# 24
# Probabilités

*Extrait du programme officiel* :

*Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :*

— *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
— *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
— *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

*La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).*

*La notion de variable à densité est hors programme.*

*La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **b) Espaces probabilisés** | |
| Tribu sur un ensemble $\Omega$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. | La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme. |
| Événements. | Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. |
| Probabilité sur un espace probabilisable, $\sigma$-additivité. | |
| Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. | |
| Continuité croissante, continuité décroissante. | Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand $n$ tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$ |
| Propriété de sous-additivité de $P$ pour une réunion dénombrable d'événements. | |
| Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr). | Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme. |
| **c) Probabilités conditionnelles et indépendance** | |
| Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. | Notations $P_B(A), P(A\|B)$. |
| Par définition, les événements $A$ et $B$ sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. | Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de $A$ et $B$ s'écrit $P(A\|B) = P(A)$. |
| Famille d'événements indépendants. | L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. |
| Si $A$ et $B$ sont indépendants, $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi. | |
| **d) Espaces probabilisés discrets** | |
| Si $\Omega$ est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par $\Omega$ et de somme 1. | Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable. |
| Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur $\Omega$. | Si $\Omega$ est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|

## e) Variables aléatoires discrètes

| | |
|---|---|
| Une variable aléatoire discrète $X$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $E$ est une application définie sur $\Omega$, à valeurs dans l'ensemble $E$, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$. | Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire $X$ est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle $X$. |
| Loi $P_X$ d'une variable aléatoire discrète $X$. | La loi de $X$ peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. |
| *Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.* La probabilité $P_X$ est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. | |
| Notation $X \sim Y$. | La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que $X$ et $Y$ sont définies sur le même espace probabilisé. |
| Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. | |
| Loi conditionnelle d'une variable aléatoire $X$ sachant un événement $A$. | |
| Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe. | Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |

## f) Variables aléatoires indépendantes

| | |
|---|---|
| Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes. | Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de $(X, Y)$ est le produit des distributions de probabilités de $X$ et $Y$. Extension aux $n$-uplets de variables aléatoires. |
| Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes. | |
| Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ | Extension au cas de plus de deux variables. |
| Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. | Extension au cas de plus de deux coalitions. |
| Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données. | La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli. |

## g) Lois usuelles

| | |
|---|---|
| Pour $p$ dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre $p$. | Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. |
| Variable géométrique de paramètre $p$. | Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini. |
| Pour $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre $\lambda$. | Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. |
| Variable de Poisson de paramètre $\lambda$. | Interprétation en termes d'événements rares. |

## h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

| | |
|---|---|
| Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de $X$ est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\,P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. | Notation $\mathrm{E}(X)$. |
| Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. | |
| Une variable aléatoire complexe $X$ est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de $X$. | Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que $X$ est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de $L^1$. |
| Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. | |

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| Formule de transfert : soit $X$ une variable aléatoire discrète, $f$ une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\left(f(x)\,P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\left(f(X)\right) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$. | |
| Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. | Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle. |
| Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si $Y\in L^1$, alors $X\in L^1$. | |
| Si $X$ et $Y$ sont dans $L^1$ et indépendantes, alors $XY$ est dans $L^1$ et : $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. | Extension au cas de $n$ variables aléatoires. |

### i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

| | |
|---|---|
| Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, $X$ est d'espérance finie. | La notation $X\in L^2$ signifie que $X^2$ est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de $L^2$. |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X$ et $Y$ sont dans $L^2$, $XY$ est dans $L^1$ et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$. | Cas d'égalité. |
| Pour $X\in L^2$, variance et écart type de $X$. | Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites.<br>Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle. |
| Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2$. | |
| Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$. | Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. |
| Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. | |
| Covariance de deux variables aléatoires de $L^2$. | |
| Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. | |
| Variance d'une somme de $n$ variables aléatoires, cas de variables décorrélées. | |

### j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

| | |
|---|---|
| Inégalité de Markov. | |
| Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. | |
| Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $P\left(\left\lvert \dfrac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, où $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$. | Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration. |

### k) Fonctions génératrices

| | |
|---|---|
| Fonction génératrice de la variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ : $G_X(t)=\mathrm{E}\left(t^X\right)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k$. | La série entière définissant $G_X$ est de rayon supérieur ou égal à $1$ et converge normalement sur le disque fermé de centre $0$ et de rayon $1$. Continuité de $G_X$. |
| Détermination de la loi de $X$ par $G_X$. | |
| La variable aléatoire $X$ est d'espérance finie si et seulement si $G_X$ est dérivable en $1$ ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)={G_X}'(1)$. | La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.<br>Utilisation de $G_X$ pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.<br>Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. |
| Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. | |

# Table des matières

# I Espace probabilisé

## 1 Tribu

Comme vu en première année dans le cadre des probabilités finies, on appelle **univers**, noté en général $\Omega$, l'ensemble des **issues** ou **résultats** ou **réalisations** d'une expérience aléatoire.

Commençons par rappeler quelques situations modèles dans le cadre des univers finis : tirage de $p$ boules dans une urne en contenant $n$, numérotées de $1$ à $n$.

**Exemple**

E 1 – **Tirages successifs, avec remise** : Dans ce cas, l'ordre est important, et il peut y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat un $p$-uplet (ou $p$-liste) d'éléments de $[\![1,n]\!]$.
On pose $\Omega = [\![1,n]\!]^p$, et alors $|\Omega| = n^p$.
Il s'agit aussi du nombre d'applications d'un ensemble à $p$ éléments vers un ensemble à $n$ éléments (à chaque tirage, on associe sa boule).

E 2 – **Tirages successifs, sans remise** : Dans ce cas, l'ordre est important, et il ne peut pas y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat un $p$-uplet d'éléments deux à deux distincts (ou $p$-arrangements) de $[\![1,n]\!]$.
On pose $\Omega = \mathscr{A}_p\left([\![1,n]\!]\right)$, et alors
$$|\Omega| = A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$
(notation hors-programme).
Il s'agit aussi du nombre d'injections d'un ensemble à $p$ éléments vers un ensemble à $n$ éléments (à chaque tirage, on associe sa boule).

E 3 – **Tirage simultané** : Dans ce cas, l'ordre n'est pas important, et il ne peut pas y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat une partie à $p$ éléments de $[\![1,n]\!]$ (ou $p$-combinaison).
On pose $\Omega = \mathscr{P}_p\left([\![1,n]\!]\right)$, et alors
$$|\Omega| = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Rappelons également qu'une même expérience peut donner lieu à différents univers possible selon ce que l'on souhaite observer (par exemple : carte d'une main vs couleur seulement de la carte, ou bien résultat d'un dé vs parité de ce résultat, etc.)

C'est encore plus vrai pour des univers infinis : le cadre formel que l'on va se donner prévoit que certaines parties de l'univers $\Omega$ seulement soient « observables » (les événements), afin de définir une probabilité dans ce cadre plus général.

**Remarque**

**R 1** – Conformément aux habitudes probabilistes, on note, pour $A \subset \Omega$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire dans $\Omega$ de $A$. Cela n'a absolument rien à voir avec l'adhérence topologique, donc.

**Définition 1 : Tribu**

Soit $\Omega$ un ensemble. On appelle **tribu** sur $\Omega$ toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$

(ii) **Stabilité par passage au complémentaire** : $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

(iii) **Stabilité par réunion dénombrable** : Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $A$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathscr{A}$ ses **événements**.

**Exemple**

**E 4** – $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur $\Omega$ (dite **discrète**)

**E 5** – $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur $\Omega$ (dite **grossière**)

**E 6** – Si $A$ est une partie non vide de $\Omega$, distincte de $\Omega$, la plus petite tribu sur $\Omega$ contenant $A$ est $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$.

Le vocabulaire vu en première année reste valable :

- Si $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** (qui est bien un événement).
- L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**.
- On dit que deux événements $A$ et $B$ sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Ne pas confondre issue = résultat = réalisation avec événement !

D'après le programme officiel, *la manipulation de tribu n'est pas un objectif du programme* : elles servent de cadre théorique mais, dans la pratique, on n'attend pas nécessairement de les préciser.

**Propriété 1 : des tribus**

***Une tribu est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, par intersection finie.***
*Ainsi dit, si $\mathscr{A}$ est une tribu sur $\Omega$,*

*(i)* $\Omega \in \mathscr{A}$

*(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$,* $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

*(iii) Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$,* $\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$ *et* $\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

# 2 Probabilité

**Définition 2 : Probabilité**

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{A}$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{A} \quad \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) **$\sigma$-additivité** : Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles), $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

**Propriété 2 : d'une probabilité**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A$ et $B$ des événements.*

*(i)* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

*(ii) Si $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles,* $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

*Plus généralement,* $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$.

*(iii) Si $A \subset B$,* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.*Si $A$ et $B$ sont quelconques,* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

*(iv)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

*(v)* ***Croissance*** *: si $A \subset B$,* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

**Démonstration**

Prendre des $A_n$ vides.

**Remarque**

**R 2 –** Pour trois événements,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Et plus généralement, **Formule de Poincaré** (HP) : pour toute famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k-1} \sum_{I \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \mathbb{P}\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right).
\end{aligned}$$

qui peut se montrer par récurrence par exemple, ou, plus simplement, en remarquant que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}\right) = \dots$

**Propriété 3 : Probabilité d'une réunion au plus dénombrable**

*Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.*

**Démonstration**

C'est immédiat si $I$ est fini, et sinon, via une énumération de $I$, on se ramène à une somme sur $\mathbb{N}$ et à la $\sigma$-additivité. ■

**Définition 3 : Distribution de probabilités**

Soit $\Omega$ un ensemble. On appelle **distribution de probabilités** sur $\Omega$ toute famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par $\Omega$ et somme (finie) égale à $1$.

On appelle **support** d'une telle distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$.

**Propriété 4 : Support au plus dénombrable**

*Le support d'une distribution de probabilités est toujours au plus dénombrable.*

**Démonstration**

C'est une propriété connue des familles sommables. ■

## 3 Cas très simple : univers fini

Si $\Omega$ est fini, on prend généralement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, et la propriété de $\sigma$-additivité est équivalente à la propriété

Si $A$ et $B$ sont deux événements disjoints, alors $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

**Propriété 5 : Probabilité finie associée à une distribution**

*Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, $\mathbb{P}$ est entièrement définie par la donnée d'une distribution de probabilités $(p_{\omega_i})_{1\leqslant i\leqslant m}$ telle que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_{\omega_i}$. Et, pour toute partie $A$ de $\Omega$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

*Les probabilités des événements élémentaires déterminent donc $\mathbb{P}$.*

**Démonstration**

Comme en MP2I. ■

## 4 Cas simple : univers dénombrable

Ici, on garde la propriété de $\sigma$-additivité, que l'on ne peut plus remplacer par la simple additivité.

Ici encore, il n'y a pas d'obstacle à prendre la tribu « discrète », c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$. On obtient :

**Propriété 6 : Probabilité discrète associée à une distribution**

*Soit $\Omega$ un ensemble dénombrable. Pour toute distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, il existe une unique probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

*Cette probabilité vérifie*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

**Démonstration**

Analyse-synthèse. C'est une conséquence de ce qui a été vu dans le chapitre sur la sommabilité (sommation par paquets). ∎

Donc, encore une fois, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique par les probabilités des singletons. Pour un univers fini ou dénombrable, les tribus d'évènements n'ont donc pas grand intérêt.

# 5 Cas moins simple : univers non dénombrable

Dans le cas où l'univers est infini indénombrable c'est plus compliqué : on peut montrer que pour un tirage à pile ou face infini non dénombrable, modélisé par $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable par argument diagonal de Cantor), la seule valeur possible pour le probabilité d'un événement élémentaire est... 0.

Pourquoi ? Intuitivement, si la probabilité d'obtenir un pile est $p \in ]0,1[$, alors la probabilité d'obtenir $n$ piles de suite de va être $p^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$... Donc, il est légitime de penser que l'événement « obtenir que des piles » a une probabilité nulle, par exemple.

C'est donc moins simple, on en peut pas se contenter des événements élémentaires, mais complètement hors-programme.

# 6 Continuités croissante et décroissante

**Propriété 7 : Continuité croissante**

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}$$

*Alors*

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

**Remarque**

**R 3** – Continuité car $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est en quelque sorte la « limite » de la suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarquons aussi que $A_k = \bigcup\limits_{n=0}^{k} A_n$.

**Démonstration**

$\big(\mathbb{P}(A_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée donc convergente vers $\ell \in [0,1]$.

