23

# Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés $E$, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

## I Produit scalaire et norme euclidienne

### 1 Définition d'un produit scalaire

**Définition 1 : Produit scalaire**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur** $E$ toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.

C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :
- **Linéarité à gauche :** $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto (x|y)$ est linéaire sur $E$
- **Linéarité à droite :** $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto (x|y)$ est linéaire sur $E$

(ii) **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x)$.

(iii) **Définie-positivité** :
- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0$ ;
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

**Remarque**

**R 1 –** Ne pas oublier de commencer par vérifier que le produit scalaire est bien **défini** (pas au sens défini-positif !) lorsque cela n'est pas évident.

**R 2 –** Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.

**R 3 –** La définie-positivité se résume par $\forall x \neq 0, \quad (x|x) > 0$

**Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien**

Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $E$, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $E$, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

**Remarque**

**R 4 –** Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.

**R 5 –** On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$...

**Exercice 1 : Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.**

### 2 Exemples

#### a Sur $\mathbb{R}^n$

**Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**

Pour des vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

**Remarque**

**R 6 – Important** : Si $X$ et $Y$ désignent les matrices colonnes des composantes de $x$ et de $y$ dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^\top \times Y$.

**R 7 –** Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
Dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

**Remarque**

**R 8 –** On peut toujours fabriquer sur le modèle de $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire « canonique » sur $E$ de dimension finie rendant une base canonique (s'il y en a une) orthonormale. Et même, plus généralement, un produit scalaire rendant une base donnée orthonormale.
Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, $(P|Q) =$

#### b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

Pour des vecteurs $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Remarque**

**R 9 –** Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

### c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

**Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues**

Pour des fonctions $f$ et $g$ de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

**Remarque**

R 10 – Attention, avec des fonctions continues par morceaux seulement, on a presque un produit scalaire : c'est une forme bilinéaires symétrique positive, il manque seulement $(f|g)=0 \Longrightarrow f=0$.

**Exercice 2 : HP mais Classique**

**Si $I$ est un intervalle, on note $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur $I$ telles que $f^2$ est intégrable.**

**À partir de l'inégalité classique $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$, montrer la bonne définition de $(f|g) = \int_I fg$, que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $L^2(I)$.**

**Exercice 3 : HP mais Classique**

**Montrer que l'on définit de la même manière un produit scalaire sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, c'est-à- dire des suites $u,v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergente, en prouvant que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et en posant $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.**

## 3 Norme euclidienne

### a Définition

**Définition 6 : Norme euclidienne**

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur $x$ de $E$, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur $E$ associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

**Remarque**

R 11 – La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

**Exemple**

E 1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

E 2 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top \times A)}$.

E 3 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

### b Identités remarquables et polarisation

**Propriété 1 : Identités remarquables**

*Soit $E$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.*

*Pour tous vecteurs $x$ et $y$ de $E$,*

(i) $\|x+y\|^2 =$

(ii) $\|x-y\|^2 =$

(iii) ***Identité du parallélogramme*** (HP)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$$

**Propriété 2 : Identités de polarisation**

*Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.*

*Pour tous vecteurs $x$ et $y$ de $E$,*

(i) $(x|y) = \frac{1}{4}\Big( \qquad\qquad \Big)$

(ii) $(x|y) = \frac{1}{2}\Big( \qquad\qquad \Big)$

### c Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

*Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Alors*

$$\forall\, x,y \in E,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y) \qquad \textit{ie} \qquad |(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

*avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \ x=\lambda y$)*

**Remarque**

R 12 – L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

**Exemple**

E 4 – Sur $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \sum_{k=1}^{n} y_i^2$.

E 5 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

**Exercice 4 : CCINP 76, 79**

### d Inégalité triangulaire, norme

**Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski**

*Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

*avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont **positivement liés** (ie $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$)*

*De plus,*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

**Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme**

*La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur $E$.*

### e Distance

**Définition 7 : Distance euclidienne et écart angulaire**

Étant donné des vecteurs $x$ et $y$ d'un espace préhilbertien réel $E$, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$,
- si $x$ et $y$ sont non nuls, l'**écart angulaire** $\theta$ est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

**Remarque**

**R 13 –** La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**R 14 –** Autrement dit, $(x|y) = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$.

