26

Fonctions vectorielles

Extrait du programme officiel :

Dérivation et intégration des fonctions vectorielles

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables.	
Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	
Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$.	
Inégalité triangulaire $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	
d) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
e) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral.	
Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	

Séries vectorielles

L'objectif de cette section est d'étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.

Suites et séries de fonctions vectorielles

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u_n') sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	
Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$.	
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	

Table des matières

I Fonction vectorielles d'une variable réelle

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit I , J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.

Soit $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$, $(G, \|\|_G)$ des K-espaces vectoriels normés **de dimension finie** non réduits au vecteur nul. Lorsqu'il n'est question que d'un espace normé, sa norme est notée $\|\cdot\|$ sans ambiguïté.

Rappel : les normes étant équivalentes en dimension finie, les notions de limite ne dépendent pas de la norme.

1 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

a Définition

Définition 1 : Dérivée

Soit $f : I \to E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point** a si et seulement si $\dfrac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **dérivé de f au point** a.

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$. Alors $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété 1 : DL$_1$

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_E$. Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Démonstration

Même démonstration que pour les fonctions numériques.

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $b \in E$ tel que $\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) \to b$ si et seulement s'il existe $b \in E$ tel que $\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) = b + \mathrm{o}(1)$ si et seulement si $f(a+h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$.

Par unicité de la limite, le b en question est bien $f'(a)$. ■

Corollaire 1 : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Démonstration

Il suffit de passer à la limite dans le DL$_1$. ■

Remarque

R 1 – Comme pour les fonctions numériques, on définit aussi des dérivées à gauche et à droite de a (lorsque c'est possible) notée $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$: ce sont les dérivées des restrictions à $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ de f, et on a f dérivable en a si set seulement si elle l'est à gauche et à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Propriété 2 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(a) e_k$ (respectivement $f' = \sum_{k=1}^{n} f'_k e_k$).

Démonstration

Conséquence de la propriété analogue sur la limite appliquée au taux d'accroissement. ■

b Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 3 : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivables de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Démonstration

Avec DL_1 : si f et g sont dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ et $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + o(h)$ alors $(f+\lambda g)(a+h) = (f+\lambda g)(a) + h(f'+\lambda g')(a) + o(h)$, d'où le résultat. ■

Propriété 4 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I, alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Remarque

R 2 – ⚠ ne pas confondre avec la formule de dérivée d'une composée !

Démonstration

Avec DL_1 : si $a \in I$, $u \circ f(a+h) = u\big(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\big) = u \circ f(a) + hu \circ f'(a) + hu(\varepsilon(h))$ avec $u(\varepsilon(h)) \to u(0) = 0$ par continuité de u, linéaire sur un espace de dimension finie.

Donc $u \circ f$ dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$. ■

Exemple

E 1 – La projection du vecteur vitesse est le vecteur vitesse de la projection du mouvement.

Propriété 5 : Image par une application multilinéaire

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ dérivables sur I, on note $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.
Alors $B(f,g)$ dérivable sur I et $B(f,g)' = B\left(f', g\right) + B\left(f, g'\right)$.

Plus généralement, si $(f_1, \dots, f_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i^I$ est une famille de fonctions dérivables sur I, $M : \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ une application n-linéaire, alors $M(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable sur I et $M(f_1, \dots, f_n)' = \sum_{i=1}^{n} M\left(f_1, \dots, f'_i, \dots, f_n\right)$.

Démonstration

Se voit avec DL_1 mais la discussion est assez pénible pour le o.
Le mieux est de revenir au taux d'accroissement : si $a \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(B\left(f(a+h), g(a+h)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\right) &= \frac{1}{h}\left(B\left(f(a+h) - f(a) + f(a), g(a+h)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(B\left(f(a+h) - f(a), g(a+h)\right) + B\left(f(a), g(a+h) - g(a)\right)\right)\\ &= B\left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)), g(a+h)\right) + B\left(f(a), \frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right)\\ &\to B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)\end{aligned}$$

par continuité de B, bilinéaire sur des espaces de dimension finie et de g, dérivable. ■

Corollaire 2 : Dérivée d'un produit de fonction scalaire par une fonction vectorielle

Dérivée d'un produit de fonctions dérivables fg où $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Corollaire 3 : Dérivée d'un produit scalaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

Corollaire 4 : Dérivée du déterminant

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : Soit, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $C_j : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fonction dérivable. Alors l'application déterminant $f : t \mapsto \begin{vmatrix} C_1(t) & \vdots & \dots & \vdots & C_n(t)\end{vmatrix}$ est dérivable sur I et $f' = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} C_1 & \vdots & \dots & \vdots & C_j' & \dots & \vdots & C_n\end{vmatrix}$.

