

# E3a mp 1 2019: corrigé

## Exercice 1:

**Q1:** On a  $u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$  donc  $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$  terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de  $\alpha$  donc  $\sum |u_n(x)|$  converge. On en déduit que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

**Q2:** D'après ce qui précède,  $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$  et  $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$  converge donc la série de fonction  $\sum u_n$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Q3:** Posons  $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$ . On a  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp(\alpha e^{ix})$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\operatorname{Re}(v_n(x)) = u_n(x)$  donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \operatorname{Re}(\exp(\alpha e^{ix}))$ . Or  $\exp(\alpha e^{ix}) = \exp(\alpha \cos(x) + i\alpha \sin(x)) = e^{\alpha \cos(x)} e^{i\alpha \sin(x)}$  donc  $C(x) = e^{\alpha \cos(x)} \cos(\alpha \sin(x))$ .

**Q4.1:** On a  $J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) dx$  et  $x \mapsto \sin(nx) C(x)$  est impaire car  $C$  est paire donc  $J_n = 0$ . On a  $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(nx) u_k(x) dx$ . On pose  $w_k(x) = \cos(nx) u_k(x)$ . On a  $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$  donc la série de fonctions  $\sum w_k$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}$  et les fonctions  $w_k$  sont continues. On en déduit que  $I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) dx$ . Or,  $w_k(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx) \cos(kx)}{k!} = \frac{\alpha^n}{2k!} (\cos(k+n)(x) + \cos(k-n)(x))$  donc  $\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) dx = 0$  si  $k \neq n$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x) dx = \frac{\alpha^n}{2n!} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{\alpha^n \pi}{n!}$  donc  $I_n = \frac{\alpha^n \pi}{n!}$ .

**Q4.2:** On a  $J_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  (car  $\sum \frac{\alpha^n \pi}{n!}$  converge).

**Q5:** On a  $\cos^2(nx) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$  donc  $\frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \frac{\alpha^n}{2n!} + \frac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!}$ . Or  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{2n!} = \frac{e^\alpha}{2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!} = C(2x)$  donc la série  $\sum \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$  converge et  $S(x) = \frac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha \cos(2x)} \cos(\alpha \sin(2x))$ .

## Exercice 2:

**Q1.1:** Soit  $A \in E_2$ . On a  $u(A) = B$  avec  $B_1 = A_2$  et  $B_2 = A_1$ . Soit  $A' \in E_2$  et  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $A'' = \lambda A + \lambda' A'$ ,  $u(A') = B'$  et  $u(A'') = B''$ . On a  $B'' = (\lambda A + \lambda' A')_2 = \lambda A_2 + \lambda' A'_2 = \lambda B_1 + \lambda' B'_1$  et, de même,  $B'' = \lambda B_2 + \lambda' B'_2$  donc  $B'' = \lambda B + \lambda' B'$  donc  $u$  est linéaire donc endomorphisme de  $E_2$ .

**Q1.2:** On a  $u(K_1) = K_3$ ,  $u(K_2) = K_4$ ,  $u(K_3) = K_1$  et  $u(K_4) = K_2$  donc  $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Q1.3:** On remarque que  $u^2(K_i) = K_i$  donc  $u^2 = id_{E_2}$  et  $u$  est une symétrie. De plus,  $u(K_1 + K_3) = K_1 + K_3$  et  $u(K_2 + K_4) = K_2 + K_4$  donc  $\operatorname{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4) \subset \ker(u - id_{E_2})$  et  $u(K_1 - K_3) = -(K_1 - K_3)$  et  $u(K_2 - K_4) = -(K_2 - K_4)$  donc  $\operatorname{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4) \subset \ker(u + id_{E_2})$ . Or  $E_2 = \ker(u - id_{E_2}) \oplus \ker(u + id_{E_2})$  et ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension au moins 2 et la somme de leurs dimensions vaut 4 donc ils sont de dimension 2 donc  $\ker(u - id_{E_2}) = \operatorname{vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$  et  $\ker(u + id_{E_2}) = \operatorname{vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$ .

**Q2:** Si  $n = 2$ ,  $\det(u(A)) = -\det(A)$  (intersion des colonnes). Si  $n = 3$ ,  $\det(u(A)) = |B_1, B_2, B_3| = |B_1 + B_2 + B_3, B_2, B_3|$ . Or  $B_1 + B_2 + B_3 = 2(A_1 + A_2 + A_3)$  donc  $\det(u(A)) = 2 \times |A_1 + A_2 + A_3, B_2, B_3| = 2 \times |A_1 + A_2 + A_3, -A_2, -A_3|$  ( $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$  et  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ) donc  $\det(u(A)) = 2 \det(A)$ .