**Définition 8 : Distance à une partie non vide**

Si $A$ est une partie non vide de $E$ préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de $x$ à $A$ par

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y \in A} \big(\mathrm{d}(x,y)\big) = \inf_{y\in A} \|x-y\|.$$

**Remarque**

**R 15 –** La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x = \left\{\|x-y\| \ ;\ y \in A\right\}$ est non vide (car $A$ l'est) et minoré (par $0$).

## II ORTHOGONALITÉ

### 1 Vecteurs orthogonaux

**Définition 9 : Vecteurs orthogonaux**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, $x$ et $y$ des vecteurs de $E$.

$x$ et $y$ sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

**Remarque**

**R 16 –** $0_E$ est orthogonal à tout vecteur.

**R 17 –** La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

### 2 Famille orthonormale

**Définition 10 : Familles orthogonale et orthonormale**

Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$.

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthogonale** de $E$ si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \text{ avec } i \neq j,\ (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthonormale** de $E$ si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!],\ (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

**Propriété 4 : orthogonale + non nuls ⇒ libre**

*Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.*

**Remarque**

**R 18 –** C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

**Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux**

*Si $E$ est un espace euclidien de dimension $n$, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de $n$ vecteurs non nuls.*

**Théorème 2 : Théorème de Pythagore**

*Soit, dans un espace préhilbertien réel $E$, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a*

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

*La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geqslant 3$.*

## 3 Ensembles orthogonaux

**Définition 11 : Parties orthogonales**

Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $A, B$ des parties non vides de $E$.

On dit que $A$ est ***orthogonale*** à $B$ si et seulement si $\forall (a,b) \in A\times B,\ \ (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

**Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales**

*Si $A, B \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A\cap B = \varnothing$ ou $A\cap B = \{0_E\}$.*

**Remarque**

**R 19** – Si $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ orthogonaux, alors $F\cap G = \{0_E\}$ : leur somme est directe.

**Exemple**

**E 6** – Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$.

## 4 Orthogonal d'un sous-espace

**Définition 12 : Orthogonal d'un sous-espace**

Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et $F$ un sous-espace vecotiel de $E$. On définit l'**orthogonal de** $F$ comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de $F$ :

$$F^{\perp} = \{x\in E \mid \forall y \in F,\ \ (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^{\perp} \iff x\in E \text{ et } \forall y\in F,\ \ (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté $F^{\circ}$). Il s'agit de la plus grande partie de $E$ (pour l'inclusion) orthogonale à $F$.

**Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace**

*Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et $F$ un sous-espace vectorielde $E$.*

*$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice**

*Soit $F$ un sous-espace de $E$ préhilbertien réel.*

*Si $F = \operatorname{Vect} A$ ($A$ engendre $F$) et si $x$ est un vecteur de $E$,*

$$x\in F^{\perp} \iff \forall a\in A,\ \ (x|a) = 0$$

**Remarque**

**R 20** – En particulier, connaissant une base de $F$, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à $F$.

**Propriété 8 : de l'orthogonal**

*Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.*

(i) $E^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = E$.

(ii) $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$,

(iii) *La somme est directe :* $F + F^{\perp} = F\oplus F^{\perp} = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,

(iv) *Décroissance : Si* $F\subset G$, *alors* $G^{\perp}\subset F^{\perp}$,

(v) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp}\cap G^{\perp}$ *et* $(F\cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

**Remarque**

**R 21** – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

**R 22** – Pour $F\subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et $(F\cap G)^{\perp}\supset F^{\perp}+G^{\perp}$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur $E$.

