Programme de colle – MPI

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MP2I)

Reprise pour exercices.

Endomorphismes des espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée. Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	Notation u^*.
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Groupe orthogonal. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables. Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$. Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.
f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ne pas interroger sur les endomorphismes autoadjoints en début de semaine.

Pas de colle de maths en MPI la semaine prochaine.

Semaine suivante : Probabilités.

Questions de cours

Les questions de cours $(*)$ peuvent seulement être posées à MM. Marinia, Passot (groupe 1), Thomas (groupe 2).

(i) Théorème de représentation de Riesz. Application : si E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $(u(x)|y) = (x|v(y))$ (assurant la bonne définition de l'adjoint).

(ii) Les différentes propriétés de l'adjoint.

(iii) Caractérisations des isométries vectorielles.

(iv) Description de $\mathscr{O}(2)$. Une matrice de rotation plane s'écrit R_θ en base orthonormale directe, θ ne dépendant pas du choix de la base.

(v) $(*)$ Réduction des isométries (avec le lemme : une isométrie possède toujours une droite stable (cas d'une valeur propre réelle) ou un plan stable (cas où il n'y a pas de valeur propre réelle)).

(vi) $(*)$ à partir de mercredi : Théorème spectral.

(vii) **CCINP 63** : Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

(viii) à partir de mercredi : **CCINP 66** :

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

(ix) **CCINP 68** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   a) sans calcul,
   b) en calculant directement le déterminant det$(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   c) en utilisant le rang de la matrice,
   d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

(x) **CCINP 78** : Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $\left(x|y\right)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

(a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   i. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   ii. Démontrer que u est bijectif.

(b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

(c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.