23

Endomorphismes des espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est double :
- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre* 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Table des matières

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des espaces vectoriels euclidiens : $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

I Préliminaire : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Voici une propriété qui nous sera utile tout au long de ce chapitre.

Propriété 1 : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E. Les coefficients de la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \left(e_i \,\middle|\, u(e_j)\right)$$

Démonstration

$a_{i,j}$ est la coordonnée de $u(e_j)$ selon le vecteur e_j de la base orthonormale $\mathscr{B}$. ■

II Adjoint d'un endomorphisme

Nous allons enfin pouvoir donner une interprétation géométrique à la seule opération matricielle pour laquelle on ne l'avait pas encore fait.

Commençons par rappeler un résultat vu dans le chapitre précédent.

Théorème 1 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

Corollaire 1

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \left(u(x) \middle| y\right) = \left(x \middle| v(y)\right).$$

Démonstration

- Soit $y \in E$. L'application $\varphi_y : x \mapsto \left(u(x)\middle|y\right)$ étant une forme linéaire sur E, d'après le théorème précédent, il existe un unique vecteur que l'on notera $v(y) \in E$ plutôt que a, tel que $\varphi_y = \left(v(y)\middle|\cdot\right)$, c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $\left(u(x)\middle|y\right) = \left(v(y)\middle|x\right) = \left(x\middle|v(y)\right)$.

  On définit ainsi de manière unique une application $v : E \to E$.
- Montrons la linéarité de v. Soient $y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in E, \quad \left(v\left(y+\lambda y'\right) - v(y) - \lambda v\left(y'\right)\middle|x\right) = \left(v\left(y+\lambda y'\right)\middle|x\right) - \left(v(y)\middle|x\right) - \lambda\left(v\left(y'\right)\middle|x\right) = \left(y+\lambda y'\middle|u(x)\right) - \left(y\middle|u(x)\right) - \lambda\left(y'\middle|u(x)\right) = 0$$

  Donc $v\left(y+\lambda y'\right) - v(y) - \lambda v\left(y'\right) \in E^{\perp} = \{0_E\}$ et donc $v\left(y+\lambda y'\right) = v(y) + \lambda v\left(y'\right)$. ■

Définition 1 : Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **adjoint de** u, l'unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \left(u(x)\middle|y\right) = \left(x\middle|u^*(y)\right).$$

Exemple

E 1 – Adjoint de l'identité, de l'endomorphisme nul et plus généralement d'une homothétie.

Propriété 2 : Linéarité et adjoint d'une composée

Soient E euclidien et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

$$(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*.$$

Démonstration

On écrit, pour tout $x, y \in E$,

$$\left(u(v(x)) \middle| y\right) = \left(v(x) \middle| u^*(y)\right) = \left(x \middle| v^*\left(u^*(y)\right)\right)$$

et on invoque l'unicité définissant l'adjoint. ■

Propriété 3 : Involutivité

Soient E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$\left(u^*\right)^* = u.$$

Démonstration

On écrit, pour tout $x, y \in E$,

$$\left(u^*(x) \middle| y\right) = \left(x \middle| u(y)\right)$$

et on invoque l'unicité définissant l'adjoint. ■

Propriété 4 : Matrice de l'adjoint en base orthonormée

Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ base ***orthonormée*** *de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^*\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^{\mathsf{T}} = M^{\mathsf{T}}.$$

Démonstration

Notons $M^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^*\right)$.
Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$m^*_{i,j} = \left(e_i \middle| u^*\left(e_j\right)\right) = \left(u\left(e_i\right) \middle| e_j\right) = m_{j,i}$$

car $\mathscr{B}$ est orthonormale. Donc $M^* = M^{\mathsf{T}}$. ■

Remarque

R 1 – Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a aucune raison pour que la matrice de u^* soit la transposée de celle de u.

R 2 – Permet de retrouver très facilement les résultats précédents !

Corollaire 2 : Caractéristiques communes

Un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même idéal annulateur, même polynôme minimal, même spectre (mais pas mêmes vecteurs propres en général).

Propriété 5 : Sous-espace stable

Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration

Si $x \in F^\perp$ et $y \in F$,
$$\left(u^*(x)\middle|y\right) = \left(x\middle|u(y)\right) = 0$$
car $u(y) \in F$ et $x \in F^\perp$.

Remarque

R 3 – La réciproque est bien sûr vraie.

Exercice 1 : Classique : montrer que l'image et le noyau de u^* sont respectivement l'orthogonal du noyau de u et l'orthogonal de l'image de u

Exercice 2 : CCINP 63

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. **Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?**
2. **Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :**
   - **i.** $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   - **ii.** $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   - **iii.** $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Solution :

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

   On considère u la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, définie par $u(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. On a bien $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.
2.
   - Prouvons que i. $\Longrightarrow$ iii.
     Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Prouvons que $\forall x \in E^2$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
     Soit $x \in E$. Alors
     $$\|u(x)\|^2 = \left(u(x)\middle|u(x)\right) = \left(x\middle|u^* \circ u(x)\right) = \left(x\middle|u \circ u^*(x)\right) = \left(u^*(x)\middle|u^*(x)\right) = \left\|u^*(x)\right\|^2$$
   - Prouvons que iii. $\Longrightarrow$ ii.
     On suppose que $\forall x \in E^2$, $\|u(x)\| = \left\|u^*(x)\right\|$. Prouvons $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
     D'après une identité de polarisation,
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\left\|u(x) + u(y)\right\|^2 - \|u(x)\|^2 - \left\|u(y)\right\|^2\right).$$
     Or, u est linéaire donc $\left\|u(x) + u(y)\right\|^2 = \left\|u(x + y)\right\|^2$.
     De plus par hypothèse, $\left\|u(x + y)\right\| = \left\|u^*(x + y)\right\|$, $\|u(x)\| = \left\|u^*(x)\right\|$ et $\left\|u(y)\right\| = \left\|u^*(y)\right\|$. Donc
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\left\|u^*(x + y)\right\|^2 - \left\|u^*(x)\right\|^2 - \left\|u^*(y)\right\|^2\right).$$
     Or u^* est linéaire donc $\left\|u^*(x + y)\right\| = \left\|u^*(x) + u^*(y)\right\|$. Donc
     $$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\left\|u^*(x) + u^*(y))\right\|^2 - \left\|u^*(x)\right\|^2 - \left\|u^*(y)\right\|^2\right).$$
     Or, d'après une identité de polarisation,
     $$(u^*(x)|u^*(y)) = \frac{1}{2}\left(\left\|u^*(x) + u^*(y))\right\|^2 - \left\|u^*(x)\right\|^2 - \left\|u^*(y)\right\|^2\right).$$
     Donc $\left(u(x)\middle|u(y)\right) = \left(u^*(x)\middle|u^*(y)\right)$.

