23

Endomorphismes des espaces euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des espaces vectoriels euclidiens : $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

I Préliminaire : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Voici une propriété qui nous sera utile tout au long de ce chapitre.

Propriété 1 : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormale** de E. Les coefficients de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par*

II Adjoint d'un endomorphisme

Nous allons enfin pouvoir donner une interprétation géométrique à la seule opération matricielle pour laquelle on ne l'avait pas encore fait.

Commençons par rappeler un résultat vu dans le chapitre précédent.

Théorème 1 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

Corollaire 1

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que

Définition 1 : Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **adjoint de** u, l'unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

Exemple

E 1 – Adjoint de l'identité, de l'endomorphisme nul et plus généralement d'une homothétie.

Propriété 2 : Linéarité et adjoint d'une composée

Soient E euclidien et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

Propriété 3 : Involutivité

Soient E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

Propriété 4 : Matrice de l'adjoint en base orthonormée

*Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ base **orthonormée** de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors*

Remarque

R 1 – Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a aucune raison pour que la matrice de u^* soit la transposée de celle de u.

R 2 – Permet de retrouver très facilement les résultats précédents !

Corollaire 2 : Caractéristiques communes

Un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même idéal annulateur, même polynôme minimal, même spectre (mais pas mêmes vecteurs propres en général).

Propriété 5 : Sous-espace stable

Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E. Si F est stable par u, alors

Remarque

R 3 – La réciproque est bien sûr vraie.

Exercice 1 : Classique : montrer que l'image et le noyau de u^* sont respectivement l'orthogonal du noyau de u et l'orthogonal de l'image de u

Exercice 2 : CCINP 63

III Matrices orthogonales

1 Définition

Définition 2 : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si

On note $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété 6 : Caractérisations des matrices orthogonales

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{O}(n)$ ie $A^\mathsf{T} A = I_n$

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

Remarque

R 4 – ⚠ La matrice est ortho**GON**ale si et seulement si ses colonnes sont ortho**NOR**males.

Exemple

E 2 –

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : $\mathcal{O}(n)$ est compact.

3 Structure

Propriété 7 : Structure du groupe orthogonal

4 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété 8 : Matrice de passage en bon

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Remarque

R 5 – **Rappel : Changement de b.o.n.** Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. de E euclidien, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^\mathsf{T}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P$$

Définition 3 : Matrices orthogonalement semblables

Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe

Remarque

R 6 – Cela signifie donc que A et B représentent un même endomorphisme dans des bases **orthonormales** éventuellement différentes.

Exercice 4 : Classique : décomposition QR

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. **Montrer l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et d'une matrice R triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.**
   On pourra interpréter A comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la base formée des vecteurs colonnes de A.
2. **Si (Q_0, R_0) est un couple qui convient, trouver tous les couples solution.**

5 Matrices orthogonales positives et négatives

Propriété 9 : Déterminant d'une matrice orthogonale

*Les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. **La réciproque est fausse.***

Remarque

R 7 – Une erreur classique est de considérer que la réciproque est vraie.

Définition 4 : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif $(+1)$, dites **matrices orthogonales positives** ou **directes**. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(n)$ (Notation HP).

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives** ou **indirectes**. Les ensemble est $\mathcal{O}^-(n) = \mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$ (Notation HP).

Remarque

R 8 – Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice orthogonale positive.

Méthode 1 : Connaître le signe d'une matrice de $\mathcal{O}(3)$

Si $M \in \mathcal{O}(3)$, il suffit de calculer son déterminant pour savoir si elle est positive ou négative.

Mais on peut s'épargner ce calcul : on sait que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc, nécessairement, $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ (base directe ou non).

Il suffit donc de connaître une composante non nulle de $C_1 \wedge C_2$ pour savoir si $M \in \mathcal{SO}(3)$ (signe $+$) ou si $M \in \mathcal{O}^-(3)$ (signe $-$).

Seul problème : le produit vectoriel n'est plus au programme de mathématiques... Mais il est au programme de physique...

IV Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition 5 : Isométrie vectorielle

Soit $(E, |)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**, dénomination non privilégiée par le programme) de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. (La notation vient de la dénomination « orthogonal »).

Propriété 10 : Les isométries sont des automorphismes

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$.

Remarque

R 9 – En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(u(x), u(y)) = \mathrm{d}(x, y)$: u conserve les distances.

R 10 – Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathcal{O}(E, |)$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.

R 11 – Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas.Attention donc au vocabulaire !