**Q3:** On a  $\det(u(A)) = |B_1, B_2, \dots, B_n| = |B_1 + \dots + B_n, B_2, \dots, B_n|$  et  $B_1 + \dots + B_n = (n-1)(A_1 + \dots + A_n)$  donc  $\det(u(A)) = (n-1)|A_1 + \dots + A_n, B_2, \dots, B_n| = (n-1)|A_1 + \dots + A_n, -A_2, \dots, -A_n|$  ( $C_j \leftarrow C_j - C_1$  pour  $2 \leq j \leq n$ ) donc  $\det(u(A)) = (n-1)(-1)^{n-1} \det(A)$ .

**Q4.1:** Soit  $C_j = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} B_k$ , la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $u(u(A))$ . On a  $C_j = (n-1)A_j + (n-2) \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq j} A_i$  (car  $A_j$  est présent dans tous les  $B_k$  tandis que si  $i \neq j$ ,  $A_i$  est présent dans tous les  $B_k$  sauf  $B_i$  donc  $C_j = (n-1)A_j + (n-2)B_j$ ). On en déduit que  $u^2(A) = (n-1)u(A) + (n-2)A$ . Cette relation étant vraie pour toute  $A$ , on a  $u^2 - (n-2)u - (n-1)id_E = 0$  donc  $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

**Q4.2:** On a  $P = (X+1)(X-(n-1))$  donc  $P$  admet deux racines distinctes. Le polynôme  $P$  est scindé à racines simples donc  $u$  est diagonalisable et  $sp(u) \subset \{-1, n-1\}$ . Le sous-espace  $E_{-1}(u)$  est l'ensemble des matrices  $A$  telles que, pour tout  $j$ ,  $\sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k = -A_j$ , c'est-à-dire telles que  $\sum_{k=1}^n A_k = 0$  (il est donc de dimension  $n^2 - n$ : on peut prendre les  $n-1$  premières colonnes quelconques et en déduire la dernière). Si une matrice  $A$  a toutes ses colonnes égales, alors  $\sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k = (n-1)A_j$  donc  $A \in E_{n-1}(u)$ . Or l'ensemble des matrices ayant des colonnes identiques est de dimension  $n$  (on peut prendre la première colonne quelconque et en déduire les autres) donc, comme  $\dim(E_{n-1}(u)) = n^2 - \dim(E_1(u)) = n$ ,  $E_{n-1}(u)$  est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

**Q5.1:** Soit  $C = AU_n$ . On a  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}u_{k,j}$  avec  $u_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq j \\ 0 & \text{si } k = j \end{cases}$  donc  $c_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} a_{i,k}$ . On en déduit que  $C_j = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} A_k$  donc  $AU_n = u(A)$ .

**Q5.2:** On a  $J_n^2 = nJ_n$  donc  $U_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)(J_n - I_n) + (n-1)I_n$  donc  $U_n^2 = (n-2)U_n + (n-1)I_n$ . Soit  $A \in E_2$ . On a  $u^2(A) = u(AU_n) = AU_n^2 = A((n-2)U_n + (n-1)I_n) = (n-2)AU_n + (n-1)A$  donc  $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$ , ce qui permet de retrouver le polynôme annulateur de  $u$ .

### Exercice 3:

**Q1.1:** La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en 0 donc  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q1.2:** Par le changement de variable  $u = x-t$ ,  $h(x) = \int_0^x (t+x)f(x-t)dt = \int_0^x (2x-u)f(u)du = 2x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$  qui est de classe  $C^1$  pour les mêmes raisons que Q1.

**Q2:** D'après la première question, si  $f$  est solution de  $(\mathcal{P})$  alors  $f$  est dérivable. De plus,  $f = 1-h \Leftrightarrow \begin{cases} f' = -h' \\ f(0) = 1-h(0) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\left(2 \int_0^x f(u)du + 2xf(x) - xf(x)\right) & \text{donc} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$f \text{ est solution de } (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2 \int_0^x f(u)du + xf(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

**Q3:** Comme  $F' = f$ , on a  $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, F''(x) + xF'(x) + 2F(x) = 0 : (\mathcal{E}) \\ F'(0) = 1 \end{cases}$ .

**Q4.1:** Comme  $H$  est supposée développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ , elle est de classe  $C^\infty$  et on peut dériver terme à

$$\text{terme } H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1(\rightarrow 0)}^{+\infty} na_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n)$$

On en déduit (unicité du DSE) que  $H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$ . Les conditions  $H'(0) = 1$  et  $H(0) = 0$  équivalent à  $(a_0, a_1) = (0, 1)$ .

**Q4.2:**  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$  et  $a_0 = 0$  entraînent que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2p} = 0$ .

