

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

 Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Fonctions de matrices

Notations :

- Les \mathbb{K} -algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :
 - L'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées réelles d'ordre n .
 - Si I est un intervalle de \mathbb{R} , d'intérieur non vide, on note C_I^∞ l'algèbre commutative des fonctions de classe C^∞ de I dans \mathbb{K} .
 - L'algèbre des fonctions polynomiales de I dans \mathbb{K} est usuellement identifiée à l'algèbre $\mathbb{K}[X]$.
- On y rencontre aussi les \mathbb{K} -espaces vectoriels suivants :
 - L'espace des colonnes réelles à n lignes noté $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
 - L'espace $\mathcal{N}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg P \leq N\}$, où $N \in \mathbb{N}$.
- Les notions de convergence dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})$ sont relatives aux normes respectives :
 - $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, si $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$.
 - $\|M\| = n \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n}} |m_{ij}|$, si $M = [m_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Objectifs du problème

Tournez la page S.V.P.

Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$, on sait donner un sens à la matrice $P(A)$ et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur A qui en résulte. En particulier, si M est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on appelle **POLYNÔME MINIMAL** de M le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P(M) = 0$; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme u de \mathbf{R}^n dont M est la matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^n .

Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice $f(A)$ POUR TOUTE FONCTION f DE CLASSE C^∞ , et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice A . Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur A .

Dans un second temps, on exploite ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

Notations fixées pour tout le problème :

- On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et l'on suppose que son polynôme minimal Π_A peut être écrit sous la forme : $\Pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec : $r \geq 1$; les λ_j sont des RÉELS distincts ; les m_j sont dans \mathbb{N}^* . On note alors $m = \sum_{1 \leq j \leq r} m_j$ le degré de Π_A .
- On considère aussi un intervalle I de \mathbb{R} , d'intérieur non vide et contenant tous les λ_j .

La matrice A et l'intervalle I sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

Préliminaires :

1. Établir que pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et M dans $M_n(\mathbb{C})$, on a : $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$.
2. Soit \mathcal{M} un sous-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$ de $M_n(\mathbb{C})$, et soit $\beta = (B_1, \dots, B_d)$ une base de \mathcal{M} .
 - a) Montrer que l'on définit une norme \mathcal{N} sur \mathcal{M} en posant $\mathcal{N}(M) = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$, si $M = \sum_{1 \leq k \leq d} x_k B_k$ est la décomposition de l'élément M de \mathcal{M} sur la base β .
 - b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives a et b vérifiant : $\forall M \in \mathcal{M}, a\|M\| \leq \mathcal{N}(M) \leq b\|M\|$.
 - c) Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{M} ; on note $M_p = \sum_{1 \leq k \leq d} x_p(k) B_k$ la décomposition de M_p sur β . Montrer que la suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ si et seulement si CHAQUE SUITE RÉELLE $(x_p(k))_{p \in \mathbb{N}}$ ($k = 1, \dots, d$) converge vers 0.

I – Une relation d'équivalence sur C_I^∞

On convient de dire que des fonctions f et g de C_I^∞ « coïncident sur le spectre de A » lorsque : $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$. Ce que l'on résume par la notation $f \equiv_A g$.
 Un exemple : si $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$ la notation $f \equiv_A g$ signifie : $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$ et $f(-1) = g(-1)$.

3. Soient ℓ dans \mathbb{N}^* , λ dans I et f dans C_I^∞ vérifiant : $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$.

a) Établir l'identité : $\forall x \in I, f(x) = \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u) du$.

b) En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction h vérifiant :

(1) $\forall x \in I, f(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$

(2) $h \in C_I^\infty$

4. Soient f et g dans C_I^∞ .

a) On suppose : $\exists h \in C_I^\infty, f = g + h \Pi_A$.

En considérant les dérivées successives de $f - g$, établir que $f \equiv_A g$.

b) On suppose $f \equiv_A g$; en exploitant le **3.** justifier l'existence de h dans C_I^∞ vérifiant :

$f = g + h \Pi_A$.

5. Soient P et Q dans $[[X]]$; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $P \equiv_A Q$

(2) $\exists H \in [[X]], P = Q + H \Pi_A$.

II – Définition de la matrice $f(A)$

A. On considère l'application φ de ${}_{m-1}[X]$ vers \mathbb{C}^m qui associe à un polynôme P le m -uplet :

$$\varphi(P) = \left((P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leq k_1 \leq m_1 - 1}, \dots, (P^{(k_r)}(\lambda_r))_{0 \leq k_r \leq m_r - 1} \right).$$

6. Établir le caractère bijectif de φ .