2 Caractérisations

Propriété 11 : Caractérisations des isométries

Soient $(E, |)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est une isométrie vectorielle,*

(ii) *u conserve le produit scalaire :*

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

(vii)

CC BY NC SA

Remarque

R 12 – Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve les distances et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire.

R 13 – Un automorphisme u est une isométrie si et seulement si $\forall x, y \in E,\ (u(x)|y) = (x|u^{-1}(y))$.

R 14 – Si A est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de u^{-1} dans cette même base est $A^{-1} = A^\intercal$.

R 15 – Être représenté par une matrice orthogonale en base *orthogonale* seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2), l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que A soit une matrice orthogonale.

Propriété 12 : Image de l'orthogonal d'un sous-espace

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 13 : Stabilité par une isométrie

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

3 Isométries directes et indirectes

Propriété 14 : Déterminant

Une isométrie vectorielle est de déterminant ± 1. La réciproque est fausse.

Définition 6 : Rotations et isométries indirectes

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif $(+1)$, appelées **isométries positives** ou **isométries directes** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Propriété 15 : Structure

*L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** E.*

$\mathcal{SO}(E)$ en est un sous-groupe.

Exercice 5 : CCINP 78

Propriété 16 : Caractérisation des rotations

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) *u isométrie directe (rotation) de E.*

(ii) *u transforme*

(iii) *u transforme*

Propriété 17 : Cas des réflexions

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie

V Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

1 Isométries en dimension 2

a Matrices orthogonales

Propriété 18 : Description de $\mathcal{O}(2)$

$\mathcal{O}(2) = \mathcal{SO}(2) \sqcup \mathcal{O}^-(2)$ *avec*

Remarque

R 16 – L'écriture est de plus unique si on suppose en outre $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Propriété 19 : Écriture complexe d'une isométrie vectorielle

$\mathbb{C}$ étant vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de base canonique $(1, \mathrm{i})$,

- *L'écriture complexe d'une isométrie directe, de matrice dans la base canonique R_θ est*
- *L'écriture complexe d'une isométrie indirecte, de matrice dans la base canonique S_θ est*

Corollaire 3 : Opérations sur les matrices orthogonales

Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$

(*i*) $R_\theta = R_\phi \Longleftrightarrow$	(*v*) $S_\theta^2 =$
(*ii*) $R_\theta R_\phi =$	(*vi*) $S_\theta \times S_\phi =$
(*iii*) $R_\theta^{-1} =$	(*vii*) $S_\theta \times R_\phi =$
(*iv*) $\forall k \in \mathbb{Z},\ R_\theta^k =$	(*viii*) $R_\theta \times S_\phi =$

Remarque

R 17 – À savoir retrouver dans la pratique.

b Rotations du plan orienté

Propriété 20 : Description des rotation en dimension 2

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathscr{SO}(E)$.

On dit que r est la ***rotation vectorielle d'angle de mesure*** *θ.*

Propriété 21 : Structure

$(\mathscr{SO}(2), \times)$ est un groupe abélien.

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right. \quad \text{est un}$$

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ z & \longmapsto & R_\theta \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z \end{array} \right. \quad \text{est}$$

un

Remarque

R 18 – La commutativité ne tient plus en dimension > 2.

Propriété 22 : Unique rotation entre deux vecteurs unitaires

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ et $\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Définition 7 : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété 23 : Expression du produit scalaire et du produit mixte

Soient $\vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

$(\vec{x}|\vec{y}) =$ $\qquad\qquad$ $[\vec{x}, \vec{y}] =$

Propriété 24 : Effet sur les angles orientés

c Classifications des isométries du plan

Propriété 25 : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.

- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

  où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\bar{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Remarque

R 19 – Le fait que les isométries indirectes sont exactement les réflexions est **très spécifique** à la dimension 2.

R 20 – Une rotation est la composée de deux réflexions d'axes distincts.

Méthode 2 : Étudier une isométrie en dim. 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont ortho**NORM**ées).

Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ.

- Soit elle est de la forme R_θ, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation en lisant les coefficients.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Cas général

Propriété 26 : Rappel

Si u est une isométrie de E et F stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est.

Lemme 1

Si u est une isométrie de E, alors u possède une droite ou un plan stable.

Lemme 2

Si u est une isométrie de E, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Remarque

R 21 – L'inclusion peut être stricte.

Théorème 2 : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, des entiers naturels m, p, q, des réels $\theta_1, \ldots, \theta_m$ tels que

où, pour tout réel θ,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarque

R 22 – Avec ces notations, u est une rotation si et seulement si p est pair.

R 23 – En remarquant que $R_\pi = -I_2$, on voit qu'on peut supposer $p \in \{0, 1\}$.