- Prouvons que ii. $\Longrightarrow$ i.
On suppose que $\forall(x,y)\in E^2$, $\big(u(x)\big|u(y)\big)=\big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$. Prouvons que $u\circ u^*=u^*\circ u$.
On a, pour tout $x,y\in E$,
$$\big(u^*\circ u(x)\big|y\big)=\big(u\circ u^*(x)\big|y\big).$$
Par l'unicité définissant l'adjoint, on tire $u^*\circ u=u\circ u^*$.
Elle se retrouve en remarquant que pour tout $x,y\in E$,
$$\big(u^*\circ u(x)-u\circ u^*(x)\big|y\big)=0$$
donc pour tout $x\in E$, $u^*\circ u(x)-u\circ u^*(x)\in E^\perp=\{0_E\}$.

III Matrices orthogonales

1 Définition

Définition 2 : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si $A^\intercal A=I_n$.
On note $\mathscr{O}(n)$ ou $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété 6 : Caractérisations des matrices orthogonales

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A\in\mathscr{O}(n)$ *ie* $A^\intercal A=I_n$

(ii) A *est inversible et* $A^{-1}=A^\intercal$

(iii) $AA^\intercal=I_n$

(iv) $A^\intercal\in\mathscr{O}(n)$

(v) *Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

(vi) *Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

Démonstration

- $(i)\iff(ii)\iff(iii)\iff(iv)$: Facile.
- $(i)\iff(v)$: pour tout (i,j), $\big(A^\intercal A\big)_{i,j}=C_i^\intercal C_j=(C_i|C_j)$ donne immédiatement l'équivalence.
- $(iv)\iff(vi)$ s'obtient en transposant.

Remarque

R4 – ⚠ La matrice est ortho**GON**ale si et seulement si ses colonnes sont ortho**NOR**males.

Exemple

E 2 –

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0.$
$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0.$
$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0.$
$\|C_1\|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2 + 1/2 = 1.$
$\|C_2\|^2 = \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1.$
$\|C_3\|^2 = \left(\sqrt{6}/6\right)^2 + \left(\sqrt{6}/3\right)^2 + \left(\sqrt{6}/6\right)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1.$
Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

Exercice 3 : $\mathcal{O}(n)$ est compact.

3 Structure

Propriété 7 : Structure du groupe orthogonal

*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé **groupe orthogonal d'ordre** n. C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration

On montre facilement que $I_n \in \mathcal{O}(n)$, et si $M, N \in \mathcal{O}(n)$, $MN^{-1} = MN^\intercal \in \mathcal{O}(n)$ car

$$(MN^\intercal)^\intercal MN^\intercal = (N^\intercal)^\intercal M^\intercal MN^\intercal = N(M^\intercal M)N^\intercal = NI_nN^\intercal = NN^\intercal = I_n.$$

4 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété 8 : Matrice de passage en bon

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Démonstration

si $\mathcal{B}'$ est un b.o.n., on a déjà vu que $P^{-1} = P^\intercal$, et réciproquement, si P est orthogonale, le fait que les colonnes de P soient orthonormale et que $\mathcal{B}$ soit une b.o.n. donne l'orthonormalité de $\mathcal{B}'$.

Remarque

R 5 – Rappel : Changement de b.o.n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. de E euclidien, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^\intercal \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

Définition 3 : Matrices orthogonalement semblables

Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que
$$A = PBP^{\mathsf{T}}.$$

Remarque

R 6 – Cela signifie donc que A et B représentent un même endomorphisme dans des bases **orthonormales** éventuellement différentes.

Exercice 4 : Classique : décomposition QR

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. **Montrer l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et d'une matrice R triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.**
   On pourra interpréter A comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la base formée des vecteurs colonnes de A.
2. **Si (Q_0, R_0) est un couple qui convient, trouver tous les couples solution.**

Solution :

1. Si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A, A est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathcal{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :
$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}\ \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$
   Mais $\mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Gram-Schmidt garantit que, pour tout k,
$$c_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$
   où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ (on a en effet, pour tout k,
$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(c_1, \ldots, c_k)\quad)$$
   et donc...ça marche.
2. À quelle condition a-t-on
$$QR = Q_0 R_0$$
   où Q et Q_0 sont orthogonales, R et R_0 triangulaires supérieures inversibles ?
   On remarque que l'égalité étudiée équivaut à
$$Q_0^{-1} Q = R_0 R^{-1}$$
   où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Ainsi de suite...Bref,
$$\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{ D_\epsilon \ ;\ \epsilon \in \{-1, 1\}^n \right\}$$
   où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. On conclut que
$$QR = Q_0 R_0 \iff \exists \epsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R = D_\epsilon R_0 \text{ et } Q = Q_0 D_\epsilon$$
   (on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR, au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

5 Matrices orthogonales positives et négatives

Propriété 9 : Déterminant d'une matrice orthogonale

Les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. ***La réciproque est fausse.***

Remarque

R 7 – Une erreur classique est de considérer que la réciproque est vraie.

Démonstration

$\det(A^{\mathsf{T}} A) = 1$.

Contre exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Définition 4 : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathscr{SO}(n)$ ou $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif $(+1)$, dites **matrices orthogonales positives** ou **directes**. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(n)$ (Notation HP).

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives** ou **indirectes**. Les ensemble est $\mathscr{O}^-(n) = \mathscr{O}(n) \setminus \mathscr{SO}(n)$ (Notation HP).