7. Soit f dans C_I^∞ ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme P_f de $[[X]]$, de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ et tel que : $f \equiv_A P_f$. On convient alors de DÉFINIR la matrice $f(A)$ en posant : $f(A) = P_f(A)$.

B. Quelques exemples

8. On suppose ici que f est polynomiale et l'on écrit : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$.

En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question 7, on obtient le résultat naturel : $f(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k$.

9. Ici : $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $I = \mathbb{C}$.

- Calculer $\Pi_A(X)$.
- Calculer la matrice $f(A)$ dans chacun des cas suivants :
 - $f(x) = ax + b$, les réels a et b étant donnés.
 - $f(x) = \sin(\pi x)$
 - $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, où la fonction g est donnée dans C_I^∞ .

III – Le calcul systématique de $f(A)$

A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire φ du II.A, justifier l'existence et l'unicité de polynômes $Q_{j,k}$ ($1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1$) vérifiant :

$$\text{pour TOUTE fonction } f \text{ de } C_I^\infty, \text{ on a : } P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$$

On considère alors les matrices dites « associées » à A :

$$Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \quad (1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1).$$

11. Montrer que les diverses matrices $Z_{j,k}$ sont linéairement indépendantes et que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

B. Deux exemples

12. Ici : $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ et $I = \mathbb{C}_+^*$.

- Justifier l'existence de matrices Z_1 et Z_2 de $M_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2.$$

- EN DÉDUIRE le calcul de Z_1 et Z_2 .

- Calculer les matrices A^{2004}, \sqrt{A} et plus généralement A^α pour α dans \mathbb{C}_+^* .

13. Ici : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ et $I = \mathbb{K}$.

- Présenter sous forme factorisée le polynôme $\Pi_A(X)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{K})$?
- Calculer les matrices $Z_{j,k}$ « associées » à A .

IV – Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g dans C_I^∞ et α dans \mathbb{K} .

- Que valent $P_{\alpha f}$ et P_{f+g} ?
- Justifier l'existence d'un polynôme H de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$.

15. a) Montrer que l'application $S: f \mapsto f(A)$ de C_I^∞ dans $M_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

b) Quel est son noyau ?

16. On considère les fonctions cosinus et sinus de \mathbb{K} dans \mathbb{K} , puis les fonctions $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$ de \mathbb{K}_+^* dans \mathbb{K} . On peut ainsi DÉFINIR les matrices $\cos A$, $\sin A$, et même \sqrt{A} et $\frac{1}{A}$ si les λ_j sont dans \mathbb{K}_+^* .

- En exploitant le morphisme S , calculer $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$.
- On suppose ici que les λ_j sont strictement positifs. Reconnaitre : $(\sqrt{A})^2$ et $\frac{1}{A}$.

B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté $\mathcal{M}_A = \{f(A) / f \in C_I^\infty\}$ est une sous-algèbre COMMUTATIVE de $M_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

18. Montrer que si un élément de \mathcal{M}_A est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ alors son inverse est aussi dans \mathcal{M}_A .

19. Soit f dans C_I^∞ ; établir l'équivalence des énoncés suivants :

- $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

$$(2) \quad \forall j \in \{1, \dots, r\} \quad f(\lambda_j) \neq 0$$

20. Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on note Λ_M l'ensemble de ses valeurs propres RÉELLES.

En exploitant la question **19** comparer les ensembles : Λ_A et $\Lambda_{f(A)}$ où f est donnée dans C_I^∞ .

V – Application à la résolution d'un système différentiel

21. Soient $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de C_I^∞ et f dans C_I^∞ . Établir l'équivalence des énoncés suivants :

(1) La suite de matrices $(f_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $M_n(\mathbb{C})$ vers $f(A)$.

(2) Pour chaque j ($1 \leq j \leq r$) et chaque k ($0 \leq k \leq m_j - 1$), la suite réelle $(f_p^{(k)}(\lambda_j))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$.

Lorsque la condition (2) est réalisée, on convient de dire que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ « converge vers f sur le spectre de A ».

22. Pour t réel, on considère la fonction $f_t : x \mapsto e^{tx}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Montrer que : $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$. Il s'agit donc précisément de la matrice usuellement notée $\exp(tA)$.

23. En exploitant les résultats acquis à ce stade du problème, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Fin de l'énoncé.