Théorème 3 : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathcal{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^T$.

3 Isométries en dimension 3

Propriété 27 : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

(i) *Soit $u = r \in \mathscr{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé* ***axe de la rotation****.*

On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^{\perp}$.

(e_1, e_2) est dite directe lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D ***est dirigée et orientée par a****.*

On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^{\perp} \oplus D$, la matrice de r est

On dit que θ ***est une mesure de l'angle de la rotation r (modulo 2π).***

(ii) *(Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ composée commutative d'une rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une réflexion de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).*

Remarque

R 24 – Et finalement, les isométries sont id_E, les rotations, les anti-rotations dont les réflexions font partie, et $-\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).

Propriété 28 : Caractéristiques d'une rotation en dimension 3

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E.

- *Son axe est*
- *Si θ est une mesure de son angle, alors*
- *Le signe de $\sin\theta$ est celui*

Méthode 3 : Étude d'isométries en dim.3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariants, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

Exercice 6 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 7 : Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

VI Endomorphismes autoadjoints

1 Définition

Définition 8 : Endomorphisme autoadjoint

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **autoadjoint** (ou **symétrique**) lorsque

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

Exercice 8 : $\mathscr{S}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque

R 25 – Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie !

R 26 – La linéarité est en fait automatique (exercice).

Exercice 9 : Montrer que si u est autoadjoint, alors $\mathrm{Ker}\, u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, u = E$

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété 29 : Matrice en bon d'un endomorphisme autoadjoint

*Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale** de l'espace euclidien E, $u \in \mathscr{L}(E)$.*

u est autoadjoint si et seulement si

3 Cas des projections

Propriété 30 : CNS pour qu'un projecteur soit orthogonal

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$).

Remarque

R 27 – P la matrice de p en **base orthonormale**. Alors p projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P$ et $P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

4 Sous-espaces stables

Propriété 31 : Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

CC BY NC SA

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème 4 : spectral (version 1)

$u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u.

Théorème 5 : spectral (version 2)

Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormale : $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 6 : spectral (version 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthodiagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^\intercal = PDP^{-1}.$$

Remarque

R 28 – P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Remarque

R 29 – C'est faux pour une matrice complexe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ symétrique complexe non diagonalisable.
C'est vrai dans $\mathbb{C}$ pour des matrices telles que $A^\intercal = \overline{A}$ mais c'est hors-programme.

Exercice 10 : CCINP 68

6 Positivité, défini-positivité

Définition 9 : Endomorphisme autoadjoint positif, défini-positif

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **positif** lorsque

On note $\mathcal{S}^+(E)$ de tels endomorphismes.

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **défini positif** lorsque

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ de tels endomorphismes.

Définition 10 : Matrice symétrique positive, défini-positive

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive** lorsque

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de telles matrices.
On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **défini-positive** lorsque

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de telles matrices.

Remarque

R 30 – Ce ne sont pas des espaces vectoriels, mais il y a stabilité par $+$.

R 31 – Les matrices symétriques positives (respectivement défini-positives) sont les matrices en **base orthonormale** de endomorphismes autoadjoints positifs (respectivement défini-positifs).

Propriété 32 : Caractérisation spectrale

Exercice 11 : CCINP 66

Exercice 12 : [Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$. Que dire de B si A est supposée définie positive ? On montre l'unicité de B géométriquement dans la question suivante.**
2. **Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.**
   (a) **Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$.**
   (b) **En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?**
3. **Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\intercal M$.**
4. **Décomposition polaire : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\intercal A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.**
5. **Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.**
6. **Étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.**

7 Annexe classique (HP) : formules variationnelles, norme subordonnée et rayon spectral

E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Lemme 3 : Caractérisation de la norme

Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \max\limits_{\|y\|=1} (x|y) = \max\limits_{\|y\|\leqslant 1} (x|y)$.

Propriété 33 : Norme subordonnée de l'adjoint

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.

Propriété 34 : Formules variationnelles

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. *Alors* $x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ *atteint sur* $E \setminus \{0_E\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} u)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} u)$.

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $X \mapsto \dfrac{X^\top S X}{X^\top X}$ *atteint sur* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} S)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} S)$.

Définition 11 : Rayon spectral

Le **rayon spectral** de $u \in \mathscr{L}(E)$ est $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

Propriété 35 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas autoadjoint positif

Si $u \in \mathscr{S}^+(E)$, *alors* $\max(\operatorname{Sp} u) = \rho(u) = |||u|||$.

Propriété 36 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas général

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, *alors* $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho\left(u^* \circ u\right)$.