

ESPACE PROBABILISÉ

1 Tribu

Définition 1 : Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) **Stabilité par passage au complémentaire** :
 $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$
- (iii) **Stabilité par réunion dénombrable** : Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} , $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Le couple (Ω, \mathcal{A}) est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de \mathcal{A} ses **événements**.

Le vocabulaire vu en première année reste valable :

- Si $A \in \mathcal{A}$, \bar{A} est l'**événement contraire** (qui est bien un événement).
- L'événement \emptyset est appelé **événement impossible**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Ne pas confondre issue = résultat = réalisation avec événement !

Propriété 1 : des tribus

Une tribu est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, par intersection finie.

Ainsi dit, si \mathcal{A} est une tribu sur Ω ,

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} ,
 $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- (iii) Si $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une famille finie d'éléments de \mathcal{A} ,
 $\bigcup_{n=0}^N A_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{n=0}^N A_n \in \mathcal{A}$

2 Probabilité

Définition 2 : Probabilité

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Une **probabilité** sur (Ω, \mathcal{A}) est une application \mathbb{P} définie sur \mathcal{A} telle que

- (i) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (iii) **σ -additivité** : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles),
 $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Propriété 2 : d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B des événements.

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) Si A et B sont deux événements incompatibles,
 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Plus généralement, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$.
- (iii) Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. Si A et B sont quelconques, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- (iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- (v) **Croissance** : si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Propriété 3 : Probabilité d'une réunion au plus dénombrable

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors

$(\mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$ est sommable et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Définition 3 : Distribution de probabilités

Soit Ω un ensemble. On appelle **distribution de probabilités** sur Ω toute famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par Ω et somme (finie) égale à 1.

On appelle **support** d'une telle distribution $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega, p_\omega \neq 0\}$.

Propriété 4 : Support au plus dénombrable

Le support d'une distribution de probabilités est toujours au plus dénombrable.

3 Cas très simple : univers fini

Si Ω est fini, on prend généralement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et la propriété de σ -additivité est équivalente à la propriété

Si A et B sont deux événements disjoints, alors
 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Propriété 5 : Probabilité finie associée à une distribution

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, \mathbb{P} est entièrement définie par la donnée d'une distribution de probabilités $(p_{\omega_i})_{1 \leq i \leq m}$ telle que pour tout $i \in [1, m]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_{\omega_i}$. Et, pour toute partie A de Ω ,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Les probabilités des événements élémentaires déterminent donc \mathbb{P} .



4 Cas simple : univers dénombrable

Ici, on garde la propriété de σ -additivité, que l'on ne peut plus remplacer par la simple additivité.

Ici encore, il n'y a pas d'obstacle à prendre la tribu « discrète », c'est-à-dire $\mathcal{P}(\Omega)$. On obtient :

Propriété 6 : Probabilité discrète associée à une distribution

Soit Ω un ensemble dénombrable. Pour toute distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, il existe une unique probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Cette probabilité vérifie

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Donc, encore une fois, \mathbb{P} est définie de manière unique par les probabilités des singletons. Pour un univers fini ou dénombrable, les tribus d'événements n'ont donc pas grand intérêt.

5 Cas moins simple : univers non dénombrable

Dans le cas où l'univers est infini indénombrable c'est plus compliqué : on peut montrer que pour un tirage à pile ou face infini non dénombrable, modélisé par $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable par argument diagonal de Cantor), la seule valeur possible pour la probabilité d'un événement élémentaire est... 0.

Pourquoi ? Intuitivement, si la probabilité d'obtenir un pile est $p \in]0, 1[$, alors la probabilité d'obtenir n piles de suite de va être $p^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$... Donc, il est légitime de penser que l'événement « obtenir que des piles » a une probabilité nulle, par exemple.

C'est donc moins simple, on en peut pas se contenter des événements élémentaires, mais complètement hors-programme.

6 Continuités croissante et décroissante

Propriété 7 : Continuité croissante

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire 1 : Limite d'une probabilité d'une réunion

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^k A_n\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Propriété 8 : Continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire 2 : Limite d'une probabilité d'une intersection

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^k A_n\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

7 Inégalité de Boole

Propriété 9 : Inégalité de Boole

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors, dans $[0, +\infty[$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

8 Négligeabilité

Définition 4 : Événement négligeable

On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Propriété 10 : Réunion finie ou dénombrable

Une réunion (respectivement intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriété 11 : Partie d'un événement négligeable

Si A et B sont deux événements tel que $A \subset B$, si B est négligeable, A l'est.