Or, on remarque, par croissance, que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$ en notant $A_{-1} = \varnothing$, donc par $\sigma$-additivité,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=-1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) = \ell - 0$$

par croissance puis télescopage. ∎

**Corollaire 1 : Limite d'une probabilité d'une réunion**

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

**Propriété 8 : Continuité décroissante**

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad A_{n+1} \subset A_n$$

*Alors*

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

**Démonstration**

Il suffit de passer au complémentaire. ■

**Corollaire 2 : Limite d'une probabilité d'une intersection**

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

## 7 Inégalité de Boole

**Propriété 9 : Inégalité de Boole**

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors, dans $[0,+\infty]$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**Remarque**

**R4** – Où, si la série à termes positifs $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on lira la formule $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant +\infty$, ce qui ne dit rien.

Si la série converge et a une somme $\geqslant 1$, le résultat ne dit rien non plus.

**Démonstration**

Par récurrence sur $n$, on montre facilement (comme en première année) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \geqslant \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(A_n)$ et on conclut en faisant $k \to +\infty$ et en utilisant le corollaire de la continuité croissante. ■

# 8 Négligeabilité

## a Événements négligeables

**Définition 4 : Événement négligeable**

On dit qu'un événement $A$ est **négligeable** lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

**Remarque**

R 5 – L'événement impossible est négligeable.
Un événement négligeable n'est pas en général impossible.

**Exemple**

E 7 – Dans le jeu de Pile ou Face infini, l'événement « la pièce donne Pile un nombre fini de fois » est négligeable.

**Propriété 10 : Réunion finie ou dénombrable**

*Une réunion (respectivement intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.*

**Démonstration**

Conséquence de l'inégalité de Boole. ■

**Propriété 11 : Partie d'un événement négligeable**

*Si $A$ et $B$ sont deux événements tel que $A \subset B$, si $B$ est négligeable, $A$ l'est.*

**Démonstration**

C'est la croissance. ■

## b Événements, propriétés presque sûr·e·s

**Définition 5 : Événement presque sûr**

Un événement $A$ est **presque sûr**, ou **presque certain**, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui équivaut à dire que $\overline{A}$ est négligeable.

Une propriété est dite **presque sûre** lorsque l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui ont cette propriété est un événement presque sûr.

**Propriété 12 : Réunion, intersection au plus dénombrable**

*Toute réunion (respectivement intersection) finie ou dénombrable d'événements presque sûrs l'est encore.*

# II Conditionnement et indépendance

Les notions vues en première année se généralise sans problème particulier.

## 1 Conditionnement

**Définition 6**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $B$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$** par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

*(Se lit en général « probabilité de $A$ sachant $B$ »)*

**Remarque**

R6 – ⚠ Il n'y a toujours pas d'« événement conditionnel $A|B$ » (élément de $\mathscr{A}$) : ce n'est qu'une notation signifiant qu'on se place en observateur de l'événement $A$ sachant que l'événement $B$ est déjà réalisé.
Mais la notation $\mathbb{P}_B$ peut aussi être trompeuse, car c'est la même que celle de la loi d'une variable aléatoire.

**Propriété 13 : Probabilité... conditionnée**

$\mathbb{P}_B : A \in \mathscr{A} \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{A})$.

**Démonstration**

Seule la $\sigma$-additivité demande un peu de travail, mais rien de bien sorcier : si les $A_n$ sont deux à deux disjoints, les $A_n \cap B$ le sont et $\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)$ permet de l'obtenir sans encombre. ■

... et donc toutes les propriétés des probabilités, toutes les formules qui vont suivre peuvent être appliquées à des probabilités conditionnelles.

Lorsque que plusieurs conditions s'enchaînent, il suffit de les intersecter : « $\mathbb{P}(A|B|C)$ » $= \mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$.

## 2 Probabilités composées

**Propriété 14 : Formule des probabilités composées**

*Soit* $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ *des événements de l'espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Remarque**

R7 – À nouveau, cela correspond à notre intuition : on réalise $A_1$, puis $A_2$ sachant que $A_1$ l'est, puis $A_3$ sachant que $A_1$ et $A_2$ le sont, etc. On se sert donc en général de cette formule lorsque l'on a des événements successifs, **chronologiques**.

**Démonstration**

Remarquons que comme pour tout $k < n$, $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k$, pour tout $k$, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$ et donc tous les termes ont un sens.

$$\mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_{i+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{i+1}\right)}{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_i\right)} = \mathbb{P}(A_1) \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

car le produit est télescopique. ■

## 3 Probabilités totales

**Définition 7 : Système complet et quasi-complet d'événements**

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $I$ un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système complet d'évènements** lorsque

$$(i \neq j) \implies \left(A_i \cap A_j = \varnothing\right) \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système quasi-complet d'évènements** lorsque

$$(i \neq j) \implies \left(A_i \cap A_j = \varnothing\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

**Remarque**

**R 8 –** Si on impose de plus les $A_i$ non vides, ce qui se fait parfois, $\{A_i\}_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$.

**R 9 –** Un système complet d'événement est quasi-complet, mais la réciproque est fausse.

**Propriété 15 : Formule des probabilités totales**

*Si $(A_i)_{i\in I}$ où $I$ est fini ou dénombrable est un système complet d'événements, alors pour tout événement $B$,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

*Si, de plus, pour tout $i$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

*Si certains événements sont négligeables, alors les $B \cap A_i$ le seront aussi et il suffit de remplacer la somme pour $i \in I$ par la somme pour $i \in J = \{i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) > 0\}$.*

**Démonstration**

Le fait d'avoir un sce permet d'écrire $B = \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$. ■

**Remarque**

**R 10 –** La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.

⚠ ne pas confondre $\mathbb{P}(B \cap A_i)$ et $\mathbb{P}(B \mid A_i)$ !

**Exercice 1 : CCINP 101**

**Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau $A$, $B$ et $C$.**
**À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.**
**Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.**
**L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n\in\mathbb{N}$.**

**On note $A_n$ l'événement «l'animal est en $A$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».**
**On note $B_n$ l'événement «l'animal est en $B$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».**
**On note $C_n$ l'événement «l'animal est en $C$ après son $n^{\text{ième}}$ trajet».**

**On pose $P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$.**

1. **(a) Exprimer, en le justifiant, $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.**
   **(b) Exprimer, de même, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.**
2. **On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$.**
   **(a) Justifier, sans calcul, que la matrice $A$ est diagonalisable.**
   **(b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de $A$ et déterminer le sous-espace propre associé.**
   **(c) Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.**
   **Remarque : le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé.**
3. **Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.**
   **Remarque : aucune expression finalisée de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ n'est demandée.**

---

1. (a) $(A_n,B_n,C_n)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
   $P(A_{n+1})=P(A_{n+1}|A_n)P(A_n)+P(A_{n+1}|B_n)P(B_n)+P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.

   donc $a_{n+1}=0a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$.
   (b) De même, $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$.
2. (a) $A$ est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.
   (b) $A+\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ donc rg $\left(A+\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3\right)=1$.
   Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de $A$ et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A)=2$.
   L'expression de $A+\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
   (c) Puisque $\mathrm{tr}(A)=0$, on en déduit que $1$ est une valeur propre de $A$ de multiplicité $1$.
   $A$ étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3=E_{-\frac{1}{2}}(A)\overset{\perp}{\oplus}E_1(A)$, donc que $E_1(A)=\left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.
   Donc $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

   En posant $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$, on a alors $D=P^{-1}AP$.
3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$

   Et donc on prouve par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$
   Or $A=PDP^{-1}$ donc $A^n=PD^nP^{-1}$.
   Donc $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$
   Or, d'après l'énoncé, $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$ donc :
   $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-\frac{1}{2})^n&0\\0&0&(-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

**Exercice 2 : CCINP 107**

**On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.**
**L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires.**
**L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.**
**On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :**

- **On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.**
- **On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.**
- **Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$.**
- **Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.**

**Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.**

1. **Calculer $p_1$.**
2. **Prouver que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. **En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $p_n$.**

---

1. Notons $U_1$ l'événement le premier tirage se fait dans l'urne $U_1$.
   Notons $U_2$ l'événement le premier tirage se fait dans l'urne $U_2$.
   $(U_1, U_2)$ est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

## 4 Formule de Bayes

**Propriété 16 : Formule de Bayes**

*Si $A, B$ sont des événements non négligeables, alors*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

*Si, de plus, $\overline{A}$ n'est pas négligeable,*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}.$$

*Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ ($I$ fini ou dénombrable) est un système complet d'événements non négligeables, on a*

$$\forall i\in I \qquad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in I}\mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

**Démonstration**

$\mathbb{P}(A \mid B)\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)$. ■

**Remarque**

**R 11** – Formule permettant de remonter le temps, appelée aussi formule de probabilité des causes.

**Exercice 3 : CCINP 105**

1. **Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.**
2. **On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).**
   **Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.**
   (a) **On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.**
   **Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?**
   (b) **Soit $n\in\mathbb{N}^*$.**
   **On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé $n$ fois et on obtient $n$ fois le chiffre 6.**
   **Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?**
   (c) **Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.**

---

1.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons $T$ l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons $A$ l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T,\overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.
   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :
   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T)+P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall k\in[\![1,n]\!]$, on note $A_k$ l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T,\overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.
   Alors d'après la formule de Bayes, on a :
   $$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T)+P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$
   Donc $p_n = \dfrac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.
Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

# III Événements indépendants

## 1 Couple d'événements indépendants

**Définition 8 : Indépendance de deux événements**

Deux événements $A$ et $B$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsque $A$ et $B$ sont indépendants.

**Propriété 17 : Caractérisation par probabilités conditionnelles**

*Deux événements $A$ et $B$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.*

**Remarque**

**R 12 –** Cela traduit bien notre intuition : que $B$ soit réalisé ou non, la probabilité de $A$ ne change pas.

**R 13 –** Bien sûr, si $\mathbb{P}(A) > 0$, cela s'écrit aussi $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

**R 14 –** ⚠ Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si $A$ et $B$ sont incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si $A$ et $B$ sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A \subset \overline{B}$ par exemple).

**R 15 –** Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste : elle dépend de la probabilité dont est muni $\Omega$.

**R 16 –** Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.

Naturellement, si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont. Plus précisément :

**Propriété 18 : Indépendance et complémentaire**

*Si deux événements $A$ et $B$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont indépendants, alors*
- *$A$ et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $B$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

**Démonstration**

- $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$.
- Idem.
- d'après les deux premières.

**Remarque**

**R 17 –** Si $A, B$ sont indépendants et $A, C$ aussi, on ne peut rien dire en général de $A$ et $B \cap C$ et de $A$ et $B \cup C$.

**Exercice 4**

**On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements $A$ « le premier dé amène un nombre pair », $B$ « le second dé amène un nombre pair » et $C$ « les deux dés amènent des nombres de même parité ».**

**Montrer que $A, B, C$ sont deux à deux indépendants mais que $A$ n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.** $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).$$

## 2 Famille d'événements indépendants

**Définition 9 : Événements indépendants vs 2 à 2 indépendants**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ avec $I$ fini ou dénombrable une famille d'événements.

- Les $A_i$ sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, $A_i$ et $A_j$ sont indépendant, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- Les $A_i$ sont dit **indépendants**, lorsque pour toute partie **finie** $J$ de $I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

**Remarque**

**R 18** – C'est une propriété très forte : elle demande de vérifier énormément conditions! En général, les espaces probabilisés sont construits pour avoir des événements indépendants et on n'a donc pas à le vérifier à la main.

**R 19** – L'indépendance est stable par extraction de sous-familles.

**Propriété 19 : Indépendants ⇒ 2 à 2 ⊥⊥**

*Si les $A_i$ sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.*
*La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.*

**Démonstration**

Prendre $|I| = 2$.
Dans l'exemple précédent, $A, B, C$ sont deux à deux indépendants mais ne sont pas indépendants globalement. ■

**Remarque**

**R 20** – Attention c'est l'inverse des nombres premiers / polynômes entre eux :

indépendants globalement ⇒ deux à deux.

**R 21** – Si les événements $A_i$ sont deux à deux indépendants et si pour tout $i$ on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les $B_i$ sont deux à deux indépendants d'après la propriété vue précédemment. Cela se généralise aux événements indépendants :

**Propriété 20 : Passages au complémentaire dans l'indépendance**

*Si les événements $A_i$ pour $i \in I$ sont indépendants et si pour tout $i \in I$ on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les $B_i$ sont indépendants.*

**Démonstration**

(réutiliser le cas de deux événements) On suppose $I$ fini, ce qui ne nuit pas à la généralité, car l'indépendance est celle de toute sous famille finie.

On suppose que $B_k = \overline{A_k}$ et si $i \neq k$, $B_i = A_i$ (il n'y a qu'un complémentaire).

