Programme de colle – MPI

Compacité

Reprise pour exercices.

Connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

Topologie matricielle

Rien n'est officiellement au programme, mais les notions suivantes ont été travaillées en TD et peuvent donner lieu à des exercices. Tous ces résultats sont à démontrer pour être utilisés.

- Normes matricielles usuelles, normes subordonnées associées.
- Continuité de $\det$, Com (application : cœfficient de degré 1 de χ_M), $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto \chi_M$.
- Non continuité du rang, de $M \mapsto \pi_M$.
- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, connexe par arcs seulement pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (exemple d'application : théorème de Cayley-Hamilton), absence de densité en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$. Connexité par arcs dans tous les cas.
- $\mathscr{O}(n)$ est compact non connexe par arcs (à partir de la définition, aucune interprétation géométrique pour le moment.)
- Caractère ouvert et/ou fermé de l'ensemble des matrices de rang p fixé.

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MP2I)

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x \cdot y$.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.	Expressions $X^\top Y$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2 = \Vert x\Vert^2 + \Vert y\Vert^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Semaines prochaines : Endomorphismes des espaces préhilbertiens, probabilités.

Questions de cours

(i) Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.

(ii) Relation d'équivalence des chemins continus.
Les convexes et parties étoilées sont connexes par arcs.

(iii) Connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs (application : TVI).

(iv) **CCINP 13**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\Vert\cdot\Vert_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de E par : $\Vert P\Vert_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \ \Vert P\Vert_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\Vert X^n - X^m\Vert_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E? Justifier.

(v) **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $\Vert x\Vert = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(vi) **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

(vii) **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.

   (b) Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

(viii) **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=0 \Longrightarrow h=0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose : $\forall (f,g)\in E^2$, $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(ix) **CCINP 80** : Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f\mid g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f: x\mapsto \cos x$ et $g: x\mapsto\cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u: x\mapsto \sin^2 x$.

(x) **CCINP 81** : On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A,A')=\mathrm{tr}({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

(xi) **CCINP 82** : Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.

On admet que, pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x-y_0\|$.

Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, on pose $(A\mid A')=aa'+bb'+cc'+dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

(xii) **CCINP 92** : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B)\in E^2$, $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^TB)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T=-A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp=S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.