Définition 5 : Événement presque sûr

Un événement A est **presque sûr**, ou **presque certain**, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui équivaut à dire que \bar{A} est négligeable.

Une propriété est dite **presque sûre** lorsque l'ensemble des éléments de Ω qui ont cette propriété est un événement presque sûr.

Propriété 12 : Réunion, intersection au plus dénombrable

Toute réunion (respectivement intersection) finie ou dénombrable d'événements presque sûrs l'est encore.

Propriété 15 : Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{i \in I}$ où I est fini ou dénombrable est un système complet d'événements, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, pour tout i , $\mathbb{P}(A_i) > 0$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Si certains événements sont négligeables, alors les $B \cap A_i$ le seront aussi et il suffit de remplacer la somme pour $i \in I$ par la somme pour $i \in J = \{i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0\}$.



CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Les notions vues en première année se généralise sans problème particulier.

1 Conditionnement

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(Se lit en général « probabilité de A sachant B »)

Propriété 13 : Probabilité... conditionnée

$\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

... et donc toutes les propriétés des probabilités, toutes les formules qui vont suivre peuvent être appliquées à des probabilités conditionnelles.

Lorsque que plusieurs conditions s'enchaînent, il suffit de les intersecter : « $\mathbb{P}(A|B|C) = \mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$ ».

2 Probabilités composées

Propriété 14 : Formule des probabilités composées

Soit $n \geq 2$, A_1, \dots, A_n des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

3 Probabilités totales

Définition 7 : Système complet et quasi-complet d'événements

Soit (Ω, \mathcal{P}) un espace probabilisé, I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est un **système complet d'événements** lorsque

$$(i \neq j) \implies (A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est un **système quasi-complet d'événements** lorsque

$$(i \neq j) \implies (A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

4 Formule de Bayes

Propriété 16 : Formule de Bayes

Si A, B sont des événements non négligeables, alors

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Si, de plus, \bar{A} n'est pas négligeable,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ (I fini ou dénombrable) est un système complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(B | A_k) \mathbb{P}(A_k)}$$



ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

1 Couple d'événements indépendants

Définition 8 : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note $A \perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Propriété 17 : Caractérisation par probabilités conditionnelles

Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

**Propriété 18 : Indépendance et complémentaire**

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont indépendants, alors

- A et \bar{B} sont indépendants,
- \bar{A} et B sont indépendants,
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

2 Famille d'événements indépendants**Définition 9 : Événements indépendants vs 2 à 2 indépendants**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ avec I fini ou dénombrable une famille d'événements.

- Les A_i sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- Les A_i sont dit **indépendants**, lorsque pour toute partie finie J de I ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété 19 : Indépendants \Rightarrow 2 à 2 \perp

Si les A_i sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

La réciproque est fautive si $n \geq 3$.

Propriété 20 : Passages au complémentaire dans l'indépendance

Si les événements A_i pour $i \in I$ sont indépendants et si pour tout $i \in I$ on pose $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i , alors les B_i sont indépendants.

IV VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition**Définition 10 : Variable aléatoire discrète**

Soit E un ensemble quelconque. Une application $X : \Omega \rightarrow E$ est appelée **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ lorsqu'elle vérifie

- (i) $X(\Omega) = \text{Im } X = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \in \mathcal{P}(E)$ est fini ou dénombrable.
- (ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$ et est noté $(X = x)$.

Elle est dite **réelle** lorsque $E \subset \mathbb{R}$.

Propriété 21 : SCE associé à une variable aléatoire

$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à X** .

Propriété 22 : Les parties de $X(\Omega)$ sont des événements

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors pour toute partie A de $X(\Omega)$, $(X \in A) \in \mathcal{A}$.

Propriété 23 : Une fonction d'une v.a.d. est une v.a.d.

Si $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \rightarrow F$ est une fonction (ou application) quelconque, alors $f \circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

2 Loi

On fixe X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 11 : Loi d'une v.a.d.

L'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est appelée **loi de X** .