Alors, si $J$ est une partie non vide de $I$,

- Soit $k \notin J$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(B_i)$.
- Si $k \in J$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J\setminus\{k\}} A_i \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J\setminus\{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)\\ &= (1-\mathbb{P}(A_k))\prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$

Puis récurrence sur le nombre de complémentaires. ■

**Exercice 5 : Indicatrice d'Euler**

**Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$ où $n$ est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$.**

1. **Quelle est la probabilité de $A_d$ ?**
2. **Soit $P$ l'ensemble des diviseurs premiers de $n$.**
   (a) **Démontrer que $(A_p)_{p\in P}$ est une famille d'événements indépendants.**
   (b) **En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble $A$ des nombres inférieurs ou égaux à $n$ et premiers avec $n$ (indicatrice d'Euler).**

---

1. $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{|A_d|}{|\Omega|} = \dfrac{\frac{n}{d}}{n} = \dfrac{1}{d}$.
2. (a) Si $p_1, \ldots, p_\ell$ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de $n$, comme ils sont premiers, $\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j} = A_{p_1\cdots p_\ell}$.
   $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1\cdots p_\ell}) = \dfrac{1}{p_1\cdots p_\ell} = \prod_{j=1}^{\ell}\mathbb{P}(A_{p_j})$.
   (b) Les $\overline{A_p}$ sont aussi indépendant, $A = \bigcap_{p\in P}\overline{A_p}$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p\in P}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$.

**Exercice 6**

**Si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :**

- $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

---

- Direct,
- $A_1, \ldots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \ldots, \overline{A_n}$ sont indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n}\overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.
- idem avec $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_p}, \overline{A_{p+1}}, \ldots, \overline{A_n}$.

# IV Variables aléatoires discrètes

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

## 1 Définition

**Définition 10 : Variable aléatoire discrète**

Soit $E$ un ensemble quelconque. Une application $X : \Omega \to E$ est appelée **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ lorsqu'elle vérifie

(i) $X(\Omega) = \operatorname{Im} X = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \in \mathscr{P}(E)$ est fini ou dénombrable.

(ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$ et est noté $(X = x)$.

Elle est dite **réelle** lorsque $E \subset \mathbb{R}$.

**Remarque**

**R 22** – La notation $(X = x)$ est un peu déroutante, cela revient par exemple à noter $\pi\mathbb{Z} = \sin^{-1}(\{0\}) = (\sin = 0)$.
Si $A$ est une partie de $E$, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.

**R 23** – On note aussi, pour une variable aléatoire réelle,

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$$

et on introduit de la même façon, $(X < x)$, $(X \geqslant x)$, $(X > x)$.

**R 24** – Enfin, si $f$ est une fonction définie sur $X(\Omega)$, on note $f(X)$ la fonction $f \circ X$. Est-ce une variable aléatoire ? Oui. Voir ci-après.

**R 25** – La deuxième condition est là pour qu'on puisse calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Si $x \in E \setminus X(\Omega)$, $(X = x) = \varnothing \in \mathscr{A}$ également.

**R 26** – On ne demande pas que $E$ soit fini ou dénombrable, seulement que $X(\Omega)$ le soit : si des valeurs de $E$ ne sont pas atteintes, on peut s'en débarrasser.
On ne demande pas non plus que l'univers $\Omega$ soit fini ou dénombrable.

**R 27** – Lorsque l'univers est fini ou dénombrable, on choisit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et toute fonction de $\Omega$ dans $E$ est une variable aléatoire discrète.

**Exemple : fondamental**

**E 8** – Si $F$ événement de l'univers $\Omega$, alors

$$\mathbb{1}_F : \left| \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in F \\ 0 & \text{si } \omega \notin F \end{cases} \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire.
$\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 1) = \mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{F}\right)$.

**Propriété 21 : SCE associé à une variable aléatoire**

$\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ *est un système complet d'événements appelé* ***système complet d'événements associé à*** $X$.

**Remarque**

**R 28** – On peut remplacer $X(\Omega)$ par $E$, ce qui revient à ajouter des ensembles vides.

**Démonstration**

Les $(X = x)$ sont deux à deux disjoints de réunion $\Omega$. ■

**Propriété 22 : Les parties de $X(\Omega)$ sont des événements**

*Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors pour toute partie $A$ de $X(\Omega)$, $(X \in A) \in \mathscr{A}$.*

**Démonstration**

$A$ est finie ou dénombrable et $A = \bigsqcup_{x \in A} \{x\}$ donc $(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x) \in \mathscr{A}$. ■

**Propriété 23 : Une fonction d'une v.a.d. est une v.a.d.**

*Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \to F$ est une fonction (ou application) quelconque, alors $f \circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.*

**Démonstration**

On a bien que $f(X) : \Omega \to F$ avec $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ fini ou dénombrable et si $y \in f(X)(\Omega)$,

$$(f(X) = y) = \{\omega \in \Omega,\ f(X(\omega)) = y\} = \left\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\right\} = \left(X \in f^{-1}(\{y\})\right) \in \mathscr{A}.$$ ■

## 2 Loi

On fixe $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

**Définition 11 : Loi d'une v.a.d.**

L'application

$$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est appelée **loi de $X$**.

**Propriété 24 : La loi est une probabilité**

*$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $\left(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega))\right)$.*

**Remarque**

**R 29** – Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il n'est pas choquant de choisir $\mathscr{P}(X(\Omega))$ comme tribu.

**Démonstration**

On revient à la définition :

- Pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$
- $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\sigma$**-additivité** : Si $(A_n)_n$ est suite de parties deux à deux disjointes de $X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (X \in A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_n)$$

**Propriété 25 : Expression de la loi de $X$**

*Si* $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}_X(\{a\}) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a)$.

**Démonstration**

Il suffit de décomposer dans le s.c.e adapté à $X$.

**Corollaire 3**

*La loi de $X$ est uniquement déterminée par la donnée de $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$, famille sommable de réels dans $[0,1]$ de somme $1$.*

**Remarque**

**R 30** – Ainsi, pour décrire la loi d'une variable aléatoire, on se contente de préciser $X(\Omega)$ et les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. On verra plus loin les lois usuelles à connaître parfaitement.

**Notation 1 : $\sim$**

Si $X$ et $Y$ suivent la même loi, on note $X \sim Y$.
Si $X$ suit une loi $\mathscr{L}$, on note $X \sim \mathscr{L}$.

**Exercice 7 : CCINP 109**

**Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches numérotées de 1 à $n$ et deux boules noires numérotées 1 et 2.**
**On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.**
**On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.**
**On note $Y$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.**

1. **Déterminer la loi de $X$.**
2. **Déterminer la loi de $Y$.**

---

1. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
   $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on note $B_i$ la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
   $\forall i \in [\![1,2]\!]$, on note $N_i$ la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
   On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
   Alors $\Omega$ est l'ensemble des permutations de $E$ et donc card$(\Omega) = (n+2)!$.

   $(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
   On a donc $n$ possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis $n$ possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=2) = \dfrac{2\times n\times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.

$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X=3) = \dfrac{2\times 1\times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

**Autre méthode** :
Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
$X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.

$(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X=1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n+2}$.

$(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
D'où $P(X=2) = \dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

$(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X=3) = \dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega) = [\![1,n+1]\!]$.
   Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.
   L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni $B_1$ ni $N_1$ et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est $B_1$ ou $N_1$.
   On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

   Donc $P(Y=k) = \dfrac{\dbinom{n}{k-1}\times(k-1)!\times 2\times(n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times(n+2-k)!}{(n+2)!}$
   Donc $P(Y=k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

   **Autre méthode** :
   $Y(\Omega) = [\![1,n+1]\!]$.

   On note $A_k$ l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang $k$".

   Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.
   On a : $(Y=k) = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}\cap\overline{A_k}$.

   Alors, d'après la formule des probabilités composées,
   $P(Y=k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.
   $P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{(n+2)-1}\times\dfrac{n-2}{(n+2)-2}\times\ldots\times\dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)}\times\dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

   $P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n-2}{n}\times\ldots\times\dfrac{n-k+2}{n-k+4}\times\dfrac{2}{n-k+3}$.

   $P(Y=k) = 2\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times\dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.
   $P(Y=k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

**Exercice 8 : CCINP 104**

**Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.**
**On dispose de $n$ boules numérotées de $1$ à $n$ et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.**
**On lance simultanément les $n$ boules.**
**Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.**
**Chaque compartiment peut éventuellement contenir les $n$ boules.**
**On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.**

1. **Préciser les valeurs prises par $X$.**
2. **(a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.**
   **(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de $X$.**
3. **(a) Calculer $E(X)$.**
   **(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.**

---

1. $X(\Omega)=[\![0,2]\!]$.

2. (a) Pour que l'événement $(X=2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des $n$ boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
Donc $P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   (b) Déterminons $P(X=1)$.
Pour que l'événement $(X=1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
Le compartiment restant vide étant choisi, on note $A$ l'événement : «les $n$ boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment $a$ et compartiment $b$) sans laisser l'un d'eux vide».

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$.
On note $A_k$ l'événement : « $k$ boules se placent dans le compartiment $a$ et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment $b$».

On a alors $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$.

On a $\forall\, k\in[\![1,n-1]\!]$, $P(A_k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Donc $P(X=1)=\binom{3}{1}P(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k)=3\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

Donc $P(X=1)=3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Donc $P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Enfin, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-1)$.

**Autre méthode** :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons $\Omega$ l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega=3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur $\Omega$.

(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.

Donc $P(X=2)=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc $2^n-2$ applications.
D'où $P(X=1)=\frac{3\times(2^n-2)}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)+2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
Donc $E(X)=3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) D'après 3.(a), $\lim_{n\to+\infty}E(X)=\lim_{n\to+\infty}3\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.
Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

**Propriété 26 : Loi de $f(X)$**

*La loi de $Y=f(X)$ est donnée par $\forall\, y\in f(X(\Omega))$,*

$$\mathbb{P}(Y=y)=\mathbb{P}(f(X)=y)=\mathbb{P}\left(X\in f^{-1}(\{y\})\right)=\sum_{x\ \mid\ f(x)=y}\mathbb{P}(X=x).$$

De la même manière, on obtient par exemple :

**Propriété 27 : Loi d'une somme, d'un produit**

*Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires,*

$$\mathbb{P}(X+Y=z)=\sum_{x,y\ \mid\ x+y=z}\mathbb{P}\big(X=x,Y=y\big)$$

$$\text{et}\quad \mathbb{P}(XY=z)=\sum_{x,y\ \mid\ xy=z}\mathbb{P}\big(X=x,Y=y\big)$$

# V FAMILLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ espace probabilisé.

## 1 Définition et lois

### a Couple de variables aléatoires discrètes

Les notions vues en première année se généralise sans problème particulier.

**Définition – Propriété 1**

Soit $X, Y$ variables aléatoires discrètes sur $\Omega$ à valeurs dans $E, E'$. L'application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète appelée **couple** $Z = (X, Y)$.

**Remarque**

**R 31 –** $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et il n'y a pas égalité en général.

**R 32 –** On note indifféremment $((X, Y) = (x, y))$ ou $(X = x) \cap (Y = y)$ ou $(X = x \text{ et } X = y)$ ou $(X = x, Y = y)$ ces événements.

**Démonstration**

$Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Pour tout $(x, y) \in Z(\Omega)$, $(Z = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y) \in \mathscr{A}$. ∎

**Propriété 28 : SCE associé à un couple**

*Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements $\big(((X, Y) = (x, y))\big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** $(X, Y)$.*

**Démonstration**

Les événements sont bien disjoints deux à deux et

$$\bigcup_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \Omega$$

car tout $\omega \in (X = X(\omega)) \cap (Y = Y(\omega))$. ∎

**Remarque**

**R 33 –** On sait donc que

- Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, le « couple »

$$(X, Y) \ : \ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

  est une variable aléatoire discrète.
- Si $Z : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \to F$ est une fonction quelconque, alors $f \circ Z$, notée $f(Z)$ est une variable aléatoire discrète.

Et constatons que donc, si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires discrètes réelles définies sur un même univers probabilisé, alors $X + Y$, $XY$, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes.
Bien sûr, il y aussi $\Gamma\left(\text{Arctan}\left(1 + X^2 + Y^2\right)\right)$, mais on n'a cité que quelques exemples fréquemment utiles.

Pour calculer les lois :

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,y \ | \ x+y=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}(XY = z) = \sum_{x,y \ | \ xy=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

### b Loi conjointe

**Définition 12 : Loi conjointe**

Soit $(X, Y)$ un couple de variable aléatoires discrètes. On appelle **loi conjointe** de $(X, Y)$ la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire $(X, Y)$.

**Remarque**

R 34 – Vu la propriété précédente, cette loi est déterminée par $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Lorsque les variables aléatoires sont finies, cette loi peut être représentée dans un tableau à double entrée.

**Exemple**

E 9 – On lance deux dés, $X$ est la v.a. égale au plus grand des nombres, $Y$ celle du plus petit. On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On obtient :

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | loi de $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 |
| 2 | 1/18 | 1/36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/12 |
| 3 | 1/18 | 1/18 | 1/36 | 0 | 0 | 0 | 5/36 |
| 4 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/36 | 0 | 0 | 7/36 |
| 5 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/36 | 0 | 9/36 |
| 6 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/36 | 11/36 |
| loi de $Y$ | 11/36 | 9/12 | 7/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 | (1) |

Remarquons qu'on obtient la loi de $X$ en sommant les lignes et celle de $Y$ en sommant les colonnes.

