

Exercice

1. $f : t \mapsto \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue par opérations sur $]0, +\infty[$.

Comme $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction de Riemann avec $2 > 1$, f l'est aussi par comparaison.

Comme $f(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$, f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0, 1[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs, comme $e^{-t} \in]-1, 1[$, on peut écrire, pour $t > 0$, $f(t) = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$.

Comme $f_n : t \mapsto te^{-nt}$ est à valeurs positives et $\sum f_n$ converge simplement (vers f), on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme version fonctions positives : quitte à travailler dans $[0, +\infty[$ (mais l'intégrabilité ci-dessus permet d'affirmer que tout est bien fini),

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt$$

Calculons, par intégration par parties, avec $A > 0$,

$$\int_0^A te^{-nt} dt = \left[-\frac{te^{-nt}}{n} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A e^{-nt} dt = -\frac{Ae^{-nA}}{n} + \frac{1-e^{-nA}}{n^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$$

Finalement, $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque : si cela n'avait pas été demandé explicitement par le sujet, on aurait pu éviter la preuve d'intégrabilité de f au départ : le théorème d'intégration terme à terme s'applique dans $[0, +\infty[$ et comme le calcul conduit à une série convergente, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est finie et donc, comme f est positive, qu'elle est intégrable.

Problème : Séries de Lambert

A. Propriétés

2. Avec $x \in]-1, 1[$, $x^n \rightarrow 0$ donc $1 - x^n \rightarrow 1$ et $1 - x^n \sim 1$. On a donc pour $x \neq 0$, $\left| a_n \frac{x^n}{1-x^n} \right| \sim |a_n| |x|^n$ qui est un terme général de série convergente car la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ a un rayon de 1, donc par comparaison de séries

à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$. (Il s'agit de la série nulle pour $x = 0$).

En prenant $a_n = \frac{1}{n^2}$, la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est de même rayon de convergence que $\sum x^n$ soit 1 et pour $x = 2$,

$\left| a_n \frac{2^n}{1-2^n} \right| \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série de Lambert converge (absolument) pour $x = 2$ par comparaison de séries à termes positifs.

3. Soit $0 < b < 1$. Pour tout $x \in [-b, b] \subset]-1, 1[$, $\left| a_n \frac{x^n}{1-x^n} \right| = |a_n| \frac{x^n}{1-x^n} \leq |a_n| \frac{b^n}{1-b^n} = \left| a_n \frac{b^n}{1-b^n} \right|$ qui ne dépend pas de x et est un terme général de série convergente d'après la question précédente.

Donc $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.

4. On applique le théorème de continuité des séries de fonctions.

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $] -1, 1[$ par opérations.

H2 $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de $] -1, 1[$ d'après la question précédente.

Donc f est continue sur $] -1, 1[$.

On applique ensuite le théorème de classe \mathcal{C}^1 des séries de fonctions (qui redonne la continuité).

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ par opérations.

$$\text{Comme } f_n : x \mapsto a_n \left(\frac{1}{1-x^n} - 1 \right), f'_n : x \mapsto \frac{na_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

H2 $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$ (et même localement uniformément comme vu ci-dessus).

H3 $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-b, b] \subset] -1, 1[$ avec $0 < b < 1$ car si $x \in [-b, b]$,

$|f'_n(x)| = f'_n(x) \leq \frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ qui ne dépend pas de x et qui est équivalent à $n|a_n|b^{n-1} = \frac{1}{b} |na_n b^n|$, terme général de série convergente car la série entière $\sum na_n x^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$, soit 1 et $b \in] -1, 1[$. Finalement, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge, d'où le résultat.

Ainsi, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$, de dérivée $f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ et en particulier, $f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n 0^{n-1}}{(1-0^n)^2} = a_1$.

5. Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels. Comme les $I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont des parties deux à deux disjointes de $A = (\mathbb{N}^*)^2$ qui le recouvrent (tout couple $(k,p) \in A$ est dans I_{kp} et seulement dans celui-là), on peut utiliser le théorème de sommation par paquets qui nous dit d'une part que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right)$ existe et d'autre part qu'elle vaut $\sum_{(n,p) \in A} u_{n,p}$.

Mais le théorème de Fubini (qui est aussi un théorème de sommation par paquets) nous dit, connaissant déjà la sommabilité, que cette même somme est aussi égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right)$, qui converge bien.

On peut donc bien écrire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right)$.

Soit $x \in] -1, 1[$.

Pour démontrer la sommabilité de la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$, on utilise le théorème de Fubini : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 1} |a_n| |x^n|^p$ converge car $|x^n| \in] -1, 1[$ (elle est géométrique), vers

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n| |x^n|^p = |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} = \left| a_n \frac{x^n}{1-x^n} \right|$$

qui est un terme général de série convergente car $x \in] -1, 1[$ et d'après 1.