Propriété 24 : La loi est une probabilité

\mathbb{P}_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Propriété 25 : Expression de la loi de X

$$\text{Si } A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \mathbb{P}_X(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}_X(\{a\}) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a).$$

Corollaire 3

La loi de X est uniquement déterminée par la donnée de $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, famille sommable de réels dans $[0, 1]$ de somme 1.

Notation 1 : \sim

Si X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.
Si X suit une loi \mathcal{L} , on note $X \sim \mathcal{L}$.

Propriété 26 : Loi de $f(X)$

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par $\forall y \in f(X(\Omega))$,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}\left(X \in f^{-1}(\{y\})\right) = \sum_{x \mid f(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

De la même manière, on obtient par exemple :

Propriété 27 : Loi d'une somme, d'un produit

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

et $\mathbb{P}(XY = z) = \sum_{x,y \mid xy=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

V FAMILLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.

1 Définition et lois

a Couple de variables aléatoires discrètes

Les notions vues en première année se généralise sans problème particulier.

Définition – Propriété 1

Soit X, Y variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E, E' . L'application

$$Z : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire discrète appelée **couple** $Z = (X, Y)$.

Propriété 28 : SCE associé à un couple

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements $((X, Y) = (x, y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** (X, Y) .

b Loi conjointe

Définition 12 : Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires discrètes. On appelle **loi conjointe** de (X, Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y) .

c Lois marginales

Définition 13 : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple**.

Propriété 29 : Loi conjointe détermine lois marginales

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

d Lois conditionnelles

Définition 14 : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$** est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$.

Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

2 Extension aux n -uplets

Définition 15 : n -uplets de variables aléatoires

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires discrètes. C'est encore une variable aléatoire discrète appelé **vecteur aléatoire discret** de dimension n .

La **loi conjointe** de (X_1, \dots, X_n) est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ où pour tout $i, x_i \in X_i(\Omega)$.

Les lois de X_1, \dots, X_n sont les **lois marginales** de (X_1, \dots, X_n) .

Définition 16 : Loi conditionnelle pour n variables

Si x_1, \dots, x_{n-1} sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n .



3 Indépendance

a Cas d'un couple de variable

Définition 17 : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp Y$.

Propriété 30 : Caractérisation par des événements élémentaires

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

Propriété 31 : Caractérisation par les lois conditionnelles

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

- (i) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- (ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la même que la loi de X .
- (iii) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi de Y sachant $(X = x)$ est la même que la loi de Y .

Propriété 32 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes, f, g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

b Variables aléatoires indépendantes

Définition 18 : Variables aléatoires indépendantes

Des variables aléatoires discrètes X_1, \dots, X_n sont dites **indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, ..., A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ le sont.

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est une suite de variables aléatoire indépendantes lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_1, \dots, X_n le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaid).

Propriété 33 : Caractérisation par des événements élémentaires

X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ le sont.

Propriété 34 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n définie sur $X_n(\Omega)$, alors $(f_n(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Propriété 35 : Lemme des coalitions

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$, $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, f définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ et g définie sur $X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Le résultat s'étant à plus de deux coalitions.

Théorème 1

Soit $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{L}_n$.

VI LOIS USUELLES

1 Loi Uniforme

Définition 19 : Loi uniforme

On dit que qu'une variable aléatoire **finie** X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où $n = |X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A) = \frac{|A|}{n}$.

On note alors $X \sim \mathcal{U}(n)$.

2 Loi de Bernoulli

Définition 20 : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ lorsque X est à valeurs dans $E = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Situation type : Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

Propriété 36 : Ce sont les fonctions indicatrices

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F) = p$.

3 Loi binomiale

Définition 21 : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n, p) où $p \in]0, 1[$ lorsque X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1 - p$. On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Situation type : Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

4 Loi géométrique

Définition 22 : Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p si X est à valeurs dans \mathbb{N}^* et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

5 Loi de Poisson

Définition 23 : Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ si X est à valeurs dans \mathbb{N} et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

6 Propriétés des lois usuelles

a Somme de n vaids de Bernoulli

Propriété 37 : Importante!

Si X_1, \dots, X_n vaids de loi $\mathcal{B}(p)$, alors

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

b Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Propriété 38 : Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Soit $\lambda > 0$, $(p_n)_n \in]0, 1[^\mathbb{N}$ tel que $np_n \rightarrow \lambda$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

VII ESPÉRANCE

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition

Définition 24 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle positive

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

L'**espérance** de X est, par définition, dans $[0, +\infty]$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivant la sommabilité ou non de la famille réelle positive $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x \in X(\Omega)}$.