On peut donner comme contre-exemples, dans $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $F$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. C'est un exercice très classique de montrer que $F^{\perp} = \{0\}$ à l'aide du théorème de Weierstrass, donc $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E$ et

$$F \subsetneq \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E.$$

Si, de plus, $G = \{t\mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P\in F\}$, alors $G^{\perp} = \{0\}$ et $F\cap G = \{0\}$ d'où

$$E = (F\cap G)^{\perp} \supsetneq F^{\perp}+G^{\perp} = \{0\}.$$

**Exercice 5 : CCINP 39**

# III Espaces ou sous-espaces euclidiens

**Rappel** : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

## 1 Base orthonormale

**Théorème 3 : Existence de base orthonormale**

*Tout espace euclidien non réduit à $0_E$ admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).*

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

**Exemple**

**E 7 –** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$.
Il est facile de voir que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).
On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

- On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.
- Puis on cherche
$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$$
avec $\lambda$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|e_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- En cherchant
$$\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$$
tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\varepsilon_1' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varepsilon_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\varepsilon_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**Définition 13 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Étant donné $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels $\lambda_k$ tels que le vecteur
$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$
soit orthogonal à tous les $\varepsilon_i$ pour $i \in [\![1, j-1]\!]$ :
$$\forall\, i < j,\quad (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

**Remarque**

**R 23 –** Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

**Propriété 9 : de la base orthonormalisée**

*On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout $j$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ et la composante sur $e_j$ de $\varepsilon_j$ vaut 1.*

*On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une base orthonormale de $E$.*

**Remarque**

**R 24 –** Matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ :

Base de la décomposition $QR$ (exercice classique, cf TD).

**Corollaire 3 : Existence de base orthonormale**

*Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.*

**Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète**

*Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.*

## 2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

**Propriété 10 : Expression en base orthonormale**

*Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une* **base orthonormale** *de $E$ : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad x_i = (e_i|x) \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top \times X} \qquad \mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

**Propriété 11 : Changement de base orthonormale**

*Soit $E$ euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.*

*(i) Si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1} =$*

*(ii) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit*
$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) =$$

*(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$ : 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.*

**Remarque**

**R 25 –** ⚠ La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale $\pm 1$ pour que les bases soient orthonormales.

**R 26 –** Faciles, les changements de bases orthonormales !!!

## 3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

**Théorème 4 : de représentation de Riesz**

*Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors*

$$\Psi : \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array}$$

*est un isomorphisme.*

*Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.*

## 4 Produit mixte

Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension $n$.

**Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe**

*Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale **directe** de $E$, $\det_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

**Définition 14 : Produit mixte**

On appelle **produit mixte** sur $E$ le déterminant de $n$ vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1,\dots,v_n]$, pour $v_1,\dots,v_n \in E$.

**Propriétés 1 : du produit mixte**

(i) *$(v_1,\dots,v_n) \mapsto [v_1,\dots,v_n]$ est une forme $n$-linéaire alternée sur $E$.*

(ii) *Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une bond, $[e_1,\dots,e_n] = 1$ et si $(e_1,\dots,e_n)$ est une boni, $[e_1,\dots,e_n] = -1$ (réciproque fausse).*

(iii) *$[v_1,\dots,v_n] = 0$ si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée.*

(iv) *Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $[u(v_1),\dots,u(v_n)] = \det u \times [v_1,\dots,v_n]$.*

**Remarque**

R 27 – Comme, si $E$ est de dimension 3 et $x, y \in E$, $[x,y,\cdot] \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, avec l'isomorphisme de la partie précédente, il existe une unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $z \in E$, $[x,y,z] = (a|z)$. Ce vecteur $a$ est appelé **produit vectoriel** de $x$ et $y$, noté $x \wedge y$.
On a alors $[x,y,z] = (x \wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

**Propriété 13 : Interprétation géométrique du déterminant**

*Soit $E$ euclidien orienté.*

(i) *Si $\dim E = 2$, $[\vec{u},\vec{v}]$ représente le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\dim E = 3$, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.*