### c Lois marginales

**Définition 13 : Lois marginales**

Si $(X, Y)$ est un couple de variables aléatoires discrètes, les lois de $X$ et de $Y$ sont appelées **première et seconde lois marginales du couple.**

**Propriété 29 : Loi conjointe détermine lois marginales**

*La loi conjointe de $(X, Y)$ détermine les lois marginales de $(X, Y)$ mais la réciproque est fausse.*

**Démonstration**

$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_y ((X, Y) = (x, y))\right) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Idem pour $Y$.

Contre-exemple :

| X \ Y | 0 | 1 | loi de $X$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| 1 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| loi de $Y$ | 1/2 | 1/2 | (1) |

| X \ Y | 0 | 1 | loi de $X$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| loi de $Y$ | 1/2 | 1/2 | (1) |

### d Lois conditionnelles

**Définition 14 : Loi conditionnelle**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de $Y$ sachant** $(X = x)$ est la loi de $Y$ pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$.

Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

**Remarque**

R 35 – Les lois conditionnelles de $Y$ sachant $(X = x)$ et la loi de $X$ permettent de déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$ :

- Soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et alors $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \leqslant \mathbb{P}(X = x) = 0$ donc $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$,
- soit $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et
$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x).$$

**Exemple**

E 10 – Lois conditionnelles de $Y$ :

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 3/4 |
| 1 | 2/3 | 1/3 |

Loi conjointe de $(X, Y)$ :

| X \ Y | 0 | 1 | loi de $X$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/10 | 3/10 | 2/5 |
| 1 | 2/5 | 1/5 | 3/5 |
| loi de $Y$ | 1/2 | 1/2 | (1) |

## 2 Extension aux $n$-uplets

**Définition 15 : $n$-uplets de variables aléatoires**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-uplet de variables aléatoires discrètes. C'est encore une variable aléatoire discrète appelé **vecteur aléatoire discret** de dimension $n$.

La **loi conjointe** de $(X_1, \ldots, X_n)$ est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ où pour tout $i$, $x_i \in X_i(\Omega)$.

Les lois de $X_1, \ldots, X_n$ sont les **lois marginales** de $(X_1, \ldots, X_n)$.

**Définition 16 : Loi conditionnelle pour $n$ variables**

Si $x_1,\dots,x_{n-1}$ sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de $X_n$ sachant $(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout $x_n$.

**Remarque**

**R 36** – Lorsque l'on a la propriété

$$\mathbb{P}\left(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_1 = x_1,\dots,X_i = x_i\right) = \mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)$$

(phénomène sans mémoire), on dit que la famille $(X_1,\dots X_n)$ de variables aléatoires est **markovienne**.

# 3 Indépendance

## a Cas d'un couple de variable

**Définition 17 : Indépendance**

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

$X$ et $Y$ sont dites **indépendantes** si pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**Propriété 30 : Caractérisation par des événements élémentaires**

*$X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire*

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\ \mathbb{P}(Y = y).$$

**Démonstration**

Le sens $\Rightarrow$ est direct.

On suppose que pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y)\in A\times B} (X = x, Y = y)\right) = \sum_{(x,y)\in A\times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y\in B} \mathbb{P}(Y = y).$$

■

**Remarque**

**R 37** – Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, la donnée des lois marginales de $(X,Y)$ détermine sa loi conjointe.

**Propriété 31 : Caractérisation par les lois conditionnelles**

*Soit $(X,Y)$ couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre*

(i) *Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes.*

(ii) *Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)>0$, la loi de $X$ sachant $(Y=y)$ est la même que la loi de $X$.*

(iii) *Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=x)>0$, la loi de $Y$ sachant $(X=x)$ est la même que la loi de $Y$.*

**Démonstration**

Immédiat. ∎

**Propriété 32 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes**

*Si $X,Y$ sont des variables aléatoires indépendantes, $f,g$ définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

**Démonstration**

$(f(X)\in A)=\left(X\in f^{-1}(A)\right)$ et $(g(Y)\in B)=\left(Y\in f^{-1}(B)\right)$, ces derniers étant indépendants. ∎

**Exemple**

**E 11** – Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, $X^m$ et $Y^n$ le sont.

**Remarque**

**R 38** – En reprenant un calcul précédent, on obtient, si $X,Y$ indépendantes,

$$\mathbb{P}(X+Y=z)=\sum_{x,y\ \mid\ x+y=z}\mathbb{P}(X=x)\ \mathbb{P}(Y=y)$$

où l'on peut remplacer $X+Y$ (et $x+y$) par n'importe quelle fonction de $X$ et $Y$.

## b Variables aléatoires indépendantes

**Définition 18 : Variables aléatoires indépendantes**

Des variables aléatoires discrètes $X_1,\dots,X_n$ sont dites **indépendantes** lorsque pour toutes parties $A_1$ de $X_1(\Omega)$, …, $A_n$ de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1\in A_1)$, …, $(X_n\in A_n)$ le sont.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est une suite de variables aléatoire indépendantes lorsque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_1,\dots,X_n$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaiid).

**Propriété 33 : Caractérisation par des événements élémentaires**

*$X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1=x_1)$, …, $(X_n=x_n)$ le sont.*

**Démonstration**

Le sens $\Rightarrow$ est direct.

L'autre sens est similaire au cas des couples de variables aléatoires : on suppose que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, les événements $(X_1 = x_1)$, ..., $(X_n = x_n)$ sont indépendants.

Soit $(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, $I \subset [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in A_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x_i)_i \in \prod_{i\in I} A_i}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = x_i)\right)\right)\\ &= \sum_{(x_i)_i \in \prod_{i\in I} A_i} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = x_i)\right) = \sum_{(x_i)_i \in \prod_{i\in I} A_i}\left(\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i = x_i)\right)\\ &= \prod_{i\in I}\left(\sum_{x_i\in A_i}\mathbb{P}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i \in A_i).\end{aligned}$$

**Remarque**

**R 39** – $n$ expériences aléatoires indépendantes peuvent être modélisées par $n$ variables aléatoires indépendantes. Le résultat de la $i^e$ expérience est noté $X_i$ et

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n).$$

**R 40** – Comme pour les événements, indépendants $\Rightarrow$ indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse si $n > 2$.

**Exemple**

**E 12** – Si $X_1, X_2$ vaiid finies de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$. $X_3 = X_1 \times X_2$.

$$\mathbb{P}(X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc $X_3 \sim \mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.

Alors $X_1, X_2, X_3$ sont indépendantes deux à deux car $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = -1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

Donc $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3$ et par symétrie, $X_2 \perp\!\!\!\perp X_3$.

Pourtant, elles ne sont pas indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

**Propriété 34 : Fonctions de variables aléatoires indépendantes**

*Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ définie $X_n(\Omega)$, alors $\big(f_n(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.*

**Démonstration**

Similaire au cas de deux variables : $\big(f(X_i) \in B_i\big) = \big(X_i \in f^{-1}(B_i)\big)$.

**Propriété 35 : Lemme des coalitions**

*Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$, $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, $f$ définie sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et $g$ définie sur $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.*

*Alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.*

*Le résultat s'étant à plus de deux coalitions.*

**Démonstration**

Il suffit de remarquer que les variables aléatoires $Y = (X_1, \dots, X_m)$ et $Z = (X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes (ce qui ne pose pas vraiment de problème : il suffit de l'écrire) et d'appliquer la propriété précédente. ■

**Théorème 1**

*Soit $(\mathscr{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.*

*Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathscr{L}_n$.*

**Exemple**

E 13 – Un jeu de pile ou face infini se modélise (naturellement) par une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

**Démonstration : Admis**

■

# VI Lois usuelles

## 1 Loi Uniforme

**Définition 19 : Loi uniforme**

On dit que qu'une variable aléatoire **finie** $X$ suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où $n = |X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A) = \dfrac{|A|}{n}$.

On note alors $X \sim \mathscr{U}(n)$.

**Exemple**

E 14 – Si on tire un dé à $n$ faces ou si on tire une boule dans une urne qui en contient $n$ (numérotée), alors la variable aléatoire du résultat suit $\mathscr{U}(n)$.

**Remarque**

R 41 –

R 42 – ⚠ cela ne concerne pas de la probabilité $\mathbb{P}$ initiale : $\mathbb{P}_X$ peut être uniforme sans que $\mathbb{P}$ le soit.
Si, par exemple, on lance un dé à 6 faces truqué tel que l'on obtient $1$ ou $6$ avec une probabilité $1/4$ et $2,3,4$ ou $5$ avec probabilité $1/8$, $X$ variable aléatoire $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ donc $X \sim \mathscr{U}(2)$ alors que $\mathbb{P}$ n'est pas la probabilité uniforme.

**R 43 –** On a donc $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{\delta_x}{n}$.

## 2 Loi de Bernoulli

**Définition 20 : Loi de Bernoulli**

On dit que $X$ suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0,1]$ lorsque $X$ est à valeurs dans $E = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = q = 1-p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

**Exemple : Situation type**

**E 15 –** Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

**Propriété 36 : Ce sont les fonctions indicatrices**

*Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$ sont exactement les fonctions indicatrices des parties $F$ de $\Omega$ telles que $\mathbb{P}(F) = p$.*

**Démonstration**

Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$, alors si $F = (X=1)$, $X = \mathbb{1}_F$.
Réciproquement, si $X = \mathbb{1}_F$, $X(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(F)$. ∎

**Remarque**

**R 44 –** Deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si $(X=1)$ et $(Y=1)$ le sont.

**R 45 –** Si $X$ prend deux valeurs $a$ et $b$ distinctes, alors $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X=b)$.
Autrement dit, $X = a + (b-a)Y$ où $Y$ suit une loi de Bernoulli.

## 3 Loi binomiale

Lors de la répétition de $n$ expériences de Bernoulli indépendantes, la probabilité d'avoir $k \leqslant n$ succès s'écrit $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où $p$ est la probabilité d'un succès.

Si on appelle $X$ la variable aléatoire du nombre de succès, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, alors elle suit la loi donnée par

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarquons que l'on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_i$ est la variable aléatoire de Bernoulli succès à la $i^{\text{e}}$ répétition.

**Définition 21 : Loi binomiale**

On dit que $X$ suit une **loi binomiale de paramètre** $(n,p)$ **où** $p\in[0,1]$ lorsque $X$ est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

avec $q=1-p$. On note alors $X\sim\mathscr{B}(n,p)$.

**Exemple : Situation type**

E 16 – Nombre de succès dans la répétition de $n$ expériences de Bernoulli indépendantes.

**Remarque**

R 46 – $\mathbb{P}_X=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\delta_k$.

R 47 – $\mathscr{B}(1,p)=\mathscr{B}(p)$.

R 48 – La formule du binôme redonne (ou se retrouve par) $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

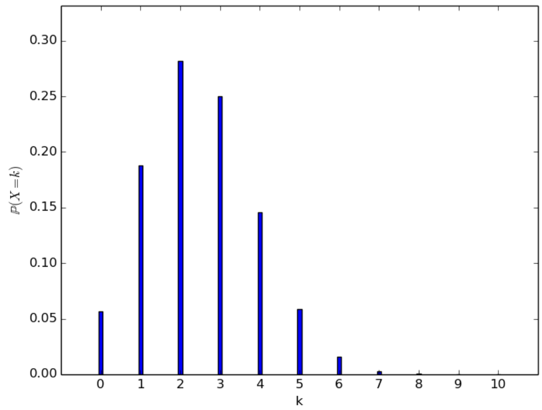


Figure 1 – Loi $\mathscr{B}(10,1/4)$

**Exercice 9**

Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ alors $Y=n-X\sim\mathscr{B}(n,q)$.

## 4 Loi géométrique

Soit $p\in]0,1[$.

On lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité $p$. Les lancers sont indépendants.

Soit $X_n$ la variable aléatoire du succès au $n^e$ lancer : elle vaut $1$ si c'est pile, et $0$ sinon.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vadiid, toutes de loi $\mathscr{B}(p)$.