Lorsque cette famille est sommable, X est dite d'**espérance finie** $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ et on note $X \in L^1$.

Propriété 39 : Cas d'une variable aléatoire entière

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Définition 25 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe discrète.

Lorsque la famille $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X est d'**espérance finie**, on note $X \in L^1$ et on définit son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x.$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance (pas plus infinie que finie)

Lorsque X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = 0$, X est dite **centrée**.



2 Théorème de transfert

Théorème 2 : de transfert

Soit X un variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles.

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(\mathbb{P}(X=x) f(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x).$$

Corollaire 4 : Espérance du module

X a une espérance finie si et seulement si $|X|$ a une espérance finie.

Le cas échéant, $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) |x|$.

Corollaire 5 : Sur un univers fini ou dénombrable

Uniquement dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, X est d'espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega))_{\omega \in \Omega}$ est sommable et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).$$

3 Propriétés de l'espérance

Une espérance peut être vue comme une intégrale, ce qui rend toutes ces propriétés naturelles.

Propriété 40 : de l'espérance

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles ou complexes discrètes.

(i) Si X est constante presque sûrement, c'est-à-dire qu'on a $a \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{P}(X=a) = 1$, alors elle est d'espérance finie $\mathbb{E}(X) = a$.

(ii) **Linéarité** : si $X, Y \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $X + \lambda Y \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y).$$

(iii) **Positivité** : si $X \in L^1$ est à valeurs réelles, positive presque sûrement ie $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Positivité améliorée : si X est à valeurs réelles, positive presque sûrement et si X est nulle presque sûrement.

(iv) **Croissance** : si $X, Y \in L^1$ sont à valeurs réelles et si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

(v) Si $X \in L^1$, $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée et appelée **variable aléatoire centrée associée à X** .

(vi) **Inégalité triangulaire** : Si $X \in L^1$, $|X| \in L^1$ et

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

(vii) Si $Y \in L^1$ et $|X| \leq Y$, alors $X \in L^1$ et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.

En particulier, si X est bornée, elle est d'espérance finie.

Corollaire 6 : Espace vectoriel L^1

L'ensemble L^1 des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance finie est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel et $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire sur L^1 .

4 Espérances des lois usuelles

Propriété 41 : Espérance des lois usuelles

- | | |
|--|--|
| (i) Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors
$\mathbb{E}(X) = p$. | (iii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. |
| (ii) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors
$\mathbb{E}(X) = np$. | (iv) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$\mathbb{E}(X) = \lambda$. |

Corollaire 7 : Cas d'une fonction indicatrice

Soit A un événement de notre tribu \mathcal{A} . Alors $\mathbb{1}_A$ a une espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

5 Espérance et indépendance

Propriété 42 : Espérance et indépendance

Soit $X, Y \in L^1$ indépendantes. Alors $XY \in L^1$, et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Réciproque fautive en général.

Plus généralement, si (X_1, \dots, X_n) est une famille de variables aléatoires **indépendantes** d'espérance finie, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ l'est et

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

VIII

VARIANCE, ÉCART-TYPE ET COVARIANCE

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les variables aléatoires considérées sont à valeurs réelles.

1 Espace L^2

Notation 2 : L^2

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

On note $X \in L^2$ lorsque X^2 est d'espérance finie (ce qu'on peut noter $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ car X^2 est à valeurs réelles positives).

Propriété 43 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si deux variables aléatoires réelles discrètes $X, Y \in L^2$, leur produit $XY \in L^1$, et

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires presque sûrement, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel tel que $\mathbb{P}(\lambda X + \mu Y = 0) = 1$.

Corollaire 8

L^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Propriété 44 : $L^2 \subset L^1$

Si $X \in L^2$, $X \in L^1$.

2 Variance et écart-type

Définition 26 : Variance, écart-type, variable réduite

Soit $X \in L^2$.

On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}.$$

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Propriété 45 : de la variance

Soit $X \in L^2$.

(i) **Formule de Kœnig-Huygens :**

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

(ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

(iii) Si $\sigma(X) \neq 0$, $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X** .