Propriété 6 : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$.

Démonstration

DL1. ■

C Applications de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 2 : Classe d'une fonction vectorielle

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.
f est dite **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
f est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

Remarque

R 3 – On peut être dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple

E 2 – $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par 0 en 0.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété 7 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)} e_k$.

Démonstration

Récurrence. ■

Propriété 8 : Linéarité

$\mathscr{C}^n(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. ■

Propriété 9 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$, $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. ■

Exemple

E 3 – La projection du vecteur accélération est le vecteur accélération de la projection du mouvement.

Propriété 10 : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, $g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(B(f, g)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right).$$

Démonstration

Récurrence. ■

Corollaire 5 : Dérivées successives d'un produit

Si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété 11 : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Démonstration

Par récurrence. ■

2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

a Fonctions continues pas morceaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 3 : Fonctions continues par morceaux sur un segment

Une application $f : [a,b] \to E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Propriété 12 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. f est continue par morceaux ssi pour tout k, f_k l'est.

Corollaire 6 : Opérations

Si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b], E)$, $\varphi \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ et $\phi \cdot f$ sont continues par morceaux.

Remarque

R 4 – $\mathscr{C}_m([a,b], E)$ est un K-espace vectoriel.

Propriété 13 : CPM ⇒ bornée

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition 4 : Fonction CPM sur un intervalle

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur I** lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

b Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété 14 : Indépendance du choix de la base

Si $n = \dim E$ *et* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *base de* E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. *Alors* $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$ *ne dépend pas de la base* $\mathscr{B}$.

Démonstration

Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une autre base de E.
Alors, on peut décomposer tout $e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \varepsilon_j$.
Puis on décompose $f = \sum_{j=1}^{n} g_j \varepsilon_j = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k \varepsilon_j$, donc pour tout j, $g_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k$.
Alors $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k(t) \right) \mathrm{d}t \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \varepsilon_j$. ■

Définition 5 : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0_E$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

R 5 – Pas d'intégration sur un intervalle quelconque pour des fonctions vectorielles au programme.

Propriété 15 : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une application linéaire de* $\mathscr{C}_m([a, b], E)$.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. ■

Propriété 16 : Relation de Chasles

Si $f \in \mathscr{C}_m(I, E)$ *et* $a, b, c \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. ■

c Sommes de Riemann

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k\in[a_k,a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann $R(f,\sigma,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$.

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k, $a_{k+1}-a_k=\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout k, $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

On obtient alors $S(f,\sigma,\xi)=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)$.

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k=a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, $S(f,\sigma,\xi)=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Si $f\in\mathscr{C}_m([a,b],E)$, $n\in\mathbb{N}^*$,

$$R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

alors $R_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème vu en première année sur les fonctions numériques aux coordonnées dans une base. ■

Théorème 2 : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f\in\mathscr{C}_m(I,E)$, $a,b\in I$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t\right|$.
(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

Démonstration

Si $a=b$, il n'y a rien à faire.

Si $a<b$, et $n\in\mathbb{N}^*$, $\|S_n(f)\|\leqslant\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f(t)\|$ donc en faisant $n\to+\infty$, par continuité de la norme et $\|f\|$ étant continue par morceau, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Si $a>b$, il suffit de remettre les bornes dans le bon sens. ■

d Intégrale et primitive

Définition 6 : Primitive

$g:I\to E$ est une **primitive** de $f:I\to E$ si g dérivable sur I et $g'=f$.

Propriété 17 : Caractérisation des fonctions constantes

$f:I\to E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f'\equiv 0_E$ sur I.

Démonstration

Si f est constante c'est la définition.
Si $f' \equiv 0$, alors, en passant par les coordonnées, f est constante. ■

Remarque

R6 – La constante dépend de l'intervalle !

Propriété 18 : Comparaison de primitives

*Soit $f : I \to E$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + C$.

