23

Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I Produit scalaire et norme euclidienne

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive.*

C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :
- **Linéarité à gauche :** Pour tout $y \in E$, l'application $x \longmapsto (x|y)$ est linéaire sur E
- **Linéarité à droite :** Pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto (x|y)$ est linéaire sur E

(ii) **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x)$.

(iii) **Définie-positivité** :
- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0$;
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

b Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \operatorname{tr}(A^\mathsf{T} \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(iii) ***Identité du parallélogramme*** *(HP)*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

(*ii*) $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x,y\in E,\ \ (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y) \qquad \text{ie} \qquad |(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \ x=\lambda y$)

d Inégalité triangulaire, norme

Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x,y\in E,\ \ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

*avec égalité si et seulement si x et y sont **positivement liés** (ie $y=0$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ x=\lambda y$)*
De plus,

$$\forall x,y\in E,\ \ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

e Distance

Définition 7 : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta\in[0,\pi] \ \text{ et } \ \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Définition 8 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x\in E$, on définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y\in A}\left(\mathrm{d}(x,y)\right) = \inf_{y\in A}\|x-y\|.$$

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 9 : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.
x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y)=0$. On écrit parfois $x\perp y$.

2 Famille orthonormale

Définition 10 : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1,\dots,v_p)\in E^p$.
$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall i,j\in[\![1,p]\!],\ \text{avec } i\neq j,\ \ (v_i|v_j)=0 \quad (\text{ie } v_i\perp v_j).$$

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall i,j\in[\![1,p]\!],\ \ (v_i|v_j)=\delta_{i,j}$$

Propriété 4 : orthogonale + non nuls ⇒ libre

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 2 : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^p v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p\geqslant 3$.

3 Ensembles orthogonaux

Définition 11 : Parties orthogonales

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.

On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall (a,b) \in A \times B,\ \ (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 12 : Orthogonal d'un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vecotiel de E. On définit l'**orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\, y \in F,\ \ (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^{\perp} \iff x \in E \text{ et } \forall\, y \in F,\ \ (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F.

Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectorielde E.

$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.

Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^{\perp} \iff \forall\, a \in A,\ \ (x|a) = 0$$

Propriété 8 : de l'orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

- *(i)* $E^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = E$.
- *(ii)* $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$,
- *(iii) La somme est directe :* $F + F^{\perp} = F \oplus F^{\perp} = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,
- *(iv) Décroissance : Si* $F \subset G$, *alors* $G^{\perp} \subset F^{\perp}$,
- *(v)* $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ *et* $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

III ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS

Rappel : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème 3 : Existence de base orthonormale

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

Définition 13 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur
$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$
soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j,\ \ (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Propriété 9 : de la base orthonormalisée

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une base orthonormale de E.

Corollaire 3 : Existence de base orthonormale

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété 10 : Expression en base orthonormale

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une **base orthonormale** *de E : $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Alors*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad x_i=(e_i|x)\qquad (x|y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i=X^\top\times Y$$

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\sqrt{X^\top\times X}\qquad \mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) *Si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1}=P^\top$.*

(ii) *Si $u\in\mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=P^\top\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) *$\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'=\pm1$: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.*

3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

Théorème 4 : de représentation de Riesz

Soit $a\in E$ euclidien et $\Phi_a:x\in E\mapsto(a|x)$. Alors

$$\Psi:\left|\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathscr{L}(E,\mathbb{R})\\ a&\longmapsto&\Phi_a\end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a\in E$ tel que $\varphi=(a|\cdot)$.

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale ***directe*** *de E, $\det_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

Définition 14 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1,\dots,v_n]$, pour $v_1,\dots,v_n\in E$.

Propriétés 1 : du produit mixte

(i) *$(v_1,\dots,v_n)\mapsto[v_1,\dots,v_n]$ est une forme n-linéaire alternée sur E.*

(ii) *Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une bond, $[e_1,\dots,e_n]=1$ et si $(e_1,\dots,e_n)$ est une boni, $[e_1,\dots,e_n]=-1$ (réciproque fausse).*

(iii) *$[v_1,\dots,v_n]=0$ si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée.*

(iv) *Si $u\in\mathscr{L}(E)$, $[u(v_1),\dots,u(v_n)]=\det u\times[v_1,\dots,v_n]$.*

Propriété 13 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit E euclidien orienté.

(i) *Si $\dim E=2$, $[\vec u,\vec v]$ représente le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec u$ et $\vec v$.*

(ii) *Si $\dim E=3$, $[\vec u,\vec v,\vec w]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec u$, $\vec v$ et $\vec w$.*

Démonstration

C'est évident si $\vec u,\vec v$ (respectivement $\vec u,\vec v,\vec w$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E=2$, soit (e_1,e_2) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(\vec u,\vec v)$. Alors $\vec u=ce_1$ et $\vec v=de_1+he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec u,\vec v]=ch[e_1,e_2]=\pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E=3$, soit (e_1,e_2,e_3) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec u,\vec v,\vec w)$. Alors $\vec u=ce_1$, $\vec v=de_1+he_2$ et $\vec w=xe_1+ye_2+He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec u,\vec v,\vec w]=chH[e_1,e_2,e3]=\pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec u$, $\vec v$ et $\vec w$. ∎

5 Propriétés de $F^\perp$

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E=F\oplus F^\perp=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace ***euclidien****, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(i) $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$

(ii) $(F^\perp)^\perp=F$

(iii) $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

(iv) $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$

6 Projections et symétries orthogonales

a Projections orthogonales

Définition 15 : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Propriété 14 : des projections orthogonales

(i) $p_F \in \mathcal{L}(E)$

(ii) $p_F^2 = p_F$

(iii) $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$

(iv) $F^\perp = \operatorname{Ker} p_F$

(v) $\operatorname{Im} p_F \oplus \operatorname{Ker} p_F = E$

(vi) $\forall x \in E,\ \ p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Propriété 15 : Expression en base orthonormale

*Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une **base orthonormale** de F. Alors*

$$\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$$

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et
$$p_D : x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|}a \middle| x\right)\left(\frac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$
(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.
$$p_H : x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Propriété 16 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x \in E,\ \ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

b Symétries orthogonales (MPI)

Définition 16 : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriété 17 : des symétries orthogonales

(i) $s_F \in \mathcal{L}(E)$

(ii) $s_F \circ s_F = id_E$

(iii) $\operatorname{Ker}(s_F - id_E) = F$

(iv) $\operatorname{Ker}(s_F + id_E) = F^\perp$

(v) $s_F = 2p_F - id_E$.

(vi) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

À savoir retrouver :

- Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^\perp$.
$$\forall x \in E,\ \ s_H(x) = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Propriété 18 : Expression de la distance à un sevdf

*Soit F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.*

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F, et seulement en ce vecteur :

$$d(x,F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $d(x,F) = \|x - y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F,

$$d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $F^\perp$,

$$d(x,F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Corollaire 6 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$d(x,H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est une équation de H dans une base $\mathscr{B}$ de E et si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$d(x,H) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$