On a donc bien $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ sommable. Avec un calcul similaire (et licite), on obtient aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

On peut alors appliquer l'identité précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k \right) x^n$$

Or, si $n \geq 1$, $\sum_{(k,p) \in I_n} a_k = b_n = \sum_{d|n} a_d$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

B. Exemples

6. On est bien dans les hypothèses de la partie A : $\sum_{n \geq 1} x^n$ a un rayon de convergence de 1.

D'après la question précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$, on peut écrire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ avec pour tout

$n \geq 1$, $d_n = \sum_{d|n} 1$ qui est bien le nombre de diviseurs de n .

7. Soit $n \geq 1$. $\varphi(n)$ désigne d'après l'énoncé le nombre de nombres entre 0 et n premiers avec n . On a alors $1 \leq \varphi(n) \leq n+1 \sim n$. Les séries entières $\sum_{n \geq 1} x^n$, $\sum_{n \geq 1} (n+1)x^n$ et $\sum_{n \geq 1} nx^n$ ont même rayon de convergence, qui vaut 1, donc par propriété

du cours $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)x^n$ a aussi un rayon de convergence de 1.

Les diviseurs (positifs) de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.

On calcule $\varphi(1) = 2$ (pour 0 et 1), $\varphi(2) = 1$ (pour 1), $\varphi(3) = 2$ (pour 1 et 2), $\varphi(4) = 2$ (pour 1 et 3), $\varphi(6) = 2$ (pour 1, 5), $\varphi(12) = 4$ (pour 1, 5, 7, 11).

Donc $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) = \dots 13$ et non 12.

Il y a une erreur d'énoncé (présente dans le sujet original) car il faut prendre des entiers premiers avec n non nuls, mais seul le calcul de $\varphi(1)$ est impacté. On obtient alors $\varphi(1) = 1$ et la formule devient correcte. On pourrait aussi interpréter « inférieur à n » comme strictement inférieur contrairement à l'usage en langue française, mais diviseur, lui, est bien pris au sens large... Notons qu'avec la formule admise, cette erreur d'énoncé a peu d'impact sur la suite (de la question, et l'impact est nul sur le reste du problème).

Notons que la formule admise peut se démontrer en une ligne avec l'argument élégant : les n nombres rationnels $\frac{m}{n}$ pour $1 \leq m \leq n$ s'écrivent de manière unique sous forme irréductible $\frac{\ell}{d}$ avec $1 \leq \ell \leq d$, $\ell \wedge d = 1$ et d diviseur de n , et il y a exactement $\varphi(d)$ fractions irréductibles pour chaque diviseur d de n .

On peut de nouveau utiliser la question 4 de la partie A et la formule admise : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

en reconnaissant la dérivée de la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ce qui est licite car on travaille dans son disque ouvert de convergence.

8. D'après le cours, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Pour prendre la limite en 1 de la série de fonction, on a besoin d'une convergence uniforme au voisinage de 1.

Or, si $x \in [0, 1]$, le théorème spécial sur les séries alternées s'applique : $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

On peut donc majorer le reste, pour $n \geq 1$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ qui ne dépend pas de x et tend vers 0.

Donc la série entière converge uniformément sur $[0, 1]$, et par théorème de la double limite et par continuité de \ln en 2 (et aussi par unicité de la limite), on obtient $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ (qui a bien le signe de son premier terme).

Notons que le théorème d'Abel radial, désormais au programme, permet de conclure sans avoir recours au théorème de la double limite.

9. Si $x \in]-1, 1[$ et $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$.

Pour appliquer le théorème de la double limite, on a de nouveau besoin de convergence uniforme au voisinage de 0.

Or si $x \in [-b, b] \subset]-1, 1[$, $\left| (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} \right| = \frac{|x|^{n-1}}{1-x^n} \leq \frac{b^{n-1}}{1-b^n}$ qui est indépendant de x et terme général de série convergente car équivalent à b^{n-1} avec $b \in [0, 1[$, donc on a convergence normale donc uniforme sur $[-b, b]$ et par

théorème de la double limite, $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{n-1}}{1-0^n} = -1$. Ainsi, $f(x) \sim -x$ au voisinage de 0.

Comme $f(0) = 0$, cette limite est aussi la valeur de $f'(0) = -1 = a_1$ ce qui est cohérent avec A.4 (qui s'applique bien car la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^n x^n$ est de rayon 1.)

10. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $f(x)(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$.

Sous-réserve de pouvoir appliquer le théorème de la double limite, on obtiendrait $f(x)(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, ce qui permet de conclure avec 8.

Il suffit donc d'avoir convergence uniforme au voisinage de 1. On vérifie que le théorème spécial s'applique de nouveau pour $x \in]0, 1[$.

si $n \geq 1$, $\frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = (1-x) \left(\frac{1}{1-x^n} - 1 \right)$ tend vers 0 est décroissant.

Donc pour tout $n \geq 1$, $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^n x^k} \leq \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^n x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0 uniformément en x , donc par

convergence uniforme le théorème de la double limite s'applique et permet de conclure $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$.