3 Covariance

Définition 27 : Covariance

Soit $(X, Y) \in (L^2)^2$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.

On appelle **covariance** du couple (X, Y) le nombre

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right).$$

Lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Propriété 46 : de la covariance

Soient $X, Y \in L^2$ deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.

(i) Cov est une forme bilinéaire positive.

(ii) **Formule de Kœnig-Huygens :**

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(iii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) Si $X \perp Y$, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et la réciproque est fausse.

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété 47 : Variance d'une somme

Soient $X_1, \dots, X_n \in L^2$.

(i) $X_1 + \dots + X_n \in L^2$ et

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

(ii) Si X_1, \dots, X_n sont **décorrélées deux à deux** ($i \neq j \Rightarrow \text{Cov}(X_i, X_j) = 0$),

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si X_1, \dots, X_n sont des **va iid**,

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = n\mathbb{V}(X_1).$$

5 Cas des lois usuelles

Propriété 48 : Espérance et variance des lois usuelles

(i) Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p) = pq$.

(ii) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = npq$.

(iii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

(iv) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

IX INÉGALITÉS DE MARKOV ET DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Propriété 49 : Inégalité de Markov

Soit $X \in L^1$ une variable aléatoire discrète admettant une espérance finie. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$



Propriété 50 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}(X)$, $a > 0$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Théorème 3 : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1} \in (L^2)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes identiquement distribuées (de même loi) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Soit m l'espérance de X_n et σ son écart-type.

On pose enfin $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Propriété 53 : Lien avec l'espérance et la variance

(i) $X \in L^1$ (est d'espérance finie) si et seulement si G_X est dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

(ii) $X \in L^2$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$.
On exprime alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$G_X(t) = q + pt = 1 - p + pt$$

définie sur \mathbb{R} , ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k$ donc

$$G_X(t) = (q + pt)^n = (1 - p + pt)^n$$

définie sur \mathbb{R} , ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} t^k$ donc

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt} = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$$

définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right]$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{p}{q^2}$.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t^k$ donc

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

définie sur \mathbb{R} , ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

2 Somme des variables aléatoires

Propriété 54 : Fonction génératrice d'une somme

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Alors

$$G_{X_1 + \dots + X_n} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}.$$

- Applications**
- On retrouve la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la somme de n valid de loi de Bernoulli.
 - Une somme de variables aléatoires de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$ est encore de loi de Poisson de paramètre la somme des λ_i .
 - Une somme de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(n_i, p)$ indépendantes est de loi $\mathcal{B}(\sum n_i, p)$

X FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans \mathbb{N} .

1 Définition

Définition 28 : Fonction génératrice

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{N} .
On appelle **fonction génératrice associée à X** la fonction $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$.

Propriété 51 : des fonctions génératrices

(i) Le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) t^n$ est au moins égal à 1, et elle converge normalement sur $[-1, 1]$.

(ii) Pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

(iii) G_X est continue sur $[-1, 1]$, de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Propriété 52 : Caractérisation de la loi

Deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans \mathbb{N} ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

XI FORMULAIRE

Sous réserve d'existence, sommabilité, d'admission de moments, etc. Voici les principales formules du chapitre.

■ **Loi de X** : $\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$ déterminée par

les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$, positifs de somme 1.

■ **Espérance de X** : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x$ et si Ω

fini ou dénombrable $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$ et si

$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

■ **Formule de transfert** :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x).$$

■ **Variance de X** : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

■ **Covariance de X et Y** :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

nulle si indépendantes.

■ **Variance d'une somme** :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

■ **Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$** :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q \quad \mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = pq \quad G_X(t) = q + pt$$

■ **Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$** :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = npq \quad G_X(t) = (q + pt)^n$$

■ **Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$** :

$$p \in]0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1} \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} \quad G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

■ **Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$** :

$$\lambda > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \mathbb{E}(X) = \lambda \quad \mathbb{V}(X) = \lambda \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

■ **Continuités croissante et décroissante** :

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion)

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion)

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

■ **Inégalité de Markov** : Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

■ **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Si $a > 0$,

$m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. $\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

■ **Loi faible des grands nombres** : Si $\varepsilon > 0$, (X_n) une suite de vaiaid L^2 d'espérance m et d'écart-type σ , alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

■ **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Si $X, Y \in L^2$, alors $XY \in L^1$, et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires presque sûrement.