Démonstration

$F' - G' \equiv 0$ sur l'intervalle I. ■

Théorème 3 : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. ■

Corollaire 7 : Applications du théorème fondamental

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.*

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

(iv) ***Inégalité des accroissements finis** :*
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\|f'\| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Démonstration

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $F - F(a)$ sont deux primitives de f sur l'intervalle I s'annulant en a, donc sont égales.
(iii) f primitive de f'.
(iv) Si $x < y$, $\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant k|x - y|$. ■

Propriété 19 : Fonction intégrale dépendante de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to E$ continue.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$.

Démonstration

Si F primitive de f, $\varphi = F\circ v - F\circ u$. ■

e Intégration par parties

Propriété 20 : Intégration par parties

Si $u \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $v \in \mathscr{C}^1(I,E)$,

$$\forall\, a,b \in I,\quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ puis intégrer entre a et b. ■

f Changement de variable

Propriété 21 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f \in \mathscr{C}(I,E)$, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)\cdot f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u.$

Démonstration

Si F primitive de f, $(F\circ\varphi)' = \varphi'\cdot f\circ\varphi$. ■

3 Formules de Taylor

Définition 7 : Développement et reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

Théorème 4 : Taylor reste intégrale

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

R 7 – À connaître **PARFAITEMENT**.
Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de a sous l'intégrale.

Démonstration

Par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, $f \in \mathscr{C}^1(I)$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si c'est vrai pour un $n \geqslant 0$, $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$, par hypothèse de récurrence, si $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence. ■

Théorème 5 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Remarque

R 8 – Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p = 0$?

Démonstration

- Pas de problème si $x = a$.
- Si $x > a$, par Taylor reste intégrale, les bornes étant dans le bon sens,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^x \left\| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $\left\| f^{(n+1)} \right\|$ est continue sur le segment $[a,x]$, ell est bornée donc $\sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ existe et, tout étant positif et les bornes dans le bon sens toujours,

$$\|R_n(x)\| \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \mathrm{d}t = \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\|$$

- Si $x < a$,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \left| \int_a^x \left\| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[x,a]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,a]} \left\| f^{(n+1)} \right\|. \end{aligned}$$

■

Ayant défini la négligeabilité, on peut, comme pour les fonctions numériques, calculer des développements limités vectoriels.

Propriété 22 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Démonstration

Soit $\varphi(h) = F(a+h) - F(a) - a_0 h - \dfrac{a_1}{2}h^2 - \cdots - \dfrac{a_n}{n+1}h^{n+1}$.

On veut montrer que $\varphi(h) = \mathrm{o}\big(h^{n+1}\big)$.

Or φ est dérivable sur I et $\varphi' : h \mapsto f(a+h) - a_0 - \cdots - a_n h^n = \mathrm{o}\big(h^n\big)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $|t| \leqslant \eta$, $\|\varphi'(t)\| \leqslant \varepsilon |t|^n$.

- En particulier, si $h \neq 0$ et $|h| \leqslant \eta$, alors $\|\varphi'(t)\| \leqslant \underbrace{\varepsilon |h|^n}_{\text{indépendant de } t}$ sur $]0 \overset{\curvearrowright}{,} h[$.

  Par inégalité des accroissements finis, φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0 \overset{\curvearrowright}{,} h[$ en supposant de plus f continue, $\|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \|\varphi(h)\| \leqslant \varepsilon |h|^n |h - 0| = \varepsilon |h|^{n+1}$.

  Notons que pour l'inégalité des accroissements finis vectorielle, nous avons besoin de la classe $\mathscr{C}^1$ de φ et donc la continuité de f (en fait f continue par morceaux suffit), mais elle est valable pour φ continue sur $[0,h]$ et dérivable sur $]0,h[$ (hors-programme pour une fonction vectorielle).
- Autre rédaction possible (demandant par contre forcément f au moins continue par morceaux), si $h > 0$, $\|\varphi(h)\| = \|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \left\|\displaystyle\int_0^h \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \displaystyle\int_0^h \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^h \varepsilon |t|^n\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon |h|^{n+1}$.

  On peut faire un calcul semblable si $h < 0$ en renversant les bornes de l'intégrale.

Donc $\varphi(h) = \mathrm{o}\big(h^{n+1}\big)$. ■

Remarque

R9 – ⚠ Comme pour les fonctions numériques, on peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL.**

Théorème 6 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to E$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\big(h^n\big)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

Remarque

R 10 – L'hypothèse du programme officiel est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

Démonstration

On a déjà vu que c'est vrai pour $n=1$.