Démonstration : groupe

noyau du déterminant. ■

Remarque

R 8 – Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice orthogonale positive.

Méthode 1 : Connaître le signe d'une matrice de $\mathscr{O}(3)$

Si $M \in \mathscr{O}(3)$, il suffit de calculer son déterminant pour savoir si elle est positive ou négative.

Mais on peut s'épargner ce calcul : on sait que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc, nécessairement, $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ (base directe ou non).

Il suffit donc de connaître une composante non nulle de $C_1 \wedge C_2$ pour savoir si $M \in \mathscr{SO}(3)$ (signe +) ou si $M \in \mathscr{O}^-(3)$ (signe −).

Seul problème : le produit vectoriel n'est plus au programme de mathématiques... Mais il est au programme de physique...

IV Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition 5 : Isométrie vectorielle

Soit $(E, | \ )$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**, dénomination non privilégiée par le programme) de E tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. (La notation vient de la dénomination « orthogonal »).

Propriété 10 : Les isométries sont des automorphismes

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathscr{O}(E) \subset \mathscr{GL}(E)$.

Démonstration

Si $u \in \mathscr{O}(E)$ et $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. u est ainsi un endomorphisme de E injectif avec E de dimension finie, donc bijectif. ■

Remarque

R 9 – En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(u(x), u(y)) = \mathrm{d}(x, y)$: u conserve les distances.

R 10 – Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathscr{O}(E, | \ )$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.

R 11 – Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas(si $F \neq E$ et $x \in F^{\perp} \setminus \{0\}$, $\left\|p_F(x)\right\| = 0 \neq \|x\|$ (p_F n'est pas injectif).)Attention donc au vocabulaire !

2 Caractérisations

Propriété 11 : Caractérisations des isométries

Soient $(E, | \ )$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est une isométrie vectorielle,*

(ii) *u conserve le produit scalaire :*

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y),$$

(iii) *u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.*

(iv) *u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.*

(v) *Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale*

(vi) *Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale*

(vii) *$u \in \mathscr{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1}$ (ie $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$.*

Démonstration

On a déjà facilement $(ii) \Longrightarrow (i)$ et $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Si u est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs x et y de E,

$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ (car } u \text{ conserve la norme)}\\ &= (x|y)\end{aligned}$$

- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: On suppose que u conserve le produit scalaire.
  Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.
  Alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une famille orthonormale de E, et est constituée de n vecteurs (non nuls, car normés) en dimension n : c'est une base orthonormale de E.
- $(iv) \Longrightarrow (i)$: On suppose que u transforme une b.o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ en une b.o.n. de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$.
  L'orthonormalité de la famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ nous donne de plus

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)u(e_i)\right\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2\|u(ei)\|^2 \text{ (d'après le théorème de Pythagore)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

  u est donc bien une isométrie vectorielle.
- $(i) \Longrightarrow (v)$: Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base orthonormale de E, $u(\mathcal{B})$ est encore une base orthonormale et pour tout (i,j),

$$\left(A^{\mathsf{T}}\right)_{i,j} = a_{j,i} = (e_j|u(e_i)) = (u^{-1}(e_j)|e_i) = \left(A^{-1}\right)_{i,j}$$

  Donc $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$: A est orthogonale.
  Autre justification possible : A est la matrice de passage de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à la b.o.n. $u(\mathcal{B})$.
- $(v) \Longrightarrow (vi)$: évident.
- $(vi) \Longrightarrow (i)$: S'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice A de u est orthogonale, alors

$$\forall x \in E,\quad \|u(x)\|^2 = X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX = X^{\mathsf{T}}X = \|x\|^2$$

  donc u est une isométrie.
- $(vi) \Longleftrightarrow (vii)$: vu la matrice de l'adjoint en base orthonormale.

Remarque

R 12 – Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve les distances et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire.

R 13 – Un automorphisme u est une isométrie si et seulement si $\forall x,y \in E,\ \ (u(x)|y) = \left(x\middle|u^{-1}(y)\right)$.

R 14 – Si A est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de u^{-1} dans cette même base est $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

R 15 – Être représenté par une matrice orthogonale en base *orthogonale* seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1,e_2), l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dans la base $(e_1,2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que A soit une matrice orthogonale.

Propriété 12 : Image de l'orthogonal d'un sous-espace

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$u\left(F^{\perp}\right) = (u(F))^{\perp}.$$

Démonstration

Si $x \in u(F^\perp)$, il existe $y \in F^\perp$ tel que $x = u(y)$.
Alors, pour tout $z \in F$, $(x|u(z)) = (u(y)|u(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^\perp$.
Donc $u(F^\perp) \subset u(F)^\perp$, et on obtient l'égalité en regardant les dimension et en utilisant la bijectivité de u :

$$\dim u(F^\perp) = \dim F^\perp = \dim E - \dim F = \dim E - \dim u(F) = \dim u(F)^\perp.$$

Propriété 13 : Stabilité par une isométrie

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

Démonstration

$u(F) \subset F$ donc $F^\perp \subset u(F)^\perp = u\left(F^\perp\right)$, or ils ont même dimension par bijectivité de u, donc $u\left(F^\perp\right) = F^\perp$.

3 Isométries directes et indirectes

Propriété 14 : Déterminant

Une isométrie vectorielle est de déterminant ± 1. La réciproque est fausse.

Définition 6 : Rotations et isométries indirectes

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif $(+1)$, appelées **isométries positives** ou **isométries directes** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Propriété 15 : Structure

*L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** E.*

$\mathcal{SO}(E)$ en est un sous-groupe.

Démonstration

Comme $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, on va en fait montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

- Comme on l'a déjà vu, $id_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Soit u et v deux isométries vectorielles. Montrons que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
  $u \circ v^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et si $x \in E$, $\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$ car u est une isométrie vectorielle.
  Mais comme v est aussi une isométrie, $\|x\| = \left\|v(v^{-1}(x))\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$.
  Finalement, pour tout $x \in E$, $\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$, et $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

C'est aussi l'image réciproque par le morphisme $u \in \mathcal{GL}_n(E) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ du groupe $\mathcal{O}(n)$, $\mathscr{B}$ étant une base orthonormale fixée.

