Fonctions vectorielles

I Fonction vectorielles d'une variable réelle

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit I , J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.

Soit $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$, $(G, \|\|_G)$ des K-espaces vectoriels normés **de dimension finie** non réduits au vecteur nul. Lorsqu'il n'est question que d'un espace normé, sa norme est notée $\|\cdot\|$ sans ambiguïté.

Rappel : les normes étant équivalentes en dimension finie, les notions de limite ne dépendent pas de la norme.

1 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

a Définition

Définition 1 : Dérivée

Soit $f : I \to E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point** a si et seulement si $\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **dérivé de f au point** a.

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$.

Alors $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété 1 : DL_1

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_E$. Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire 1 : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Propriété 2 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(a) e_k$ (respectivement $f' = \sum_{k=1}^{n} f_k' e_k$).

b Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 3 : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivables de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Propriété 4 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I, alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée

$$(u \circ f)' = u \circ f'.$$

Propriété 5 : Image par une application multilinéaire

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ dérivables sur I, on note $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.

Alors $B(f,g)$ dérivable sur I et

$$B(f,g)' = B\left(f',g\right) + B\left(f,g'\right).$$

Plus généralement, si $(f_1, \dots, f_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i^I$ est une famille de fonctions dérivables sur I, $M : \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ une application n-linéaire, alors $M(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable sur I et

$$M(f_1, \dots, f_n)' = \sum_{i=1}^{n} M\left(f_1, \dots, f_i', \dots, f_n\right).$$

Corollaire 2 : Dérivée d'un produit de fonction scalaire par une fonction vectorielle

Dérivée d'un produit de fonctions dérivables fg où $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Corollaire 3 : Dérivée d'un produit scalaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien :

$$\left(f|g\right)' = \left(f'|g\right) + \left(f|g'\right).$$

Corollaire 4 : Dérivée du déterminant

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : Soit, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fonction dérivable. Alors l'application déterminant $f : t \mapsto \begin{vmatrix} C_1(t) & \vdots & \dots & \vdots & C_n(t) \end{vmatrix}$ est dérivable sur I et

$$f' = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} C_1 & \vdots & \dots & \vdots & C_j' & \vdots & \dots & \vdots & C_n \end{vmatrix}.$$

Propriété 6 : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi.$$

c Applications de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 2 : Classe d'une fonction vectorielle

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété 7 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)} e_k.$$

Propriété 8 : Linéarité

$\mathscr{C}^n(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

Propriété 9 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}.$$

Propriété 10 : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, $g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right).$$

Corollaire 5 : Dérivées successives d'un produit

Si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété 11 : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

a Fonctions continues pas morceaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 3 : Fonctions continues par morceaux sur un segment

Une application $f : [a, b] \to E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \\ \quad \text{et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable} \\ \quad \text{par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.

On note $\mathscr{C}_m([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Propriété 12 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est continue par morceaux ssi pour tout k, f_k l'est.

Corollaire 6 : Opérations

Si $f, g \in \mathscr{C}_m([a, b], E)$, $\varphi \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ et $\phi \cdot f$ sont continues par morceaux.

Propriété 13 : CPM ⇒ bornée

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition 4 : Fonction CPM sur un intervalle

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur** I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

b Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété 14 : Indépendance du choix de la base

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,dt \right) e_k$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$.

Définition 5 : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,dt \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t)\,dt = 0_E$ et $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$.

Propriété 15 : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ est une application linéaire de $\mathscr{C}_m([a,b], E)$.

Propriété 16 : Relation de Chasles

Si $f \in \mathscr{C}_m(I, E)$ et $a, b, c \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

c Sommes de Riemann

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann $R(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$.

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k, $a_{k+1} - a_k = \dfrac{b-a}{n}$ et pour tout k, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

On obtient alors $S(f, \sigma, \xi) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k = a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, $S(f, \sigma, \xi) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b], E)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

alors $R_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$.

Théorème 2 : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f \in \mathscr{C}_m(I, E)$, $a, b \in I$, $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leqslant \left| \int_a^b \|f(t)\|\,dt \right|$.