On a  $a_{2p+1} = \frac{-1}{2p} a_{2p-1} = \frac{-1}{2p} \frac{-1}{2p-2} a_{2p-3} = \frac{(-1)^p}{2p(2p-2) \times \dots \times 2} a_1 = \frac{(-1)^p}{2^p p!}$ . On en déduit que  $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ . On peut noter que les équivalences dans Q4.1 permettent de dire, puisque le rayon de convergence de la série entière est  $+\infty$ , que  $H$  est bien solution de  $(\mathcal{E})$  ou vérifier que  $H$  est bien solution de  $(\mathcal{E})$  par le calcul.

**Q5:** On a de plus  $F(0) = 0$  donc  $f$  est solution de  $(\mathcal{P})$  si et seulement si  $F$  est solution de  $(\mathcal{E})$  et  $(F(0), F'(0)) = (0, 1)$  et le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une telle solution donc  $f$  est solution de  $(\mathcal{P})$  si et seulement si  $F = H$  c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = H'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$ .

## Exercice 4:

**Question de cours:** Dans un espace euclidien  $E$ , si  $F$  est un sous-espace vectoriel, alors  $F \oplus F^\perp = E$  donc  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ .

**Q1:** Soit  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $E$ . On a  $u(\lambda P + \mu Q)(x) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P + \mu Q)(t) dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt + \mu \int_0^1 (x+t)^n Q(t) dt = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x)$  et cette égalité est vraie pour tout  $x$  donc  $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$  donc  $u$  est linéaire. De plus, si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , alors  $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i P(t) t^{n-i} dt = \sum_{i=0}^n \left( \binom{n}{i} \int_0^1 P(t) t^{n-i} dt \right) x^i$  donc  $u(P) \in E$ . De plus, si  $u(P) = 0$ , alors  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\int_0^1 P(t) t^{n-i} dt = 0 = (P|X^{n-i})$  donc  $P \in \text{vect}(1, X, \dots, X^n)^\perp = E^\perp = \{0\}$  donc  $\ker(u) = \{0\}$  et  $u \in \mathcal{GL}(E)$  (endomorphisme de dimension finie).

**Q2.1:** On a  $u(X^p) = \sum_{i=0}^n \left( \binom{n}{i} \int_0^1 t^{p+n-i} dt \right) X^i = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} X^i : (\mathcal{R})$  donc  $(u(X^p)|X^q) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} (X^i|X^q) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{(p+n-i+1)(q+i+1)}$ .

**Q2.2:** D'après la question précédente,  $(u(X^q)|X^p) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{(q+n-i+1)(p+i+1)} \stackrel{j=n-i}{=} \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{n-j}}{(q+j+1)(p+n-j+1)} = (u(X^p)|X^q)$  car  $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ . Soit  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(P, Q) = (u(P)|Q) - (u(Q)|P)$  est bilinéaire et  $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $\phi(X^i, X^j) = 0$  donc  $\phi = 0$  et donc  $u$  est un endomorphisme symétrique.

**Q3:** Soit  $y \in \mathbb{R}$ . On pose  $Q_y = (X+y)^n$ . On pose  $Q_y = \sum_{j=0}^n (Q_y|P_j) P_j$ . Or  $(Q_y|P_j) = \int_0^{+\infty} (t+y)^n P(t) dt = u(P_j)(y) = \lambda_j P_j(y)$  donc  $Q_y = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j$  donc  $Q_y(x) = (x+y)^n = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j(x)$ .

**Q4:** D'après  $(\mathcal{R})$ , les coefficients diagonaux de la matrice de  $u$  dans la base canonique sont  $\frac{\binom{n}{p}}{n+1}$ ,  $0 \leq p \leq n$  donc

$$\text{tr}(u) = \sum_{p=0}^n \frac{\binom{n}{p}}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}.$$

**Q5.1:** On a  $u(Q_y)(y) = \int_0^1 (y+t)^n Q_y(t) dt = \int_0^1 (y+t)^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \left[ (y+t)^{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \left( (y+1)^{2n+1} - y^{2n+1} \right)$ .

**Q5.2:** On a  $\int_0^1 u(Q_y)(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2n+1} \left( (y+1)^{2n+1} - y^{2n+1} \right) dy = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \left[ (y+1)^{2n+2} - y^{2n+2} \right]_0^1 = \frac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}$ . Par ailleurs  $u(Q_y) = u\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j\right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 P_j(y) P_j$  donc

$$\int_0^1 u(Q_y)(y) dy = \int_0^1 \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 P_j(y) P_j(y) dy = \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 \int_0^1 P_j(y) P_j(y) dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ car } \|P_j\| = 1. \text{ Or } \text{tr}(u^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ (se placer dans une base de vecteurs propres) donc } \text{tr}(u^2) = \frac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}.$$