Exercice 5 : CCINP 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. **Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.**
   (a) **Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.**
   (b) **Démontrer que u est bijectif.**
2. **Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.**
3. **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.**

Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ **est une base orthonormée de** E.

---

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.

   (a) Soit $(x,y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$. (*)
   D'autre part, $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|y\|^2$. (**)

   On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
   Donc $x = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
   Donc u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.

2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \varnothing$.
   Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
   $\forall x \in E,\ \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|u(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Et $\|v^{-1}(x)\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
   Donc $\forall x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$.
   On en déduit, d'après 1.(a), que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.

   Soit $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.
   $u \in \mathcal{O}(E)$ donc $\big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \big(e_i|e_j\big)$.
   Or e est une base orthonormée de E donc $\big(e_i|e_j\big) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
   On en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, \big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \delta_i^j$.
   C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
   Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
   Donc $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   Soit $x \in E$.
   Comme e est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

   $||x||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \big(e_i|e_j\big)$.

   Or e est une base orthonormée de E donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

   De même, par linéarité de u, $||u(x)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)| \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \big(u(e_i)|u(e_j)\big)$.

   Or $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (**)

   D'après (*) et (**), $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||$.
   Donc, d'après 1.(a), $u \in \mathcal{O}(E)$.

Propriété 16 : Caractérisation des rotations

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) u isométrie directe (rotation) de E.

(ii) u transforme toute bond en bond.

(iii) u transforme une bond en bond.

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$: u transforme une bond $\mathscr{B}$ en bon car orthogonal. Puis $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: u orthogonale et $\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$.

Propriété 17 : Cas des réflexions

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie indirecte.

V Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

1 Isométries en dimension 2

a Matrices orthogonales

Propriété 18 : Description de $\mathscr{O}(2)$

$\mathscr{O}(2) = \mathscr{SO}(2) \sqcup \mathscr{O}^-(2)$ *avec*

$$\mathscr{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathscr{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque

R 16 – L'écriture est de plus unique si on suppose en outre $\theta \in]-\pi,\pi]$.

Démonstration

Les matrices R_θ et S_θ appartiennent bien à ces ensembles.

Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale alors $a\check{s} + c\check{s} = b\check{s} + d\check{s} = 1$. On peut donc trouver θ, ϕ tels que $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = \sin\phi$ et $d = \cos\phi$.

Mais comme $ab + cd = 0$, $\sin(\theta + \phi) = 0$ donc $\phi \equiv -\theta \ [\pi]$. Il vient deux cas possibles :

- Soit $\phi \equiv -\theta \ [2\pi]$ et $A = R_\theta$,
- Soit $\phi \equiv \pi - \theta \ [2\pi]$ et $A = S_\theta$.

Propriété 19 : Écriture complexe d'une isométrie vectorielle

$\mathbb{C}$ *étant vu comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel euclidien de base canonique* $(1, \mathrm{i})$,

- *L'écriture complexe d'une isométrie directe, de matrice dans la base canonique* R_θ *est* $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$,
- *L'écriture complexe d'une isométrie indirecte, de matrice dans la base canonique* S_θ *est* $z' = \mathrm{e}^{i\theta} \overline{z}$.

Démonstration

- $z' = (\cos\theta x - \sin\theta y) + \mathrm{i}(\sin\theta x + \cos\theta y) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(x + \mathrm{i}y)$.
- $z' = (\cos\theta x + \sin\theta y) + \mathrm{i}(\sin\theta x - \cos\theta y) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(x - \mathrm{i}y)$.

Corollaire 3 : Opérations sur les matrices orthogonales

Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$

(i) $R_\theta = R_\phi \iff \theta \equiv \phi \ [2\pi]$.
(ii) $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
(iii) $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\quad R_\theta^k = R_{k\theta}$
(v) $S_\theta^2 = I_2$
(vi) $S_\theta \times S_\phi = R_{\theta-\phi}$
(vii) $S_\theta \times R_\phi = S_{\theta-\phi}$
(viii) $R_\theta \times S_\phi = S_{\theta+\phi}$

Remarque

R 17 – À savoir retrouver dans la pratique.

b Rotations du plan orienté

Propriété 20 : Description des rotation en dimension 2

Soit E *euclidien orienté de dimension 2.* $r \in \mathscr{SO}(E)$*. Il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que dans toute base orthonormale* ***directe****, la matrice de* r *soit* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On dit que r *est la* ***rotation vectorielle d'angle de mesure*** θ.

Démonstration

Si R_θ et R_ϕ sont des matrices de r en base orthonormale, alors on a $P \in \mathscr{SO}(2)$ tel que $R_\theta = PR_\phi P^{-1}$. Comme $\mathscr{SO}(2)$ est commutatif, $R_\theta = R_\phi$.

Propriété 21 : Structure

$(\mathscr{SO}(2), \times)$ *est un groupe abélien.*

$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$ *est un morphisme de groupes surjectif de noyau* $2\pi\mathbb{R}$.

$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ z & \longmapsto & R_\theta \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de groupes.*

Remarque

R 18 – La commutativité ne tient plus en dimension > 2.

Propriété 22 : Unique rotation entre deux vecteurs unitaires

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ *deux vecteurs non nuls de* E*. Il existe une unique rotation vectorielle transformant* $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ *et* $\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Démonstration

Il suffit de passer par les complexes dans une bond. ■

Définition 7 : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x},\vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété 23 : Expression du produit scalaire et du produit mixte

Soient $\vec{x},\vec{y}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\widehat{(\vec{x},\vec{y})} \qquad [\vec{x},\vec{y}] = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\sin\widehat{(\vec{x},\vec{y})}$$

Propriété 24 : Effet sur les angles orientés

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

Démonstration

Avec le produit scalaire et le produit mixte. ■

C Classifications des isométries du plan

Propriété 25 : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta}z$.
- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Démonstration

- $z' = e^{i\theta}z$ s'interprète comme une rotation vectorielle.
- $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ est une involution donc une symétrie vectorielle.

$$z' = z \iff e^{-i\theta/2}z \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}e^{i\theta/2}$$

et

$$z' = -z \iff e^{-i\theta/2}z \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}e^{i(\theta/2+\pi/2)} = \left(\mathbb{R}e^{i\theta/2}\right)^{\perp}$$

Donc il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (donc réflexion) dirigée par $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$. ■

Remarque

R 19 – Le fait que les isométries indirectes sont exactement les réflexions est **très spécifique** à la dimension 2.