(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

d Intégrale et primitive

Définition 6 : Primitive

$g : I \to E$ est une **primitive** de $f : I \to E$ si g dérivable sur I et $g' = f$.

Propriété 17 : Caractérisation des fonctions constantes

$f : I \to E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f' \equiv 0_E$ sur I.

Propriété 18 : Comparaison de primitives

*Soit $f : I \to E$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*

Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.

Théorème 3 : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 7 : Applications du théorème fondamental

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.*

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$.*

(iv) ***Inégalité des accroissements finis** :*
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\|f'\| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Propriété 19 : Fonction intégrale dépendante de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to E$ continue.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \end{array} \right.$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$.

e Intégration par parties

Propriété 20 : Intégration par parties

Si $u \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $v \in \mathscr{C}^1(I,E)$,

$$\forall a,b \in I,\quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

f Changement de variable

Propriété 21 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f \in \mathscr{C}(I,E)$,
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)\cdot f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u.$$

3 Formules de Taylor

Définition 7 : Développement et reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

Théorème 4 : Taylor reste intégrale

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 5 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Ayant défini la négligeabilité, on peut, comme pour les fonctions numériques, calculer des développements limités vectoriels.

Propriété 22 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Théorème 6 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to E$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL$_n$ en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL$_n$ en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

II Séries vectorielles

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$., $(E,\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E.

1 Généralités

Définition 8 : Vocabulaire des séries vectorielles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in E$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Propriété 23 : Série télescopique vectorielle

Soit $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum(v_{n+1}-v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1}-v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Propriété 24 : Espace vectoriel des termes généraux de séries vectorielles convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété 25 : Convergences des séries coordonnées

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge.

Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}\right) e_k.$$

Propriété 26 : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0_E$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

2 Reste d'une série convergente

Définition 9 : Reste d'une série vectorielle convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 27 : Expression du reste

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$ et $\|R_n - S\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3 Convergence absolue

Définition 10 : Absolue convergente d'une série vectorielle

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème 7 : En dimension finie, convergence absolue ⇒ convergence

*Si E est **de dimension finie** et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.*

La réciproque est fausse.

Propriété 28 : Inégalité triangulaire vectorielle

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

4 Sommation des relations comparaison

Si les sommations de relations de comparaison dans le programme officiel n'apparaisse que pour les séries numériques, elles s'étendent aisément au cas vectoriel en remplaçant dans les démonstrations les valeurs absolues par des normes.

Deux remarques :

- La série de référence est toujours à termes réels positifs.
- Rappel : pour les relations de comparaison vectorielles, ils suffit de rajouter des normes de partout...

Théorème 8 : Sommation des relations comparaison dans le cas de divergence

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.*

(ii) *Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(\Sigma_n)$.*

Théorème 9 : Sommation des relations comparaison dans le cas de convergence

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.*

(ii) *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = o(\rho_n)$.*

III SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS VECTORIELLES

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E.

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

1 Suites de fonctions

Définition 11 : Convergence simple

Soit $f : A \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition 12 : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in A,\ \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété 29 : de la convergence uniforme

- *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
- *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A et $N_\infty(f_n - f) = \sup_{x\in A} \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \longrightarrow 0$.*

Théorème 10 : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).*

Alors

C1 *f est continue en x_0 (respectivement sur A).*

Théorème 11 : de la double limite

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in F$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème 12 : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 13 : Convergence uniforme de primitive de fonction vectorielle

Soient $f : I \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(G_n)_n$ converge uniformément vers G sur tout segment de I.*

Théorème 14 : Dérivation d'une suite de fonctions vectorielles

Soient $f : I \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Théorème 15 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^p$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **H2** *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*
- **H3** *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

- **C1** *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*
- **C3** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*

2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F^A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition 13 : Convergences de série de fonctions vectorielles

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de** $a \in \overline{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A \cap B(a, r)$.
- **converge normalement sur** A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum N_\infty(f_n)$ converge, avec $N_\infty(f) = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$.