Si c'est vrai à l'ordre $n-1$, et si f admet une dérivée d'ordre $n \geqslant 1$ en a, alors f' admet une dérivée d'ordre $n-1$ en a et par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Alors, par primitivation de DL,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ce qui établit la récurrence.

Pour la réciproque, si $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0, on a $f(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ qui est un DL$_2$ de f en 0 et pourtant $f' : x \mapsto 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon n'est pas dérivable en 0. ■

II Séries vectorielles

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$., $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

1 Généralités

Définition 8 : Vocabulaire des séries vectorielles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in E$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété 23 : Série télescopique vectorielle

Soit $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$ ■

Propriété 24 : Espace vectoriel des termes généraux de séries vectorielles convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n}(u_n + \lambda v_n) = S_n + \lambda \Sigma_n$. ■

Propriété 25 : Convergences des séries coordonnées

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge.
Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}\right) e_k.$$

Démonstration

D'après la propriété connue sur les limites de suites vectorielles. ■

Remarque

R 11 – Lorsqu'il y a convergence, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$.

Propriété 26 : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0_E$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \to 0$.

Contre-exemple : série harmonique. ■

2 Reste d'une série convergente

Définition 9 : Reste d'une série vectorielle convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 27 : Expression du reste

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$ *et* $\|R_n - S\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Démonstration

$S_N - S_n \to S - S_n = R_n$ lorsque $N \to +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ lorsque $N \to +\infty$ ∎

3 Convergence absolue

Définition 10 : Absolue convergente d'une série vectorielle

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème 7 : En dimension finie, convergence absolue ⇒ convergence

*Si E est **de dimension finie** et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.*

La réciproque est fausse.

Démonstration

- **Cas où** $E = \mathbb{R}$: On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

  Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
- **Cas complexe** : $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent absolument car $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$ donc convergent.
- **Cas général** : Comme toutes les normes sont équivalentes, en considérant $\|\cdot\|_\infty$, on a $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \|\cdot\|$, on montre que chaque suite coordonnée de u est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour la réciproque fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument. ∎

Remarque

R 12 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété 28 : Inégalité triangulaire vectorielle

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration

Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire pour les sommes partielles, les deux séries convergeant bien. ∎

Remarque : Comparaison asymptotique pour les séries vectorielles

R 13 – On compare $\|u_n\|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $\|u_n\| = o(v_n)$ ou que $\|u_n\| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $\|u_n\| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

4 Sommation des relations comparaison

Si les sommations de relations de comparaison dans le programme officiel n'apparaisse que pour les séries numériques, elles s'étendent aisément au cas vectoriel en remplaçant dans les démonstrations les valeurs absolues par des normes.

Deux remarques :

- La série de référence est toujours à termes réels positifs.
- Rappel : pour les relations de comparaison vectorielles, ils suffit de rajouter des normes de partout...

Théorème 8 : Sommation des relations comparaison dans le cas de divergence

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(\Sigma_n)$.

Démonstration

Comme $\Sigma_n \to +\infty$, on a un rang N_0 à partir duquel $\Sigma_n > 0$.

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $\|u_n\| \leqslant M v_n$.
Si $n \geqslant N$, $\|S_n\| \leqslant \|S_N\| + M(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant \|S_N\| + M\Sigma_n$.
Or $\Sigma_n \to +\infty$, donc on a un rang N' tel que si $n \geqslant N'$, $\|S_N\| \leqslant \Sigma_n$.
Ainsi, pour $n \geqslant \max(N, N')$, $\|S_n\| \leqslant (M+1)\Sigma_n$ et $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $\|u_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$.
Si $n \geqslant N$, $\|S_n\| \leqslant \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}\Sigma_n$.
Si $n \geqslant \max(N, N_0)$, $\frac{\|S_n\|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et enfin $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \to 0$ donc on a un rang N' à partir duquel $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, si $n \geqslant \max(N, N_0, N')$, $\|S_N\| \leqslant \varepsilon\Sigma_n$ et $S_n = o(\Sigma_n)$. ∎

Remarque

R 14 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Théorème 9 : Sommation des relations comparaison dans le cas de convergence

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*
On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