R 20 – Une rotation est la composée de deux réflexions d'axes distincts.

Méthode 2 : Étudier une isométrie en dim. 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont ortho**NORM**ées).

Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ.

- Soit elle est de la forme R_θ, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation en lisant les cœfficients.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Cas général

Propriété 26 : Rappel

Si u est une isométrie de E et F stable par u, alors $F^\perp$ l'est.

Lemme 1

Si u est une isométrie de E, alors u possède une droite ou un plan stable.

Démonstration

Soit u admet une valeur propre réelle et par définition elle admet une droite stable.

Soit $\operatorname{Sp} u = \varnothing$, le polynôme minimal π_u de u n'a pas de racine réelle, donc possède un facteur irréductible de degré 2, $P_0 = X^2 + aX + b$: $\pi_u = (X^2 + aX + b)Q$ avec $Q(u) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a donc $x \in E$ tel que $y = Q(u)(x) \neq 0_E$.

On a alors $P_0(u)(y) = P_0(u) \circ Q(u)(x) = \mu_u(u)(x) = 0_E$.

On montre que $F = \operatorname{Vect}(y, u(y))$ est un plan stable par u.

C'est un plan car $y \neq 0_E$ et n'est pas vecteur propre de u.

Puis $u^2(y) = P_0(u)(y) - au(y) - by = -au(y) - by \in F$. ■

Lemme 2

Si u est une isométrie de E, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Remarque

R 21 – L'inclusion peut être stricte.

Démonstration

Si on a $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors $\|u(x)\| = \|x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. ■

Théorème 2 : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, des entiers naturels m, p, q, des réels $\theta_1, \ldots, \theta_m$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

où, pour tout réel θ,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarque

R 22 – Avec ces notations, u est une rotation si et seulement si p est pair.

R 23 – En remarquant que $R_\pi = -I_2$, on voit qu'on peut supposer $p \in \{0, 1\}$.

Théorème 3 : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathscr{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^T$.

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E.

Initialisation : Si $\dim E = 1$, alors dans toute base orthonormale, u est représentée par une matrice de la forme (± 1) qui est bien de la forme voulue.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le théorème soit vrai pour des espaces euclidiens de dimension au plus n, et soit E un espace euclidien de dimension au plus $n+1$.

Soit u possède une droite stable, on pose e_1 vecteur propre unitaire associé à une valeur propre, nécessairement ± 1, $D = \mathrm{Vect}\, e_1$, et $D^\perp$ est encore stable par u.

Alors $E = D^\perp \overset{\perp}{\oplus} D$ et dans une base adaptée (que l'on peut choisir orthonormale), la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice dans une base orthonormale de $D^\perp$ de l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $D^\perp$ qui est encore une isométrie car conserve toujours la norme.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et choisir la base en question de telle manière que A est la forme voulue.

Reste alors à éventuellement échanger deux vecteurs dans la base (si la valeur propre est -1) pour obtenir une matrice de u de la forme voulue.

Soit u ne possède pas de droite stable, donc pas de valeur propre réelle, mais alors il possède un plan stable P d'après le lemme préliminaire.

Dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $P \overset{\perp}{\oplus} P^\perp = E$, la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où, comme dans le cas précédent, R et A sont de la forme voulue. Mais comme R est orthogonale en dimension 2, elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ. Seule la première n'admet aucune valeur propre réelle ce qui permet de conclure. ■

3 Isométries en dimension 3

Propriété 27 : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

(i) *Soit $u = r \in \mathcal{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé* ***axe de la rotation****.*
On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^{\perp}$.
(e_1, e_2) est dite directe lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D ***est dirigée et orientée par a.***
On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^{\perp} \oplus D$, la matrice de r est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On dit que θ ***est une mesure de l'angle de la rotation r (modulo 2π).***

(ii) *(Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *composée commutative d'une rotation de matrice* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et d'une réflexion de matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).*

Remarque

R 24 – Et finalement, les isométries sont id_E, les rotations, les anti-rotations dont les réflexions font partie, et $-\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).

Démonstration

On utilise le théorème de réduction des isométries.
Comme on est en dimension impaire, il y a nécessairement une valeur propre réelle, donc nécessairement ± 1.

On a alors nécessairement une base orthonormale dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (le bloc haut-gauche pouvant être éventuellement $\pm I_2$).

Si $u = r$ rotation, son déterminant vaut 1 et la matrice devient $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et 1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3 (car $\chi_r \in \mathbb{R}[X]$).

Si $r \neq \mathrm{id}_E$, $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)$ est donc bien de dimension 1, et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice dans n'importe quelle base orthonormale directe de la rotation induite par r sur $P = D^{\perp}$ (c'est toujours une isométrie, elle est de déterminant 1).

D'où la bonne définition de l'angle de la rotation. ■

Propriété 28 : Caractéristiques d'une rotation en dimension 3

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E.
- *Son axe est l'ensemble de ses vecteurs invariants.*
- *Si θ est une mesure de son angle, alors $\operatorname{tr} r = 2\cos\theta + 1$.*
- *Le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[x, r(x), a]$ où a est un vecteur directeur orientant l'axe (non nécessairement unitaire) et x un vecteur n'appartenant pas à l'axe (en général pris dans la base canonique).*

Démonstration

Les deux premiers points sont faciles.
Pour le troisième, dans une base orthonormale directe $(e_1, e_2, a/\|a\|)$,

$$[x, r(x), a] = \begin{vmatrix} x_1 & \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 & 0 \\ x_2 & \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 & 0 \\ x_3 & x_3 & \|a\| \end{vmatrix} = \|a\| \left(x_1^2 + x_2^2\right)\sin(\theta)$$ ■