Soit $X$ la variable aléatoire du rang du premier succès : pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*,\ X_k(\omega)=1\right\}\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- $(X>n)=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=0)$, donc, par indépendance,
$$\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^n.$$
- $(X=n)=(X_n=1)\cap\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k=0)$, donc, par indépendance,
$$\mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}.$$
- En passant au contraire,
$$\mathbb{P}(X\leqslant n)=1-(1-p)^n.$$
- Soit $A$ l'événement « N'obtenir que des faces », et $A_n=(X>n)$.
  Alors $(A_n)$ est décroissante et $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$.
  Par continuité décroissante,
$$\mathbb{P}(A_n)=(1-p)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(A)=0.$$

**Définition 22 : Loi géométrique**

Soit $p \in ]0,1[$ et $X$ une variable aléatoire discrète. On dit que $X$ suit une **loi géométrique** de paramètre $p$ si $X$ est à valeurs $\boxed{\text{dans } \mathbb{N}^*}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

**Remarque**

**R 49 –** Première loi dénombrable du programme. On vérifie bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

**R 50 –** De nouveau, on calcule (à savoir faire !)

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} (x = k)\right) = \cdots = (1-p)^n.$$

**Exemple : Situation type**

**E 17 –** Le rang du premier succès dans une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p$ suit $\mathcal{G}(p)$.

# 5 Loi de Poisson

**Définition 23 : Loi de Poisson**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X$ une variable aléatoire discrète. On dit que $X$ suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda$ si $X$ est à valeurs $\boxed{\text{dans } \mathbb{N}}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

**Remarque**

**R 51 –** On vérifie bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

# 6 Propriétés des lois usuelles

## a Somme de $n$ vaiid de Bernoulli

**Propriété 37 : Importante !**

*Si $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$, alors*

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

**Démonstration**

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\} \\ x_1 + \cdots + x_n = k}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Remarque**

**R 52** – Plus généralement, si les $X_i$ indépendantes suivent $\mathscr{B}(n_i, p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(\sum n_i, p)$.

### b Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

**Propriété 38 : Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales**

*Soit $\lambda > 0$, $(p_n)_n \in ]0,1[^{\mathbb{N}}$ tel que $np_n \to \lambda$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles.*
*On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$.*

*Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.*

**Remarque**

**R 53** – Une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ (qui peut être vue comme nombre de succès dans la répétition de $n$ épreuve de Bernoulli avec probabilité $p$ de succès) peut donc être approchée par une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$ à condition que $n$ soit grand et $p = \dfrac{\lambda}{n}$ soit petit.

La loi de Poisson est qualifiée de **loi des événements rares**.

**Démonstration**

On vérifie que lorsque $n \to +\infty$, $\mathbb{P}(X_n = k) \sim \dfrac{(np_n)^k(1-p_n)^n}{k!(1-p_n)^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$. ■

## 7 Exercices CCINP

**Exercice 10 : CCINP 98**

**Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers $n$ correspondants distincts.**

**On admet que les $n$ appels constituent $n$ expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p$ ($p \in ]0,1[$).**

**Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.**

1. **Donner la loi de $X$. Justifier.**
2. **La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.**
   (a) **Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.**
   (b) **Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.**
   **Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.**
   (c) **Déterminer l'espérance et la variance de $Z$.**

---

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée $n$ fois et ces $n$ épreuves sont indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité $p$ (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).
   La variable $X$ considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres $(n, p)$.
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y = k | X = i) = \left\{ \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} \text{ si } k \in [\![0, n-i]\!] 0 \text{ sinon} \right.$$

(b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i | X = i)P(X = i)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} \left(p(2-p)\right)^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1 - p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
$Z$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

**Remarque** : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(c) D'après le cours, comme $Z$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors, $E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\left(1 - p(2-p)\right) = np(2-p)(p-1)^2$.

**Exercice 11 : CCINP 95**

**Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.**

1. **Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.**
   **On note $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.**
   **On note $Y$ le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.**
   **(a) Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.**
   **(b) Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.**
2. **Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.**
   **(a) Déterminer la loi de $X$.**
   **(b) Déterminer la loi de $Y$.**

---

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
   Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
   Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$).
   La variable $X$ considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \frac{1}{5})$.

   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ et : $\forall\, k \in [\![0, 5]\!]$, $P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5 - X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$.
   On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0, 5]\!]\}$ .
   Et on a $\forall\, k \in [\![0, 5]\!]$, $P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

   $Y = 5X - 15$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$.

   De même, $Y = 5X - 15$, donc $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$.
2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.

(a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de $X$.
$X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
Notons $A$ l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
$\Omega$ est constitué de toutes les parties à 5 éléments de $A$. Donc $\operatorname{card}\Omega = \binom{10}{5}$.

Soit $k \in [\![0,2]\!]$.
L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire $k$ boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne.
Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.
Donc : $\forall k \in [\![0,2]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,2]\!]\}$ .
Et on a $\forall k \in [\![0,2]\!]$, $P(Y = 5k-15) = P(X = k) = \dfrac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

# VII Espérance

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

## 1 Définition

**Définition 24 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle positive**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
L'**espérance de** $X$ est, par définition, dans $[0, +\infty]$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivant la sommabilité ou non de la famille réelle positive $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x \in X(\Omega)}$.
Lorsque cette famille est sommable, $X$ est dite d'**espérance finie** $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ et on note $X \in L^1$.

**Propriété 39 : Cas d'une variable aléatoire entière**

*Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

**Démonstration**

C'est de la sommation par paquet (Fubini) positif :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)k = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+} \infty\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

■

**Définition 25 : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle ou complexe discrète.

Lorsque la famille $(\mathbb{P}(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que $X$ **est d'espérance finie**, on note $X \in L^1$ et on définit son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x.$$

Dans le cas contraire, $X$ n'a pas d'espérance (pas plus infinie que finie)

Lorsque $X$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X)=0$, $X$ est dite **centrée**.

**Remarque**

**R 54 –** Une expression équivalente à « $X$ est d'espérance finie » est « $X$ a un moment d'ordre 1 ».

**R 55 –** Une variable aléatoire réelle finie est toujours d'espérance finie (programme de MP2I).

**R 56 –** Une variable aléatoire à valeurs dénombrables $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=x_n)x_n$ converge **absolument**, et alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=x_n)x_n$.

**R 57 –** Ne pas confondre « centrée » et « symétrique » : si $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=-6)=1/4$, la variable aléatoire $X$ est bien centrée. Pour autant, $X$ et $-X$ n'ont pas même loi.

# 2 Théorème de transfert

**Théorème 2 : de transfert**

*Soit $X$ un variable aléatoire discrète, $f$ une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles.*

*$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\ f(x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas*

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x).$$

**Remarque**

**R 58 –** Pas besoin de connaître la loi de $f(X)$ !

**Démonstration**

Pas si difficile : il s'agit d'une application du théorème de sommation par paquets, en partitionnant $X(\Omega)$ par les $I_y = f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in f(X)(\Omega)$ (et en ajoutant des valeurs absolues pour la sommabilité : $\mathbb{P}(f(X)=y)\,|y| = \sum_{x\in I_y} \mathbb{P}(X=x)\,|f(x)|$).

Cela donne l'équivalence et permet de calculer

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} \left( \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X=x) \right) y = \sum_{\substack{(x,y)\in f(X(\Omega))\times X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X=x) f(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x) \quad \blacksquare$$

**Corollaire 4 : Espérance du module**

*$X$ a une espérance finie si et seulement si $|X|$ a une espérance finie.*

*Le cas échéant, $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,|x|$.*

**Corollaire 5 : Sur un univers fini ou dénombrable**

*Uniquement dans le cas où* $\Omega$ *est fini ou dénombrable,* $X$ *est d'espérance finie si et seulement si* $\left(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ *est sommable et dans ce cas*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

**Remarque**

**R 59 –** Vu en MP2I dans le cas fini.

**Démonstration**

C'est un peu astucieux ! Considérons la variable aléatoire $Y = \mathrm{id}_\Omega$ et $f = X$ alors, le théorème précédent dit que $X = X\circ\mathrm{id} = f(Y)$ est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(Y=\omega)X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega} = \left(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\circ Y) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(Y=\omega)X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

Autre démonstration possible similaire à celle du théorème de transfert, pour tout $x\in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} \mathbb{P}(\{\omega\})$ donc, par sommation par paquets (cas positif, dans $[0,+\infty]$), $\Omega = \bigsqcup_{x\in X(\Omega)} (X=x)$,

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,|x| = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} \mathbb{P}(\{\omega\})\,|x| = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})\,|X(\omega)|$$

car $x$ est uniquement déterminé par $\omega$, d'où l'équivalence entre $X$ d'espérance finie et $\left(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ est sommable, et, avec le même calcul sans les modules,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} \mathbb{P}(\{\omega\})x = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

■

**Exercice 12 : CCINP 97**

**Soit** $(X,Y)$ **un couple de variables aléatoires à valeurs dans** $\mathbb{N}^2$ **dont la loi est donnée par :**

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. **Déterminer les lois marginales de** $X$ **et de** $Y$.
   **Les variables** $X$ **et** $Y$ **sont-elles indépendantes ?**
2. **Prouver que** $E\left[2^{X+Y}\right]$ **existe et la calculer.**

---

On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

Or, $\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}. \qquad (\star)$$

De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}. \qquad (\star\star)$$

Donc, d'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on en déduit que $P(Y=k)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Pour des raisons de symétrie, $X$ et $Y$ ont la même loi et donc $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\frac{\left(\frac{1}{2}+j\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes car $P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.

2. Posons $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{j,k}=2^{j+k}P\big((X,Y)=(j,k)\big)$.

   On a $a_{j,k}=\frac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}+\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

   $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}=\frac{1}{k!}$.

   De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{k}{k!}$.

   Ensuite, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}=\mathrm{e}$.

   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right]=2\mathrm{e}$.

## 3 Propriétés de l'espérance

Une espérance peut être vue comme une intégrale, ce qui rend toutes ces propriétés naturelles.

**Propriété 40 : de l'espérance**

*$X$ et $Y$ désignent deux variables aléatoires réelles ou complexes discrètes.*

(i) *Si $X$ est constante presque sûrement, c'est-à-dire qu'on a $a\in\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{P}(X=a)=1$, alors elle est d'espérance finie $\mathbb{E}(X)=a$.*

(ii) ***Linéarité*** *: si $X,Y\in L^1$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $X+\lambda Y\in L^1$ et*

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y).$$

(iii) ***Positivité*** *: si $X\in L^1$ est à valeurs réelles, positive presque sûrement ie $\mathbb{P}(X\geqslant 0)=1$, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.*
***Positivité améliorée*** *: si $X$ est à valeurs réelles, positive presque sûrement et si $X$ est nulle presque sûrement.*

(iv) ***Croissance*** *: si $X,Y\in L^1$ sont à valeurs réelles et si $X\leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

(v) *Si $X\in L^1$, $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée et appelée* ***variable aléatoire centrée associée à*** *$X$.*

(vi) ***Inégalité triangulaire*** *: Si $X\in L^1$, $|X|\in L^1$ et*

$$|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|).$$

(vii) *Si $Y\in L^1$ et $|X|\leqslant Y$, alors $X\in L^1$ et $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*
*En particulier, si $X$ est bornée, elle est d'espérance finie.*

**Démonstration**

(i) Immédiat.

(ii) **Linéarité** : Soit $Z=(X,Y)$ variable aléatoire discrète à valeurs dans $E=X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Soit $f:\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+\lambda y\end{array}\right.$ Alors $T=X+\lambda Y=f(Z)$.

D'après le théorème de transfert, $T$ est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)(x+\lambda y)\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable.

Or, dans $[0,+\infty]$,

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\left|x+\lambda y\right| &\leqslant \sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\left|x\right|+\left|\lambda\right|\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\left|y\right| \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\right)\left|x\right|+\left|\lambda\right|\sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\right)\left|y\right| \text{ (par thm de Fubini positif)} \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\left|x\right|+\left|\lambda\right|\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=y)\left|y\right| \\ &< +\infty \qquad \text{(car } X,Y\in L^1\text{)}\end{aligned}$$

Donc $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x\right)_{(x,y)\in E}$, $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)y\right)_{(x,y)\in E}$ et $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)(x+\lambda y)\right)_{(x,y)\in E}$ sont sommables, et avec les mêmes utilisation du théorème de Fubini, et la formule de transfert, on obtient $X+\lambda Y\in L^1$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+\lambda Y) &= \sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\left(x+\lambda y\right)=\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)x+\lambda\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\left|y\right| \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)x+\lambda\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=y)y=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

(iii) **Positivité** : Si $X$ est positive presque sûrement, pour tout $x\in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x)x\geqslant 0$ donc $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.
Si, de plus, $\mathbb{E}(X)=0$, alors pour tout $x\in X(\Omega)$, $x=0$ ou $\mathbb{P}(X=x)=0$. Donc $\mathbb{P}(X=0)=1$ : $X$ est nulle presque partout.

(iv) **Croissance** : $Y-X\geqslant 0$ presque sûrement, d'espérance finie : utiliser la linéarité.

(v) Conséquence de la linéarité de de l'espérance d'une variable aléatoire constante.

(vi) **Inégalité triangulaire** : $|X|$ est d'espérance finie par théorème de transfert, puis il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire d'une somme de famille sommable.