Remarque

R 15 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $\|u_n\| \leqslant M v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Si $n, p \geqslant N$, $\left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{p} v_k$. Puis, en faisant $p \to +\infty$, $\|R_n\| \leqslant M\rho_n$ donc $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $\|u_n\| \leqslant \varepsilon v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Avec le même calcul en remplaçant M par ε, si $n \geqslant N$, $\|R_n\| \leqslant \varepsilon \rho_n$ donc $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

III Suites et séries de fonctions vectorielles

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E.
Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

1 Suites de fonctions

Définition 11 : Convergence simple

Soit $f : A \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon}, \quad \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition 12 : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété 29 : de la convergence uniforme

- *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
- *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A et $N_\infty(f_n - f) = \sup_{x\in A} \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \longrightarrow 0$.*

Remarque

R 16 – Il y a convergence uniforme au voisinage de $x_0 \in \overline{A}$ lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel qu'il y ait convergence uniforme sur $A \cap B(x_0, \eta)$.

Théorème 10 : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $x_0 \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout n, f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).*
- **H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).*

Alors

- **C1** *f est continue en x_0 (respectivement sur A).*

Théorème 11 : de la double limite

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que

- **H1** *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*
- **H2** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in F$ tel que

- **C1** $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$
- **C2** $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème 12 : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*
- **H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

- **C1** *f est continue sur $[a, b]$*
- **C2** $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Autrement dit, les limites existant bien,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 13 : Convergence uniforme de primitive de fonction vectorielle

Soient $f : I \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(G_n)_n$ converge uniformément vers G sur tout segment de I.*

Théorème 14 : Dérivation d'une suite de fonctions vectorielles

Soient $f : I \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Théorème 15 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^p$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

C1 *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*

2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F^A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition 13 : Convergences de série de fonctions vectorielles

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de** $a \in \overline{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A \cap B(a, r)$.
- **converge normalement sur** A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum N_\infty(f_n)$ converge, avec $N_\infty(f) = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$.

Théorème 16 : Continuité d'une série de fonctions vectorielles

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $a \in A$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en a (respectivement sur A).*

Corollaire 8 : Continuité d'une série entière complexe

La somme d'une série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Démonstration

Les f_n sont continues et la convergence est uniforme au voisinage de chaque point de $D(0, R)$, car sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$. ■

Remarque

R 17 – Il peut y avoir des discontinuités sur le cercle.
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout sur le cercle.

Exemple

E 4 – La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$.

Théorème 17 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $E = \mathbb{R}$). On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème 18 : Intégration terme à terme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

- **C1** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a,b]$.*
- **C2** $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 19 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $a \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- **C1** *f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*
- **C2** *La série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $G = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n$.*

Théorème 20 : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **H2** *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*
- **H3** *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

- **C1** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème 21 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

IV Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

1 Définition

Définition 14 : Norme d'algèbre

Une norme N sur une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$ est dite **sous-multiplicative** si pour tout $(a,b) \in \mathscr{A}^2$, $N(ab) \leqslant N(a)N(b)$. On parle aussi de **norme d'algèbre**.

Remarque

R 18 – Toute norme subordonnée convient sur $\mathscr{L}(E)$ et sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On a aussi que $n\|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 30 : Norme d'algèbre et puissance

On a alors, pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $N\left(a^k\right) \leqslant N(a)^k$.

Démonstration

Récurrence immédiate. ■

Corollaire 9 : Convergence de séries vectorielles exponentielles et géométriques

Soit $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie de N norme d'algèbre, et $a \in \mathscr{A}$.

(i) *La série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.*

(ii) *Si $N(a) < 1$, alors la série $\sum_{k \geqslant 0} a^k$ est absolument convergente.*

Si $1_{\mathscr{A}}$ est l'unité de $\mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ de dimension finie, on a alors $1_{\mathscr{A}} - a$ inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} a^k$.

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant N\left(\dfrac{a^k}{k!}\right) \leqslant \dfrac{N(a)^k}{k!}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{N(a)^k}{k!}$ converge comme série exponentielle réelle. ■

Remarque

R 19 – Il faut être en dimension finie pour en déduire la convergence de ces séries.