Méthode 3 : Étude d'isométries en dimension3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariants, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

`

Exercice 6 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

$a = (1,1,1)$ dirige l'axe de la rotation.
Son orthogonal est $P : x + y + z = 0$ dirigé par $b = (1,0,-1)$ et $c = (1,-2,1)$, ils sont orthogonaux.
D'où une base orthonormale adaptée de $\mathbb{R}^3$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

Dans cette base, la matrice de la rotation est $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice recherchée est alors $PMP^\top$ où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

La matrice recherchée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 : Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à $M = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Les colonnes sont orthonormés $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ avec la première coordonnée : c'est une matrice de rotation.
On calcule les vecteurs invariants, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $a = (1, 0, -4)$ dirige et oriente l'axe de la rotation.
Puis $\operatorname{tr} M = -7/9 = 2\cos\theta + 1$ donc $\cos\theta = -8/9$.
Et le signe de $\sin\theta$ est celui de $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} < 0$.
Donc rotation d'angle $-\operatorname{Arccos}(-8/9)$.

VI Endomorphismes autoadjoints

1 Définition

Définition 8 : Endomorphisme autoadjoint

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **autoadjoint** (ou **symétrique**) lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)\big|y\big) = \big(x\big|u(y)\big)$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

Exercice 8 : $\mathscr{S}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Conséquence de la linéarité de $u \mapsto u^*$.

Remarque

R 25 – Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie !

R 26 – La linéarité est en fait automatique (exercice).

Exercice 9 : Montrer que si u est autoadjoint, alors $\operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u = E$

Comme u est autoadjoint, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ classiquement, ce qui permet de conclure.

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété 29 : Matrice en bon d'un endomorphisme autoadjoint

*Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale** de l'espace euclidien E, $u \in \mathscr{L}(E)$.*
u est autoadjoint si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration

Si $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, pour tout (i, j), $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$. ∎

3 Cas des projections

Propriété 30 : CNS pour qu'un projecteur soit orthogonal

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement s'il est autoadjoint (symétrique).

Remarque

R 27 – P la matrice de p en **base orthonormale**. Alors p projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P$ et $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Si p est orthogonal, $x, y \in E$, alors $(p(x)|y) = (p(x)|p(y)) + ((p(x)|y - p(y)) = (p(x)|p(y)) = (p(y)|x) = (x|p(y))$ par symétrie des rôles de x et y.

Si p est un projecteur symétrique, $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y = p(x') \in \operatorname{Im} p$, $(x|y) = (x|p(x')) = (p(x)|x') = (0_E|x') = 0$ donc p projecteur orthogonal. ■

4 Sous-espaces stables

Propriété 31 : Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Si F stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi.

Démonstration

$F^\perp$ stable par $u^* = u$. ■

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème 4 : spectral (version 1)

$u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u.

Théorème 5 : spectral (version 2)

Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormale : $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 6 : spectral (version 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthodiagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^\top = PDP^{-1}.$$

Remarque

R 28 – P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Démonstration

Remarquons déjà que le fait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes soient orthogonaux va être une conséquence de l'orthodiagonalisabilité, mais peut se voir aussi directement : si $\lambda, \mu \in \operatorname{Sp} u$ avec $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$.

Alors $\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y)$ et comme $\lambda \neq \mu$, $(x|y) = 0$.

Précisons aussi que le sens réciproque est clair, par exemple avec la version matricielle : une matrice orthodiagonalisable est bien symétrique.

Passons maintenant aux choses sérieuses : supposons $u \in \mathscr{S}(E)$.

Lemme 3

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors $\operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

Démonstration

On sait que u admet une valeur propre complexe λ. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans cette base.

On a donc $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

On remarque astucieusement que $X^\mathsf{T}\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$.

On calcule ensuite $\lambda X^\mathsf{T}\overline{X} = (\lambda X)^\mathsf{T}\overline{X} = AX^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}A^\mathsf{T}\overline{X} = X^\mathsf{T}A\overline{X} = X^\mathsf{T}\overline{AX} = \overline{\lambda}X^\mathsf{T}\overline{X}$ et donc $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. ■

Et on démontre le théorème en raisonnant par récurrence sur la dimension de E.

Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout endomorphisme symétrique d'un espace de dimension n soit orthodiagonalisable. Soit E un espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathscr{S}(E)$.

On sait que u admet une valeur propre et donc un vecteur propre $x \in E \setminus \{0_E\}$. Soit $D = \operatorname{Vect} x$.

Alors D est stable par u et donc $D^\perp$ l'est aussi d'après une propriété vu précédemment.

Soit v l'endomorphisme induit par u sur $D^\perp$, espace euclidien de dimension n. La symétrie de u se transmet à v par restriction. Donc v est orthodiagonalisable par hypothèse de récurrence. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v. Ce sont aussi des vecteurs propres de u.

Enfin, $\left(e_1, \dots, e_n, \frac{1}{\|x\|}x\right)$ est une base adaptée à la décomposition $E = D \overset{\perp}{\oplus} D^\perp$, orthonormale, formée de vecteurs propres de u, ce qui établit la récurrence. ■

Remarque

R 29 – C'est faux pour une matrice complexe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ symétrique complexe non diagonalisable.

C'est vrai dans $\mathbb{C}$ pour des matrices telles que $A^\mathsf{T} = \overline{A}$ mais c'est hors-programme.

Exercice 10 : CCINP 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :**
   (a) **sans calcul,**
   (b) **en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,**
   (c) **en utilisant le rang de la matrice,**

(d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

---

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (c) $\mathrm{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\mathrm{tr} A = 3$ et que $\mathrm{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ la base orthonormale dans laquelle u est représenté par A.
   A est symétrique réelle et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale, donc u est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
   On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormale de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormale de vecteurs propres.
   $E_3(u) = \mathrm{Vect}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ et $E_0(u) : x - y + z = 0$ dans $\mathscr{B}$.
   Donc $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormale de $E_3(u)$.
   $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(u)$.
   On les normalise et on pose $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
   Alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée de $E_0(u)$.
   On en déduit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u.