(vii) $Y$ est d'espérance finie, donc $(y\mathbb{P}(Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$ est sommable.
Soit $f_1:(x,y)\mapsto x$, $f_2:(x,y)\mapsto y$ et $Z=(X,Y)$.
On a $X=f_1(X,Y)=f_1(Z)$ donc la formule de transfert dit que $X$ a une espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(Z=(x,y)f_1(x,y))_{(x,y)\in Z(\Omega)}=(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ est sommable.
Mais si $(x,y)\in Z(\Omega)$, il existe $\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)=x$ et $Y(\omega)=y$ donc $|x|\leqslant y$. Alors

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)\,|x|\leqslant\mathbb{P}(X=x,Y=y)y=\mathbb{P}(X=x,Y=y)f_2(x,y).$$

Mais comme $Y=f_2(X,Y)$ a une espérance finie, le théorème de transfert nous dit que $(\mathbb{P}(Z=(x,y)f_2(x,y))_{(x,y)\in Z(\Omega)}=(\mathbb{P}(X=x,Y=y)y)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ est sommable.
Donc $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ l'est et $X$ a une espérance finie.
On conclut en invoquant l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'espérance. ■

**Corollaire 6 : Espace vectoriel $L^1$**

*L'ensemble $L^1$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ admettant une espérance finie est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $X\mapsto\mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire sur $L^1$.*

# 4 Espérances des lois usuelles

**Propriété 41 : Espérance des lois usuelles**

*(i)* *Si* $X \sim \mathscr{B}(p)$, *alors* $\mathbb{E}(X) = p$.

*(ii)* *Si* $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, *alors* $\mathbb{E}(X) = np$.

*(iii)* *Si* $X \sim \mathscr{G}(p)$, *alors* $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.

*(iv)* *Si* $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, *alors* $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

**Remarque**

**R 60** – L'espérance d'une loi uniforme est la moyenne arithmétiques des valeurs (en nombre fini) prises par la variable aléatoire.

**Démonstration**

Dans tous les cas, la variable aléatoire est à valeurs réelles positives.

(i) $\mathbb{E}(X) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0$.

(ii) L'espérance ne dépendant que de la loi on peut se placer dans le cas particulier où $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors,
$$\mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X_1) = np.$$

(iii) On calcule en reconnaissant la dérivée d'une série entière géométrique convergente, avec $1-p \in ]0,1[$,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

(iv) On calcule, en reconnaissant cette fois une série exponentielle
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$ ■

**Corollaire 7 : Cas d'une fonction indicatrice**

*Soit* $A$ *un événement de notre tribu* $\mathscr{A}$. *Alors* $\mathbb{1}_A$ *a une espérance finie et* $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

**Exercice 13 : Formule de Poincaré**

**En remarquant que** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = 1 - \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}}\right)$**, prouver la formule de Poincaré.**

---

On continue le calcul
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n (1-\mathbb{1}_{A_i})\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|-1}\prod_{i\in I}\mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I}A_i}\right)$$
$$= \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I}A_i}\right) = \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right).$$

# 5 Exercices CCINP

**Exercice 14 : CCINP 102**

**Soit** $N \in \mathbb{N}^*$. **Soit** $p \in ]0,1[$. **On pose** $q = 1-p$.

**On considère** $N$ **variables aléatoires** $X_1, X_2, \cdots, X_N$ **définies sur un même espace probabilisé** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, **indépendantes et de même loi géométrique de paramètre** $p$.

1. **Soit** $i \in [\![1,N]\!]$. **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$. **Déterminer** $P(X_i \leqslant n)$, **puis** $P(X_i > n)$.

**2. On considère la variable aléatoire $Y$ définie par $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall\omega\in\Omega$, $Y(\omega)=\min(X_1(\omega),\cdots,X_N(\omega))$, $\min$ désignant « le plus petit élément de ».**

**(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y>n)$.**
**En déduire $P(Y\leqslant n)$, puis $P(Y=n)$.**

**(b) Reconnaître la loi de $Y$. En déduire $E(Y)$.**

---

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$.
$X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i\leqslant n)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X_i=k)=\sum\limits_{k=1}^{n}pq^{k-1}=p\dfrac{1-q^n}{1-q}=1-q^n$.
Donc $P(X_i>n)=1-P(X_i\leqslant n)=q^n$.

2. (a) $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$P(Y>n)=P((X_1>n)\cap\cdots\cap(X_N>n))$
Donc $P(Y>n)=\prod\limits_{i=1}^{N}P(X_i>n)$ car les variables $X_1,\cdots,X_N$ sont indépendantes.
Donc $P(Y>n)=\prod\limits_{i=1}^{N}q^n=q^{nN}$.
Or $P(Y\leqslant n)=1-P(Y>n)$
donc $P(Y\leqslant n)=1-q^{nN}$.

Calcul de $P(Y=n)$ :
Premier cas : si $n\geqslant 2$.
$P(Y=n)=P(Y\leqslant n)-P(Y\leqslant n-1)$.
Donc $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
Deuxième cas : si $n=1$.
$P(Y=n)=P(Y=1)=1-P(Y>1)=1-q^N$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\left(1-(1-q^N)\right)^{n-1}(1-q^N)$.
On en déduit que $Y$ suit une loi géométrique de paramètre $1-q^N$.
Donc, d'après le cours, $Y$ admet une espérance et $E(Y)=\dfrac{1}{1-q^N}$.

**Exercice 15 : CCINP 103**

**Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.**
**Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé.**

**1. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in(]0,+\infty[)^2$.**
**Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.**
**On suppose que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.**
**Déterminer la loi de $X_1+X_2$.**

**(b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1+X_2$.**

**2. Soit $p\in]0,1]$. Soit $\lambda\in]0,+\infty[$.**
**Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.**
**On suppose que $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.**
**On suppose que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $X$ sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre $(m,p)$.**
**Déterminer la loi de $X$.**

---

1. (a) $X_1(\Omega)=\mathbb{N}$ et $X_2(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $(X_1+X_2)(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $(X_1+X_2=n)=\bigcup\limits_{k=0}^{n}((X_1=k)\cap(X_2=n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).

Donc

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2=n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left((X_1=k)\cap(X_2=n-k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\times e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi $X_1+X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

**Remarque** : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

(b) $X_1+X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1+X_2)=\lambda_1+\lambda_2$ et $V(X_1+X_2)=\lambda_1+\lambda_2$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\sum_{m=0}^{+\infty} P\left((X=k)\cap(Y=m)\right)=\sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X=k)P(Y=m)$.

   Or, par hypothèse,

$$\forall m\in\mathbb{N},\ P_{(Y=m)}(X=k)=\begin{cases}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} & \text{si } k\leqslant m\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

   Donc

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

   Ainsi $X\sim\mathscr{P}(\lambda p)$.

**Exercice 16 : CCINP 106**

**$X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$ où $p\in]0,1[$ et $q=1-p$.**

**On considère alors les variables $U$ et $V$ définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.**

1. **Déterminer la loi du couple $(U,V)$.**
2. **Déterminer la loi marginale de $U$.**
   **On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.**
3. **Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de $V$.**
4. **$U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?**

---

1. $(U,V)(\Omega)=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } m\geqslant n\}$. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\geqslant n$.

   **Premier cas : si** $m=n$

   $P((U=m)\cap(V=n))=P((X=n)\cap(Y=n))=P(X=n)P(Y=n)$ car $X$ et $Y$ sont indépendantes.

   Donc $P((U=m)\cap(V=n))=p^2q^{2n}$.

   **Deuxième cas : si** $m>n$

   $P((U=m)\cap(V=n))=P([(X=m)\cap(Y=n)]\cup[(X=n)\cap(Y=m)])$

   Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :

   $P((U=m)\cap(V=n))=P\left((X=m)\cap(Y=n)\right)+P\left((X=n)\cap(Y=m)\right)$.

   Or les variables $X$ et $Y$ suivent la même loi et sont indépendantes donc

   $P((U=m)\cap(V=n))=2P(X=m)P(Y=n)=2p^2q^{n+m}$.

   **Bilan** : $P((U=m)\cap(V=n))=\begin{cases}p^2q^{2n} & \text{si } m=n\\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

2. $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
$P(U = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((U = m) \cap (V = n))$. ( loi marginale de $(U, V)$ )
Donc d'après 1., $P(U = m) = \sum_{n=0}^{m} P((U = m) \cap (V = n)) \quad (*)$
**Premier cas** : $m \geqslant 1$
D'après $(*)$, $P(U = m) = P((U = m) \cap (V = m)) + \sum_{n=0}^{m-1} P((U = m) \cap (V = n))$.
Donc $P(U = m) = p^2 q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} = p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \sum_{n=0}^{m-1} q^n = p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \frac{1-q^m}{1-q} = p^2 q^{2m} + 2pq^m(1-q^m)$
Donc $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
**Deuxième cas** : $m = 0$
D'après $(*)$ et 1., $P(U = 0) = P((U = 0) \cap (V = 0)) = p^2$.
**Bilan** : $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
3. $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(W = n) = P(V = n - 1) = pq^{2(n-1)}(1 + q) = (1 - q)q^{2(n-1)}(1 + q)$.
Donc $P(W = n) = (1 - q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
Donc $W$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
Donc, d'après le cours, $E(W) = \frac{1}{1-q^2}$. Donc $E(V) = E(W - 1) = E(W) - 1 = \frac{q^2}{1-q^2}$.
4. $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$ et $P(U = 0)P(V = 1) = p^3 q^2(1 + q) \neq 0$. Donc $U$ et $V$ ne sont pas indépendantes.

**Exercice 17 : CCINP 108**

**Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :**
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. **Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.**
2. **(a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de $X$.**
   **(b) Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.**
3. **Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?**
4. **Calculer $P(X = Y)$.**

---

1. $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $i \in \mathbb{N}$.
$\sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
Or $P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$ donc $P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e} 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e} 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$.
$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.
$\sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \sum_{i \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.
Or $P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$.
Donc $P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e} 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e}\, j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.
Conclusion : $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(Y = j) = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!}$.

2. (a) On pose $Z = X + 1$.
$Z(\Omega) = N^*$.
De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = n) = P(X = n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Donc $Z$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.
Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = 2 - 1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

(b) $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.

3. On a : $\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

4. $(X = Y) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} ((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}}\frac{1}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

**Exercice 18 : CCINP 111**

**On admet, dans cet exercice, que :** $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ **converge et** $\forall\, x \in ]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

**Soit** $p \in ]0,1[$.
**Soit** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **un espace probabilisé.**
**Soit** $X$ **et** $Y$ **deux variables aléatoires définies sur** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **et à valeurs dans** $\mathbb{N}$.
**On suppose que la loi de probabilité du couple** $(X,Y)$ **est donnée par**

$$\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \textbf{si } k \leqslant n\\ 0 & \textbf{sinon}\end{cases}$$

1. **Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.**
2. **(a) Déterminer la loi de** $Y$.
   **(b) Prouver que** $1+Y$ **suit une loi géométrique.**
   **(c) Déterminer l'espérance de** $Y$.
3. **Déterminer la loi de** $X$.

---

1. On remarque que $\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=k)\cap(Y=n)) \geqslant 0$.
$(X,Y)(\Omega) = \left\{(k,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } k\leqslant n\right\}$.
Posons $\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2$, $p_{k,n} = P((X=k)\cap(Y=n))$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_{k,n}$ converge (car un nombre fini de termes non nuls).
Et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n 2^n = p(1-p)^n$.
De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p(1-p)^n = p\sum\limits_{n\geqslant 0}(1-p)^n$ converge (série géométrique convergente car $(1-p)\in]0,1[$).
Et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = p\dfrac{1}{1-(1-p)} = 1$.
Donc on définit bien une loi de probabilité.

2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
$P(Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)

Donc, d'après les calculs précédents, $P(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n$.

C'est-à-dire, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(Y=n)=p(1-p)^n$.

(b) Posons $Z=1+Y$.

$Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Z=n)=P(Y=n-1)=p(1-p)^{n-1}$.

Donc $Z$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

(c) D'après la question précédente, $E(Z)=\dfrac{1}{p}$.

Or $Y=Z-1$ donc $E(Y)=E(Z)-1$ et donc $E(Y)=\dfrac{1-p}{p}$.

3. $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. $P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)

Donc $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^{n-k}$.

Donc, d'après les résultats admis dans l'exercice, $P(X=k)=p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}(1-p)\right)^{k+1}}$

C'est-à-dire $P(X=k)=p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$.

Donc, $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$.

## 6 Espérance et indépendance

**Propriété 42 : Espérance et indépendance**

*Soit $X, Y\in L^1$ indépendantes. Alors $XY\in L^1$, et*

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

*Réciproque fausse en général.*

*Plus généralement, si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires **indépendantes** d'espérance finie, alors $\prod_{i=1}^{n}X_i$ l'est et*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i).$$

**Démonstration**

On utilise le théorème de transfert appliquée à $f:(x,y)\mapsto xy$.