Exercice 1 : CCINP 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $|| \, ||$. On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. **Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.**
   (a) **Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.**
   (b) **Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.**
2. **Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.**

---

1. (a) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   D'après les hypothèses, on a $||u^2|| \leqslant ||u||^2$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u^n\| \leqslant \|u\|^n$.
   Puisque $\|u\| < 1$, la série numérique $\sum \|u\|^n$ est convergente et, par comparaison des séries à termes positifs, on peut affirmer que la série vectorielle $\sum u^n$ est absolument convergente.
   Puisque l'algèbre A est de dimension finie, la série $\sum u^n$ converge.

   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $(e-u)\sum\limits_{n=0}^{N} u^n = e - u^{N+1}$. (1)

   L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & (e-u)x \end{array}$ est linéaire.

   Et, comme A est de dimension finie, on en déduit que φ est continue sur A.

   Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u^n$ et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

   $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$ (d'après 1.a) et φ est continue sur A donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi(S_N) = \varphi(S)$.

   C'est-à-dire $\lim\limits_{N\to+\infty} (e-u)\sum\limits_{n=0}^{N} u^n = (e-u)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$. (2)

   De plus, $\|u^{N+1}\| \leqslant \|u\|^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} (e - u^{N+1}) = e$. (3)

   Ainsi, d'après (1), (2) et (3), on en déduit que : $(e-u)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n = e$.

   On prouve, de même, que $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n\right)(e-u) = e$.

   Et donc, $e-u$ est inversible avec $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. On a $\left\|\dfrac{u^n}{n!}\right\| \leqslant \dfrac{\|u\|^n}{n!}$. De plus, la série exponentielle $\sum \dfrac{||u||^n}{n!}$ converge.
   Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série vectorielle $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente, car A est de dimension finie.

Corollaire 10 : Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition 15 : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $\exp u = \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp A = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

2 Propriétés

Propriété 31 : Lien entre les exponentielles d'endomorphisme et de matrice

Si A matrice représentant $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\exp A$ représente $\exp u$ dans la même base.

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^k\right) = A^k$ donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=0}^{N} u^k\right) = \sum_{k=0}^{N} A^k$ et comme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u$ est linéaire en dimension finie (celle de $\mathscr{L}(E)$ suffit), elle est continue, donc avec $N \to +\infty$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp u) = \exp A$. ■

Remarque

R 20 – Ainsi, via l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $u \in \mathscr{L}(E) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés de $\exp$ pour les matrices ou les endomorphismes sont semblables.

Propriété 32 : de l'exponentielle

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) *Si* $u \circ v = v \circ u$, $\exp(u) \circ v = v \circ \exp(u)$.

(ii) *Si* $u \circ v = v \circ u$,

$$\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$

(iii) *Pour tout* $t \in \mathbb{K}$, $\exp(t\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{id}_E$.

(iv) $\exp(0_{\mathscr{L}(E)}) = \mathrm{id}_E$.

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Si* $AB = BA$, $\exp(A)B = B\exp(A)$.

(ii) *Si* $AB = BA$,

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

(iii) *Pour tout* $t \in \mathbb{K}$, $\exp(tI_n) = \mathrm{e}^t I_n$.

(iv) $\exp(0_n) = I_n$.

Démonstration

(i) Si $AB = BA$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{N} A^k\right) B = B \sum_{k=0}^{N} A^k$, d'où le résultat par linéarité donc continuité de $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$.

(ii) Il suffit d'appliquer (i) deux fois !

(iii) $\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} I_n = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!}\right) I_n$ puis $N \to +\infty$ avec un argument de continuité.

(iv) $\exp(0_n) = I_n$: immédiat par définition. ■

Propriété 33 : Continuité de l'exponentielle

Les applications $\exp : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & \exp u \end{array}\right.$ *et* $\exp : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp A \end{array}\right.$ *sont continues.*

Démonstration

C'est une série entière... vectorielle ! N norme sous-multiplicative. Les fonctions $f_k : A \mapsto \dfrac{A^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a convergence normale de $\sum f_k$ sur toute boule fermée centrée en 0_n pour N norme sous-multiplicative. En effet, dans une telle boule de rayon $r > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N(f_k(A)) \leqslant \dfrac{r^k}{k!}$, indépendant de A, terme général d'une série (exponentielle) convergente.

Donc on a convergence uniforme au voisinage de chaque matrice A, donc $\exp$ est bien continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 34 : Dérivation

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{array}\right.$ *et* $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}\right.$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

$$\varphi'(t) = A \times \exp(tA) = \exp(tA) \times A.$$

Démonstration

C'est une série entière... vectorielle ! N norme sous-multiplicative.