6 Positivité, défini-positivité

Définition 9 : Endomorphisme autoadjoint positif, défini-positif

On dit que $u \in \mathscr{S}(E)$ est **positif** lorsque

$$\forall x \in E, \quad \big(x \big| u(x)\big) \geqslant 0$$

On note $\mathscr{S}^+(E)$ de tels endomorphismes.
On dit que $u \in \mathscr{S}(E)$ est **défini positif** lorsque

$$\forall x \in E, \quad \big(x \big| u(x)\big) > 0$$

On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ de tels endomorphismes.

Définition 10 : Matrice symétrique positive, défini-positive

On dit que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive** lorsque

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top A X \geqslant 0$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ de telles matrices.
On dit que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est **défini-positive** lorsque

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top A X > 0$$

On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de telles matrices.

Remarque

R 30 – Ce ne sont pas des espaces vectoriels, mais il y a stabilité par $+$.

R 31 – Les matrices symétriques positives (respectivement défini-positives) sont les matrices en **base orthonormale** de endomorphismes autoadjoints positifs (respectivement défini-positifs).

Propriété 32 : Caractérisation spectrale

- $u \in \mathscr{S}(E)$ *est positif ssi* $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^+$.
- $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *est positive ssi* $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^+$
- $u \in \mathscr{S}(E)$ *est positif ssi* $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^+$.
- $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *est définie positive ssi* $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^+_*$.

Démonstration

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}(n)$ et D diagonale dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^\intercal$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad X^\intercal\ A\ X\ \geqslant\ 0 &\iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\intercal\ PDP^\intercal\ X\ \geqslant\ 0\\ &\iff \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y^\intercal DY\ \geqslant\ 0\end{aligned}$$

car l'application $X \mapsto P^\intercal X$ est une bijection de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même (un automorphisme, même), de réciproque $Y \mapsto PY$. Or, avec des notations « évidentes »,

$$Y^\intercal DY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

et $\operatorname{Sp}(A) = \{d_i\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Si tous les d_i sont positifs, alors $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y^\intercal DY\ \geqslant\ 0$, et réciproquement, en prenant les Y dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour la défini-positivité, c'est quasiment la même preuve que pour la caractérisation de la positivité, quelques inégalités strictes à la place d'inégalités larges, seulement. ■

Exercice 11 : CCINP 66

1. **Soit** $A \in S_n(\mathbb{R})$. **Prouver que** $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \operatorname{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. **Prouver que** $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. **Prouver que** $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. **Soit** $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. **Prouver qu'il existe** $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ **telle que** $A = B^2$.

Solution :

On introduit, sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $||\,||$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||X|| = \sqrt{X^\intercal X}$.

1. Voir preuve précédente.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Par théorème spectral, on a P orthogonale et D diagonale réelles telles que $A = PDP^\intercal = PDP^{-1}$.
   Donc $A^2 = PD^2P^\intercal$ est symétrique et, vu les cœfficients de D^2, $\operatorname{Sp} A^2 = \{\lambda^2,\ \lambda \in \operatorname{Sp} A\} \subset \mathbb{R}^+$.
   Donc $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$. Prouvons que $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Le résultat hors-programme de diagonalisation simultanée de matrices commutant pourrait permettre de conclure rapidement. On va s'en passer.
   On utilise la définition. D'après la question précédente, $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$, et A^2 commute avec B.
   On a alors $(A^2B)^\intercal = B^\intercal (A^\intercal)^2 = A^2B$.
   Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $$X^\intercal A^2BX = X^\intercal A^\intercal BAX = Y^\intercal BY \geqslant 0$$
   où $Y = AX$.
   On a donc bien $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Remarque : avec $B = I_n$, on retrouve la positivité de A^2 vue à la question précédente.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
On reprend le théorème spectral : $A = PDP^\top$ où $P \in \mathscr{O}(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
Alors $B = PD'P^\top \in S_n^+(\mathbb{R})$ où $D' = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$ convient, d'après 1.

Exercice 12 : [Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$.**
Que dire de B si A est supposée définie positive ?
On montre l'unicité de B géométriquement dans la question suivante.
2. **Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.**
   (a) **Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$.**
   (b) **En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?**
3. **Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$.**
4. **Décomposition polaire : Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathscr{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.**
5. **Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.**
6. **Étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant les résultats classiques de densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathscr{O}(n)$.**

---

1. **Racine carrée** : Par théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}(n)$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ (i.e. diagonale) telles que
$$A = PDP^\top = PDP^{-1}$$
Et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de$D$, donc de A. Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = PD'P^{-1} = PD'P^\top$, on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2 = A$.
Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbb{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB = I_n$), donc B, étant déjà positive, est définie positive.
2. (a) Conséquence de la question 1. On peut aussi par le théorème spectral, se donner $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthodiagonalisante de u avec pour tout i, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et poser v l'unique endomorphisme tel que pour tout i, $u(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Vu la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$, il convient.
   (b) u est un polynôme en h, donc commute avec. Comme dans le classique de la diagonalisation simultanée, on considère $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u, stable par h, qui induit dessus un endomorphisme h_λ autoadjoint donc diagonalisable.
   Mais comme h_λ est positif et $h_\lambda^2 = u_\lambda = \lambda\, \mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$, nécessairement $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\, \mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$ (se voit facilement par représentation matricielle). Autre argument possible : si μ valeur propre de h_λ, $\mu^2 = \lambda$ et $\mu \geqslant 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Et comme h_λ est diagonalisable avec une seule valeur propre, on a bien $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\, \mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$.
   Comme $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$ (car u est diagonalisable), h est bien unique.
3. $M = D'P^\top$ où D' comme ci-dessus convient.
4. **Décomposition polaire** : Une analyse permet de voir que si on a une telle décomposition $A = QS$, alors $A^\top = S^\top Q^\top = SQ^{-1}$ donc $A^\top A = S^2$.
Or $A^\top A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$X^\top (A^\top A) X = Y^\top Y \qquad \text{où } Y = AX$$
Or, si $X \neq (0)$, $Y = AX \neq (0)$ car A est inversible, donc $Y^\top Y = \|Y\|^2 > 0$.
En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que
$$S^2 = A^\top A$$
Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule
$$Q^\top Q = \left(S^{-1}\right)^\top A^\top A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$
Donc Q est orthogonale.
L'unicité repose, d'après la remarque initiale, sur le fait qu'une matrice symétrie définie-positive a une unique racine carrée définie positive.