Théorème 16 : Continuité d'une série de fonctions vectorielles

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $a \in A$. On suppose que

- **H1** *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

- **C1** *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a (respectivement sur A).*

Corollaire 8 : Continuité d'une série entière complexe

La somme d'une série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Théorème 17 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $E = \mathbb{R}$). On suppose que

- **H1** *$\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*
- **H2** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

- **C1** *$\sum b_n$ converge.*
- **C2** *$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.*

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème 18 : Intégration terme à terme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

- **C1** *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.*
- **C2** *$\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 19 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $G = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n$.*

Théorème 20 : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème 21 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

IV Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

1 Définition

Définition 14 : Norme d'algèbre

Une norme N sur une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ est dite **sous-multiplicative** si pour tout $(a,b) \in \mathscr{A}^2$, $N(ab) \leqslant N(a)N(b)$. On parle aussi de **norme d'algèbre**.

Propriété 30 : Norme d'algèbre et puissance

On a alors, pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N\left(a^k\right) \leqslant N(a)^k.$$

Corollaire 9 : Convergence de séries vectorielles exponentielles et géométriques

Soit $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie de N norme d'algèbre, et $a \in \mathscr{A}$.

(i) *La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.*

(ii) *Si $N(a) < 1$, alors la série $\sum_{k\geqslant 0} a^k$ est absolument convergente.*
Si $1_{\mathscr{A}}$ est l'unité de $\mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ de dimension finie, on a alors $1_{\mathscr{A}} - a$ inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} a^k$.

Corollaire 10 : Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition 15 : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $\exp u = \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp A = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

2 Propriétés

Propriété 31 : Lien entre les exponentielles d'endomorphisme et de matrice

Si A matrice représentant $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\exp A$ représente $\exp u$ dans la même base.

Propriété 32 : de l'exponentielle

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) *Si $u \circ v = v \circ u$, $\exp(u) \circ v = v \circ \exp(u)$.*

(ii) *Si $u \circ v = v \circ u$,*

$$\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$

(iii) *Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(t\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{id}_E$.*

(iv) $\exp(0_{\mathscr{L}(E)}) = \mathrm{id}_E$.

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Si $AB = BA$, $\exp(A)B = B\exp(A)$.*

(ii) *Si $AB = BA$,*

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

(iii) *Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(tI_n) = \mathrm{e}^t I_n$.*

(iv) $\exp(0_n) = I_n$.

Propriété 33 : Continuité de l'exponentielle

Les applications $\exp : \begin{vmatrix} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & \exp u \end{vmatrix}$ *et* $\exp : \begin{vmatrix} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp A \end{vmatrix}$ *sont continues.*

Propriété 34 : Dérivation

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\phi : \begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{vmatrix}$ *et* $\varphi : \begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{vmatrix}$ *sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

$$\varphi'(t) = A \times \exp(tA) = \exp(tA) \times A.$$

Propriété 35 : Exponentielle d'une somme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u + v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A + B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

Corollaire 11 : Inversibilité et inverse de l'exponentielle

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp(u) \in \mathscr{GL}(E) \quad \text{et} \quad \exp(u)^{-1} = \exp(-u)$$
$$\exp(A) \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Propriété 36 : Exponentielles de matrices diagonales, triangulaires, nilpotentes

- $\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- $\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- *Si N est nilpotente d'indice p,*

$$\exp N = I_n + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}.$$

Propriété 37 : Exponentielle et réduction

- *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.*
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\exp(A)\right) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A\right\}$.

Méthode 1 : Avec une matrice nilpotente

Plus généralement, si on a N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n + N$, le calcul de $\exp A$ est facile.

C'est le cas lorsque A a une unique valeur propre λ, alors $\chi_A = (X - \lambda)^n$ est un polynôme annulateur par Cayley-Hamilton, donc $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Plus généralement, un résultat du programme montre que dans une base adaptée (supplémentarité des sous-espaces caractéristiques), on a une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ où pour tout i, $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.

On vérifie facilement que l'exponentielle de cette matrice est $\begin{pmatrix} \exp A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_p \end{pmatrix}$.