- Les fonctions $g_k : t \mapsto \dfrac{t^k A^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\sum g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- On montrer que $\sum g_k'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[-M, M]$.

  En effet, si $t \in [-M, M]$, $k \geqslant 1$ $N(g_k'(t)) = N\left(\dfrac{t^{k-1}a^k}{(k-1)!}\right) \leqslant \dfrac{M^{k-1}N(A)^k}{(k-1)!}$ indépendant de A, terme général d'une série (presque exponentielle) convergente.

Donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_k'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.

Propriété 35 : Exponentielle d'une somme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u + v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A + B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

Démonstration

1re solution : c'est un produit de Cauchy. Problème : au programme, seul le produit de Cauchy sur $\mathbb{C}$

Autre solution : C'est un... problème de Cauchy ! Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi_1 : t \mapsto \exp(t(A+B))E_1$.

Alors $\phi_1' : t \mapsto (A+B)\phi_1(t)$ donc Φ_1 est solution du problème de Cauchy $X' = (A+B)X$ et $X(0) = E_1$.

Puis $\Psi_1 : t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)E_1$ est tel que $\psi_1' : t \mapsto (A+B)\psi_1(t)$ et $\Psi_1(0) = E_1$.

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (ici la matrice, $A+B$, est constante donc continue), $\Phi_1 = \Psi_1$.

Cela signifie que la première colonne de $\exp(t(A+B))$ est égale à la première colonne de $\exp(tA)\exp(tB)$.

En réitérant sur les autres vecteurs de la bases canonique, on obtient $\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$. L'évaluation en $t=1$ permet de conclure. ■

Corollaire 11 : Inversibilité et inverse de l'exponentielle

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp(u) \in \mathcal{GL}(E) \quad \text{et} \quad \exp(u)^{-1} = \exp(-u)$$
$$\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Démonstration

$\exp(A-A) = I_n$ ■

Propriété 36 : Exponentielles de matrices diagonales, nilpotentes

- $\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- *Si N est nilpotente d'indice p,* $\exp N = I_n + N + \dfrac{1}{2!}N^2 + \cdots + \dfrac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$.

Propriété 37 : Exponentielle et réduction

- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors* $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\exp(A)\right) = \left\{e^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A\right\}$.

Remarque

R 21 – $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\exp(A)\right) = \left\{e^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A\right\} \cap \mathbb{R} = \left\{e^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A,\ \mathrm{Im}(\lambda) \equiv 0[\pi]\right\} \neq \left\{e^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A\right\}$ en général

Démonstration

A et $B = P^{-1}AP$ représentent un même endomorphisme u dans des bases différentes. $\exp(B)$ et $\exp(A)$ représentent $\exp(u)$ et la formule de changement de base donne $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Pour le spectre complexe, il suffit de trigonaliser (ce qui est toujours possible dans $\mathbb{C}$). ■

Exemple

E 5 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut déterminer $\exp A$ soit en diagonalisant, soit en cherchant le polynôme annulateur pour trouver les puissances de A.

En effet, On vérifie que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-2}+4e^{3} & -4e^{-2}+4e^{3} \\ -e^{-2}+e^{3} & 4e^{-2}+e^{3} \end{pmatrix}$ après calculs.

Deuxième méthode $P = (X+2)(X+3)$ est à la fois le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A, et en est un polynôme annulateur. Division euclidienne : $X^k = P \times Q_k + R_k$ où $R_k = a_kX + b_k$ se trouve en évaluant en -2 et 3, avec $A^k = R_k(A) = a_kA + b_kI_2$.

En remplaçant dans la définition de $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$, on retrouve l'expression.

E 6 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 2.

Comme elles commutent, $\exp A = \exp I_2 \exp N = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}(I_2 + N) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$.

Méthode 1 : Avec une matrice nilpotente

Plus généralement, si on a N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n + N$, le calcul de $\exp A$ est facile.

C'est le cas lorsque A a une unique valeur propre λ, alors $\chi_A = (X - \lambda)^n$ est un polynôme annulateur par Cayley-Hamilton, donc $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Plus généralement, un résultat du programme montre que dans une base adaptée (supplémentarité des sous-espaces caractéristiques), on a une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ où pour tout i, $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.

On vérifie facilement que l'exponentielle de cette matrice est $\begin{pmatrix} \exp A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_p \end{pmatrix}$.