5. On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fermé en tant que sous-espace de dimension finie et $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top M X \geqslant 0\} = \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0,+\infty[)$ où pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_X : M \mapsto X^\top M X$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $f_X^{-1}([0,+\infty[)$ est fermée, donc $\mathcal{P}$ l'est donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'est.
   On peut aussi prendre une suite $(M_n)_n$ convergente vers M de matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et, par continuité de la transposition et des f_X, passer à la limite dans $M_n^\top = M_n$ et $X^\top M_n X \geqslant 0$ pour en déduire que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité, on a une suite (A_n) de matrices inversibles telles que $A_n \to A$. On peut donc trouver des suites $(Q_n$ et (S_n) de matrices respectivement orthogonales et symétriques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = Q_n S_n$.
   Par compacité de $\mathcal{O}(n)$, on a une extractrice φ telle que $Q_{\varphi(n)} \to Q \in \mathcal{O}(n)$.
   Alors $S_{\varphi n} = Q_{\varphi(n)}^{-1} A_{\varphi(n)} \to S = Q^{-1}A$ (la continuité de $M \mapsto M^{-1}$ vient de la formule de la comatrice) et comme $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Finalement, $A = QS$ avec $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

7 Annexe classique (HP) : formules variationnelles, norme subordonnée et rayon spectral

E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Lemme 4 : Caractérisation de la norme

Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \max\limits_{\|y\|=1} (x|y) = \max\limits_{\|y\|\leqslant 1} (x|y)$.

Démonstration

Pour $x = 0_E$, c'est facile.
Sinon, par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in S(0_E,1)$, $(x|y) \leqslant |(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\| = \|x\|$.
De plus, ce majorant est atteint pour $y = \dfrac{1}{\|x\|} x \in S(0_E,1)$.
Donc $\|x\| = \max\limits_{\|y\|=1} (x|y) = \sup\limits_{\|y\|=1} (x|y)$.

Remarque : la fonction $y \mapsto (x|y)$ est continue (linéaire sur E de dimension finie) et $S(0_E,1)$ est compacte (fermé borné en dimension finie) donc elle atteint un maximum sur $S(0_E,1)$.
Pour la deuxième expression, il suffit de travailler de même avec le compact $B'(O_E,1)$ (ou dans la preuve directe, de voir que $\dfrac{1}{\|x\|} x \in B'(0_E,1)$. ■

Propriété 33 : Norme subordonnée de l'adjoint

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$,à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u(x)\|^2 = \big(u(x)\big|u(x)\big) = \big(x\big|u^* \circ u(x)\big) \leqslant \|u^* \circ u(x)\|\,\|x\| \leqslant |||u^* \circ u||| \cdot \|x\| \leqslant |||u^*||| \cdot |||u||| \cdot \|x\|$$

car $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre. Donc $|||u|||^2 \leqslant |||u^*||| \cdot |||u|||$.
Alors soit $|||u||| = 0$ et alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u^*$ et donc $|||u||| = 0 = |||u^*|||$, soit $|||u||| \neq 0$ et alors $|||u||| \leqslant |||u^*|||$. Puis, symétriquement, $|||u^*||| \leqslant |||(u^*)^*||| = |||u|||$. ■

Propriété 34 : Formules variationnelles

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors $x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\operatorname{Sp} u)$ et $\max(\operatorname{Sp} u)$.

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $X \mapsto \dfrac{X^\top S X}{X^\top X}$ atteint sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\operatorname{Sp} S)$ et $\max(\operatorname{Sp} S)$.

Démonstration

Par théorème spectral, on a une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement.

Si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $(x|u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \in \left[\min(\operatorname{Sp} u)\|x\|^2, \max(\operatorname{Sp} u)\|x\|^2\right]$, les bornes étant atteinte pour des vecteurs e_i d'indice correspondant respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur propre.

Pour montrer la version matricielle directement, on écrit le théorème spectral : $S = PDP^\top$ avec $P \in \mathscr{O}(n)$ et D diagonale et on obtient, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en posant $Y = P^\top X$ ie $X = PY$,

$$\frac{X^\top S X}{X^\top X} = \frac{X^\top P D P^\top X}{X^\top X} = \frac{Y^\top D Y}{Y^\top P^\top P Y} = \frac{Y^\top D Y}{Y^\top Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

avec des notations évidentes et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ce qui permet de conclure comme dans la version géométrique. ∎

Définition 11 : Rayon spectral

Le **rayon spectral** de $u \in \mathscr{L}(E)$ est $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

Propriété 35 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas autoadjoint positif

Si $u \in \mathscr{S}^+(E)$, alors $\max(\operatorname{Sp} u) = \rho(u) = |||u|||$.

Démonstration

On suppose $u \in \mathscr{S}^+(E)$. Comme dans la preuve précédente, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 \leqslant (\rho(u))^2 \|x\|^2$ atteint pour x vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(u)$.

Donc $|||u||| = |\rho(u)| = \rho(u) = \max(\operatorname{Sp} u)$ car les valeurs propres de u sont toutes positives. ∎

Propriété 36 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas général

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.

Démonstration

On a déjà $u^* \circ u \in \mathscr{S}^+(E)$ car il est autoadjoint et pour tout $x \in E$, $(x|u^* \circ u(x)) = (u(x)|u(x)) \geqslant 0$.

D'après la propriété précédente, $\rho(u^* \circ u) = |||u^* \circ u||| \leqslant |||u^*||| \, |||u||| = |||u|||^2$.

Puis, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|u^* \circ u(x)) \leqslant \|x\| \, \|u^* \circ u(x)\| \leqslant |||u^* \circ u||| \, \|x\|^2$ par inégalité de Cauchy-Schwarz et définition de la norme subordonnée.

Finalement, $|||u|||^2 \leqslant |||u^* \circ u|||$. ∎