$f(X,Y)=XY$ est d'espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)xy)_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}$ est sommable, ce qui équivaut, en ajoutant des zéros, à la sommabilité de $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)xy)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}=(\mathbb{P}(X=x)x\times\mathbb{P}(Y=y)y)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ par indépendance.

On est ramenée à une « suite double produit » qui est bien sommable car $X$ et $Y$ ont des espérance finies et dont la somme est le produit des espérances.

Contre-exemple : Soit $X_1$ telle que $\mathbb{P}(X_1=0)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{4}$. $\mathbb{E}(X_1)=0$. Et $X_2=\mathbb{1}_{(X_1=0)}$.

Alors $X_1X_2\equiv 0$ donc $\mathbb{E}(X_1X_2)=0=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

Pourtant $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$ car $\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=0\neq\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1)=\frac{1}{8}$.

Pour, la généralisation, par récurrence, en utilisant, d'après le lemme des coalitions, si $X_1,\dots,X_{n+1}$ sont indépendantes, alors $X_1\cdots X_n$ et $X_{n+1}$ sont bien indépendantes. ∎

# VIII Variance, écart-type et covariance

On fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Les variables aléatoires considérées sont à valeurs réelles.

## 1 Espace $L^2$

Sous réserve d'existence, les moments (dénomination hors programme) d'une variable aléatoire sont les $\mathbb{E}\left(|X|^k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Ce sont des paramètres numériques qui donnent des renseignements sur sa loi. En général, on se limite aux moments d'ordre 1 (espérance) et d'ordre 2 (permet d'obtenir la variance).

**Notation 2 : $L^2$**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète.

On note $X \in L^2$ lorsque $X^2$ est d'espérance finie (ce qu'on peut noter $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ car $X^2$ est à valeurs réelles positives).

**Propriété 43 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

*Si deux variables aléatoires réelles discrètes $X, Y \in L^2$, leur produit $XY \in L^1$, et*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$$

*avec égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont colinéaires presque sûrement, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel tel que $\mathbb{P}(\lambda X + \mu Y = 0) = 1$.*

**Démonstration**

$|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ est d'espérance finie, puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme bilinéaire symétrique positive $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$.

Pour le cas d'égalité, il faut reprendre la preuve dans laquelle on écrit $\mathbb{E}\left((X+\lambda Y)^2\right) = \mathbb{E}(Y^2)\lambda^2 + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\lambda + \mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$.

Ou bien $\mathbb{E}(Y^2) = 0$ et alors, comme $Y^2 \geqslant 0$, $Y$ est nulle presque sûrement, donc $XY$ l'est aussi ce qui correspond bien à un cas d'égalité, ou bien c'est un trinôme du second degré dont le discriminant est nul si et seulement s'il existe $lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left((X+\lambda Y)^2\right) = 0$ et donc, avec le même argument, $X = -\lambda Y$ presque sûrement. ■

**Corollaire 8**

*$L^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

**Propriété 44 : $L^2 \subset L^1$**

*Si $X \in L^2$, $X \in L^1$.*

**Démonstration**

**Première méthode** : Inégalité de Cauchy-Schwarz à appliquée à $X$ et $1$.

**Deuxième méthode** : Comment dans la preuve précédente : $|X| = |X \times 1| \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + 1)$.

**Remarque**

**R61** – Donc $L^2$ est un sous-espace de $L^1$.

# 2 Variance et écart-type

**Définition 26 : Variance, écart-type, variable réduite**

Soit $X \in L^2$.
On appelle **variance** de $X$ le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de $X$ le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}.$$

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, $X$ est dite **réduite**.

**Remarque**

R 62 – $\mathbb{V}(X)$ est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à $X$ : $X - \mathbb{E}(X)$. Par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}(x) \geqslant 0$ donc l'écart-type est bien défini.

R 63 – L'écart-type s'interprète comme une distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ entre le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs prises par $X$ et le vecteur dont toutes les coordonnées valent $\mathbb{E}(X)$. C'est donc un indicateur de dispersion de $X$ autour de sa moyenne $\mathbb{E}(X)$.

R 64 – Ne pas hésiter à noter $m = \mathbb{E}(X)$. Il est plus facile à visualiser $\mathbb{E}(X-m) = \mathbb{E}(X) - m = 0$ que $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$, par exemple.

R 65 – D'après la formule de transfert, si les valeurs prises par $X$ sont les $x_i$ pour $i \in I$ et $m = \mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)(x_i - m)^2.$$

R 66 – Plus la variance (et donc l'écart-type) est petit, plus $X$ est concentrée autour de sa moyenne $m = \mathbb{E}(X)$.
Le cas extrême est pour une variable aléatoire constante : $\mathbb{V}(X) = 0$.
Réciproquement, si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors

$$\forall x \in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X = x) = 0 \text{ ou } x = m = \mathbb{E}(X).$$

Autrement dit, $\mathbb{P}(X \neq m) = 0$ ou encore $\mathbb{P}(X = m) = 1$ : $X$ est constante presque sûrement.

**Exercice 19 : CCINP 100**

**Soit** $\lambda \in ]0, +\infty[$.
**Soit** $X$ **une variable aléatoire discrète à valeurs dans** $\mathbb{N}^*$.
**On suppose que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. **Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle** $R$ **définie par** $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. **Calculer** $\lambda$.
3. **Prouver que** $X$ **admet une espérance, puis la calculer.**
4. $X$ **admet-elle une variance ? Justifier.**

---

1. On obtient $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$P(X \leqslant N) = \lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}\right)$
Et donc, après télescopage, $P(X \leqslant N) = \lambda\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)}\right)$ c'est-à-dire :
$P(X \leqslant N) = \lambda\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)}\right)$. (*)
Or $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$.
Donc d'après (*), $\lambda = 4$.

3. $\sum_{n\geqslant 1} nP(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ converge car au voisinage de $+\infty$, $\frac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$.
   Donc $X$ admet une espérance.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right) = 2 - \frac{4}{n+2}$.
   Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = 2$ et $E(X) = 2$.
4. Comme $E(X)$ existe, $X$ admettra une variance à condition que $X^2$ admette une espérance.
   $\sum_{n\geqslant 1} n^2 P(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$.
   Or, au voisinage de $+\infty$, $\frac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
   Donc $\sum_{n\geqslant 1} n^2 P(X=n)$ diverge.
   Donc $X^2$ n'admet pas d'espérance et donc $X$ n'admet pas de variance.

**Propriété 45 : de la variance**

*Soit $X \in L^2$.*

(*i*) ***Formule de Kœnig-Huygens*** *:*
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

(*ii*) *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.*

(*iii*) *Si $\sigma(X) \neq 0$, $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à** $X$.*

**Remarque**

**R 67 –** La deuxième formule est intuitive au sens où une translation des valeurs de $X$ ne perturbe la distance à la moyenne, et comme cette distance est au carré, une homothétie de rapport $a$ la multiplie par $a^2$.

**Démonstration**

(i) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2mX + m^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2m\mathbb{E}(X) + m^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ par linéarité.

(ii) $\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) - \mathbb{E}(aX+b)^2 = a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 = a^2V(X)$. ■

## 3 Covariance

**Définition 27 : Covariance**

Soit $(X,Y) \in \left(L^2\right)^2$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance** du couple $(X,Y)$ le nombre
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, $X$ et $Y$ sont dites **non corrélées**.

**Remarque**

**R 68 –** La covariance mesure la corrélation entre les variations de $X$ et de $Y$ dans le sens où elle est positive lorsque $X$ et $Y$ s'écartent de leur moyenne dans le même sens, et négative si c'est dans le sens opposé.

**R 69 –** Cela ressemble à un produit scalaire et ce n'est pas un hasard ! On vérifie facilement qu'il s'agit d'une forme bilinéaire positive. La variance correspond au carré de la « norme » (et donc l'écart-type à la « norme ».)

Cela permet par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais sans le cas d'égalité) : $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ ie $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

**Propriété 46 : de la covariance**

*Soient $X$, $Y \in L^2$ deux variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.*

(i) $\mathrm{Cov}$ *est une forme bilinéaire positive.*

(ii) ***Formule de Kœnig-Huygens*** *:*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(iii) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et la réciproque est fausse.*

**Démonstration**

(i) Provient de la linéarité et la positivité de $\mathbb{E}$.

(ii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(iii) C'est une identité remarquable :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y).$$

ou alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y))^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) + 2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) + \mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))^2\right).\end{aligned}$$

(iv) Immédiat avec (ii). (Voir contre-exemple de $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.) ■

**Remarque**

**R 70 –** $\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \Longrightarrow X$ constante presque sûrement.

**R 71 –** $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X}{\sigma(X)} \times \dfrac{Y}{\sigma(Y)}\right) \in ]-1,1[$ est le cœfficient de corrélation de $X$ et $Y$.

## 4 Variance d'une somme de variables aléatoires

**Propriété 47 : Variance d'une somme**

*Soient $X_1, \dots, X_n \in L^2$.*

(i) $X_1 + \cdots + X_n \in L^2$ *et*

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

(ii) *Si $X_1, \dots, X_n$ sont décorrélées deux à deux ($i \neq j \Rightarrow \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$),*

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

*En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont des vaiid,*

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = n\mathbb{V}(X_1).$$

**Démonstration**

$L^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(i) Le cas $n=1$ est trivial et le cas $n=2$ a déjà été vu.
Si c'est vrai pour $n-1$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n) &= \mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1})+\mathbb{V}(X_n)+2\operatorname{Cov}(X_1+\cdots+X_{n-1},X_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{V}(X_i)+\mathbb{V}(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\operatorname{Cov}\left(X_i,X_j\right)+2\sum_{1\leqslant i<j=n}\operatorname{Cov}\left(X_i,X_j\right).\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}\left(X_i,X_j\right).\end{aligned}$$

(ii) Immédiat.

## 5 Cas des lois usuelles

**Propriété 48 : Espérance et variance des lois usuelles**

*(i) Si $X\sim\mathscr{B}(p)$, $\mathbb{E}(X)=p$ et $\mathbb{V}(X)=p(1-p)=pq$.*

*(ii) Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}(X)=np(1-p)=npq$.*

*(iii) Si $X\sim\mathscr{G}(p)$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}$.*

*(iv) Si $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{V}(X)=\lambda$.*

**Démonstration**

(i) $X^2=X$, $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$.

(ii) On prend $X=X_1+\ldots+X_n$ où $X_1,\ldots,X_n$ sont des vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$. $\mathbb{V}(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=np(1-p)=npq$.

(iii) $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\dfrac{1}{p}^2$ avec $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}n^2pq^{n-1}=pq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}n(n-1)pq^{n-2}+p\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}nq^{n-1}=\dfrac{2pq}{(1-q)^3}+\dfrac{p}{(1-q)^2}=\dfrac{1+q}{p^2}$ donc $\mathbb{V}(X)=\dfrac{q}{p^2}$.

(iv) même principe mais avec de l'exponentielle.

# IX Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres

**Propriété 49 : Inégalité de Markov**

*Soit $X\in L^1$ une variable aléatoire discrète admettant une espérance finie. Pour tout $a>0$,*

$$\mathbb{P}(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

**Remarque**

**R 72 –** Si $X$ est à valeurs positives, on a donc aussi $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

**R 73 –** On a aussi $\mathbb{P}(|X|>a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

**Démonstration**

Soit $Y = |X|$.

**Première méthode** : $Y$ étant positive,

$$\mathbb{E}(Y) \geqslant \sum_{y \geqslant a} \mathbb{P}(Y = y)y \geqslant a \sum_{y \geqslant a} \mathbb{P}(Y = y) = a\mathbb{P}(Y \geqslant a).$$

**Deuxième méthode** : Formule de transfert

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)|x| \leqslant a \sum_{|x| \geqslant a} \mathbb{P}(X = x) = a\mathbb{P}(|X| \geqslant a)$$

**Troisième méthode** : $\mathbb{1}_{(Y \geqslant a)} \leqslant \frac{Y}{a}$ et croissance de $\mathbb{E}$.

**Propriété 50 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

*Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}(X)$, $a > 0$.*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

*c'est-à-dire, en notant $m$ l'espérance de $X$ et $\sigma$ son écart-type,*

$$\mathbb{P}\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

**Démonstration**

Découle directement de l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{a^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

ou, directement,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\,\mathbb{P}(X = x)\\ &\geqslant a^2 \sum_{x \mid |x - \mathbb{E}(X)| \geqslant a} \mathbb{P}(X = x) = a^2\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right)\end{aligned}$$

**Remarque**

**R 74** – On a aussi $\mathbb{P}\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$.

**R 75** – le $a^2$ est logique pour des raisons d'homogénéité (dimension).

**R 76** – On retrouve avec l'inégalité de Bienaymé-Thebychev, le fait que si $\mathbb{V}(X) = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Donc, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 0) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

**R 77** – En particulier, $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$.

Intuitivement, en répétant de nombreuses fois un lancer de pièce équilibrée, la fréquence d'apparition de pile doit se rapprocher de $\frac{1}{2}$.

