et 15, appliqué au cas de $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ et $\beta=\dfrac{1}{2}$, vu la question 9 et par unicité des cœfficients du développement en série entière,

$$\frac{u_n}{(n!)^2}=w_n=\phi_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-1/2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

On obtient, comme en 11, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\dfrac{1}{2}\right)=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n(2n)(2n-2)\cdots2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

On a alors, avec la formule de Stirling,

$$u_n \sim \frac{(2n)!}{\sqrt{e}2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{e}2^{2n}}$$

donc $\boxed{u_n \sim 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.}$

Fin