Le théorème suivant permet de donner un cadre théorique à cette intuition.

**Théorème 3 : Loi faible des grands nombres**

*Soit $(X_n)_{n\geqslant 1} \in (L^2)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes identiquement distribuées (de même loi) sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Soit $m$ l'espérance de $X_n$ et $\sigma$ son écart-type.*

*On pose enfin $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.*

*Pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**Remarque**

**R 78** – Parmi tous les échantillons de valeurs possibles $(X_1,\ldots,X_n)$, ceux dont la moyenne $(S_n/n)$ s'éloigne de l'espérance $m$ sont rares, et cette rareté s'accentue avec la taille de l'échantillon ($n \to +\infty$).

**Démonstration**

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

En effet, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = m$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$ par indépendance. ■

**Exercice 20 : CCINP 99**

1. **Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**
2. **Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.**
   **On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.**
   **Prouver que :** $\forall\, a \in ]0,+\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.**
   **À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ?**
   **Indication : considérer la suite $(Y_i)$ de variables aléatoires de Bernoulli où $Y_i$ mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.**

---

1. Soit $a \in ]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire $X$ admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \frac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables $Y_i$ ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à $X$, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $Y_i$ valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   $Y_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $p = \frac{2}{5} = 0,4$ .
   Les variables $Y_i$ suivent la même loi, sont indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. $S_n$ représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de $n$ tirages.
   Alors $T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de $n$ tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = P\left(0,35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$

$= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

On a donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) \geqslant 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang $n$, on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

# X Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

## 1 Définition

**Définition 28 : Fonction génératrice**

Soit $X$ variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ **à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

On appelle **fonction génératrice associée à** $X$ la fonction $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.

**Propriété 51 : des fonctions génératrices**

(i) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ *est au moins égal à* $1$,*et elle converge normalement sur* $[-1,1]$.

(ii) *Pour tout* $t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

(iii) $G_X$ *est continue sur* $[-1,1]$, *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

**Démonstration**

(i) Vient du fait que $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge.

(ii) Théorème de transfert grâce à la converge absolue de la série.

(iii) Convergence normale sur $[-1,1]$ et propriété des séries entières. ■

**Propriété 52 : Caractérisation de la loi**

*Deux variables aléatoires* $X, Y$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.*

**Démonstration**

Unicité du DSE. ■

**Propriété 53 : Lien avec l'espérance et la variance**

*(i)* $X \in L^1$ *(est d'espérance finie) si et seulement si* $G_X$ *est dérivable est* $1$ *et alors* $\mathbb{E}(X) = G_X(1)$.

*(ii)* $X \in L^2$ *si et seulement si* $G_X$ *est deux fois dérivable est* $1$ *et alors* $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.
*On exprime alors* $\mathbb{V}(X)$ *à l'aide de* $G_X'(1)$ *et* $G_X''(1)$.

**Démonstration**

Soit $f_n : t \mapsto \mathbb{P}(X = n)t^n$.

(i) Si $X$ est d'espérance finie, alors on vérifie que $\sum f_n'$ converge normalement ce qui permet via théorème de justifier que $G_X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$ et d'obtenir $G_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
Si $G_X$ est dérivable est $1$, $G_X''$ étant positive sur $[0,1[$, $G_X'$ est croissante et admet une limite en 1.
Comme $G_X$ est continue en $1$, le théorème de la limite de la dérivée s'applique et cette limite ne peut valoir que $G_X'(1)$.
Puis on majore $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X = n)nt^{n-1}$ par $G_X'(1)$ et on fait tendre $t$ vers $1$ : on obtient que $(\mathbb{P}(X = n)n)_n$ est sommable puis le résultat.

(ii) Même principe : $X(X-1)$ est d'espérance finie si et seulement si $G_X$ est deux fois dérivable en $1$ et $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.
Puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = G_X''(1) + G_X(1) - G_X'(1)^2$.

## 2 Cas des lois usuelles

Le programme demande de savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. Allons-y.

**Loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$ :

$$\boxed{G_X(t) = q + pt = 1 - p + pt}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

**Loi binomiale** $\mathscr{B}(n,p)$ : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k$ donc

$$\boxed{G_X(t) = (q + pt)^n = (1 - p + pt)^n}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

**Loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ : $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n-1}t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt} = \frac{pt}{1 - (1-p)t}}$$

définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{p}{q^2}$.

**Loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

## 3 Somme des variables aléatoires

**Propriété 54 : Fonction génératrice d'une somme**

*Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors*

$$G_{X_1+\dots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}.$$

**Démonstration**

Pour chaque $t$, les $t^{X_i}$ sont indépendantes, donc $\mathbb{E}\left(t^{X_1+\dots+X_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(t^{X_i}\right)$. ■

**Applications**

- On retrouve la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la somme de $n$ vaiid de loi de Bernoulli.
- Une somme de variables aléatoires de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$ est encore de loi de Poisson de paramètre la somme des $\lambda_i$.
- Une somme de variables aléatoires de loi $\mathscr{B}(n_i, p)$ indépendantes est de loi $\mathscr{B}(\sum n_i, p)$

## 4 Exercices CCINP

**Exercice 21 : CCINP 96**

**Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.
**La fonction génératrice de $X$ est notée $G_X$ et elle est définie par** $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. **Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $G_X$.**
2. **Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.**
   **On pose $S = X_1 + X_2$.**
   **Démontrer que $\forall t \in ]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ :**

   (a) **en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.**
   (b) **en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.**

   **Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à $n$ variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.**
3. **Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.**
   **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $n$ tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.**
   **On note $S_n$ la somme des numéros tirés.**
   **Soit $t \in ]-1,1[$.**
   **Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de $S_n$.**

---

1. On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note $R$ son rayon de convergence.
   La série $\sum p_n$ converge car $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t = 1$, donc $R \geqslant 1$.
   Notons $D_{G_X}$ l'ensemble de définition de $G_X$.
   On a donc :$]-1,1[ \subset D_{G_X}$
2. Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Prouvons que $\forall t \in ]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

   (a) **En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières** :

Notons $R_1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1 = n)t^n$.
Notons $R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2 = n)t^n$.

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n t^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.
On a, d'après le cours, $R \geqslant \min(R_1, R_2)$ et :
$\forall t \in ]-R, R[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$
Or, on a vu dans la question 1. que $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$.

Donc, $R \geqslant 1$.
Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières,
$\forall t \in ]-1, 1[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$. (*)
De plus, pour tout entier naturel $n$,

$(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles).

Donc : $P(S = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = n)t^n$.

C'est-à-dire, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_S(t)$.

(b) **En utilisant uniquement la définition de de $G_X(t)$ :**

Soit $t \in ]-1, 1[$.
D'après 1., $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ admettent une espérance.
De plus, $G_{X_1}(t) = E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t) = E[t^{X_2}]$.
$X_1$ et $X_2$ sont indépendantes donc $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ sont indépendantes.
Donc $t^{X_1}t^{X_2} = t^S$ admet une espérance et $E[t^S] = E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
C'est-à-dire, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

3. Soit $S_n$ variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
On note $X_i$ la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
De plus, $P(X_i = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_i = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(X_i = 2) = \frac{1}{4}$.
Donc, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{X_i}(t) = E[t^{X_i}] = t^0 P(X_i = 0) + t^1 P(X_i = 1) + t^2 P(X_i = 2)$.

Donc, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2$.
On a : $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

De plus, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)\ldots.G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{S_n}(t) = \frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.

Ou encore, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{4^n} t^k$.

Or, $\forall t \in ]-1, 1[$, $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k)t^k$.

Donc, par unicité du développement en série entière :
$S(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $P(S_n = k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{4^n} = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$
Donc, $S_n$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, \frac{1}{2})$.

**Exercice 22 : CCINP 110**
**Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.**

1. **Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.**
**On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle $t$.**
**On note $R_X$ son rayon de convergence.**

(a) **Prouver que $R_X \geqslant 1$.**
**On pose $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note $D_{G_X}$ l'ensemble de définition de $G_X$.**
**Justifier que $[-1,1]\subset D_{G_X}$.**

**Pour tout réel $t$ fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.**

(b) **Soit $k\in\mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.**

2. (a) **On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.**
**Déterminer $D_{G_X}$ et, pour tout $t\in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.**

(b) **Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.**
**Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.**

---

1. (a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[-1,1]$, $|t^nP(X=n)|\leqslant P(X=n)$ et $\sum P(X=n)$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)=1$).
Donc $\forall t\in[-1,1]$, $\sum t^nP(X=n)$ converge absolument.
On en déduit $R_X\geqslant 1$ et aussi $[-1,1]\subset D_{G_X}$. Au surplus, pour tout $t$ dans $[-1,1]$, le théorème du transfert assure que la variable aléatoire $t^X$ admet une espérance et $E(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty}t^nP(X=n)=G_X(t)$. $G_X$ est la fonction génératrice de $X$.

(b) Soit $k\in\mathbb{N}$. $G_X$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_X\geqslant 1$. Donc, d'après le cours, $G_X$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,1[\subset]-R_X,R_X[$.
De plus, $\forall t\in]-1,1[$, $G_X^{(k)}(t)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}P(X=n)$.
En particulier, $G_X^{(k)}(0)=k!P(X=k)$ et donc $P(X=k)=\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.

2. (a) On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\sum t^nP(X=n)=\sum t^n\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et donc $D_{G_X}=\mathbb{R}$.
De plus, $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X(t)=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

(b) On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
$D_{G_X}=D_{G_Y}=\mathbb{R}$ et, si on pose $Z=X+Y$, alors $[-1,1]\subset D_{G_Z}$.
Alors, $\forall t\in[-1,1]$, $G_Z(t)=E(t^{X+Y})=E(t^Xt^Y)=E(t^X)E(t^Y)$ car $X$ et $Y$ sont indépendantes et donc, d'après le cours, $t^X$ et $t^Y$ sont indépendantes.
Donc, d'après 2.(a), $G_Z(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)}\mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)}=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.
Donc, d'après 1.(b), comme $Z$ a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$, alors $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

# XI FORMULAIRE

Sous réserve d'existence, sommabilité, d'admission de moments, etc. Voici les principales formules du chapitre.

- **Loi de $X$** : $\boxed{\mathbb{P}_X : A\mapsto \sum_{x\in A}\mathbb{P}(X=x)}$ déterminée par les $\mathbb{P}(X=x)$ pour $x\in X(\Omega)$, positifs de somme $1$.
- **Espérance de $X$** : $\boxed{\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)x}$ et si $\Omega$ fini ou dénombrable $\boxed{\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)}$ et si $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant n).}$

- **Formule de transfert** : $\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f(x).}$

- **Variance de** $X$ : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.}$

- **Covariance de** $X$ **et** $Y$ : $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$ nulle si indépendantes.

- **Variance d'une somme** : $\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y).}$

- **Loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$ :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=1)=p \qquad \mathbb{P}(X=0)=1-p=q \qquad \mathbb{E}(X)=p \qquad \mathbb{V}(X)=pq \qquad G_X(t)=q+pt}$$

- **Loi binomiale** $\mathscr{B}(n,p)$ :

$$\boxed{\forall\, k\in [\![0,n]\!],\ \ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad \mathbb{E}(X)=np \qquad \mathbb{V}(X)=npq \qquad G_X(t)=(q+pt)^n}$$

- **Loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ :

$$\boxed{p\in ]0,1[ \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}(X=n)=pq^{n-1} \qquad \mathbb{E}(X)=\frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(X)=\frac{q}{p^2} \qquad G_X(t)=\frac{pt}{1-qt}}$$

- **Loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ :

$$\boxed{\lambda>0 \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \mathbb{E}(X)=\lambda \qquad \mathbb{V}(X)=\lambda \qquad G_X(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

- **Continuités croissante et décroissante** : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion)

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)}$$

  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion)

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)}$$

- **Inégalité de Markov** : Si $a>0$, $\boxed{\mathbb{P}(|X|\geqslant a)\leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.}$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Si $a>0$, $m=\mathbb{E}(X)$ et $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$. $\boxed{\mathbb{P}(|X-m|\geqslant a)\leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}}$

- **Loi faible des grands nombres** : Si $\varepsilon>0$, $(X_n)$ une suite de vaiid $L^2$ d'espérance $m$ et d'écart-type $\sigma$ ,alors

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Si $X, Y \in L^2$, alors $XY \in L^1$, et

$$\boxed{\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)}$$

avec égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont colinéaires presque sûrement.