**Démonstration**

C'est évident si $\vec{u},\vec{v}$ (respectivement $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E = 2$, soit $(e_1,e_2)$ base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(\vec{u},\vec{v})$. Alors $\vec{u} = ce_1$ et $\vec{v} = de_1 + he_2$, où $h$ hauteur et $c$ côté, donc $[\vec{u},\vec{v}] = ch[e_1,e_2] = \pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E = 3$, soit $(e_1,e_2,e_3)$ base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Alors $\vec{u} = ce_1$, $\vec{v} = de_1 + he_2$ et $\vec{w} = xe_1 + ye_2 + He_3$, où $H$ hauteur et $ch$ aire de la base. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = chH[e_1,e_2,e3] = \pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

∎

## 5 Propriétés de $F^\perp$

**Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf**

*Si $F$ est un sev de **dimension finie** de $E$ préhilbertien réel, alors*

$$E = F \oplus F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

*Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de $F$, il est unique.*

**Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie**

*Soit $E$ un espace **euclidien**, $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.*

(i) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

(ii) $(F^\perp)^\perp = F$

(iii) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(iv) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

**Remarque**

R 28 – On retiendra qu'**en dimension finie**, il n'y a plus trop de problème.

**Exercice 6 : CCINP 77, 92**

## 6 Projections et symétries orthogonales

### a Projections orthogonales

**Définition 15 : Projection orthogonale**

Soit $E$ un espace préhilbertien réel, et $F$ un sous-espace de $E$ **de dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur** $F$ la projection $p_F$ sur $F$ parallèlement à $F^\perp$.

**Remarque**

R 29 – Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^\perp$.

**Propriété 14 : des projections orthogonales**

$(i)$ $p_F \in \mathscr{L}(E)$

$(ii)$ $p_F^2 = p_F$

$(iii)$ $F = \mathrm{Im}\, p_F = \mathrm{Ker}\,(p_F - id_E)$

$(iv)$ $F^\perp = \mathrm{Ker}\, p_F$

$(v)$ $\mathrm{Im}\, p_F \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, p_F = E$

$(vi)$ $\forall\, x \in E,\ \ p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

**Remarque**

R 30 – Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seule vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pratique pour le trouver !

**Exercice 7 : CCINP 80**

**Propriété 15 : Expression en base orthonormale**

*Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$ préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une* ***base orthonormale*** *de $F$. Alors*

**Remarque**

R 31 – On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \qquad (1)$$

Donc, si l'on note $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de $e_j$ dans $F^\perp \oplus F$. Donc $\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k = p_F(e_j)$.

De plus, ici $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de $F$, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \middle| e_j\right) \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\varepsilon_k | e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2} \varepsilon_k$, d'où l'expression des $\lambda_k$ que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|} a\right)$ est une base orthonormée de $D$ et

  (Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.

**Exemple**

E 8 – **Soit $E = \mathbb{R}^3$, $P$ le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de $p_P$ ?**

**Remarque**

R 32 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les $p$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Im}(p_F)$ et nous donnent les $p$ premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n - p$ autres forment une base de $F^\perp = \mathrm{Ker}\, p_F$ et nous donnent les $n - p$ dernières colonnes nulles.

**Propriété 16 : Inégalité de Bessel**

*Soit $E$ un espace préhilbertien, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie, $p_F$ la projection orthogonale sur $F$. Alors*

## b Symétries orthogonales (MPI)

**Définition 16 : Symétrie orthogonale**

Soit $E$ un espace préhilbertien, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à $F$**, notée $s_F$, la symétrie par rapport à $F$, parallèlement à $F^\perp$.

Si $F$ est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si $F$ est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

**Propriété 17 : des symétries orthogonales**

(i) $s_F \in \mathscr{L}(E)$

(ii) $s_F \circ s_F = id_E$

(iii) $\mathrm{Ker}\,(s_F - id_E) = F$

(iv) $\mathrm{Ker}\,(s_F + id_E) = F^\perp$

(v) $s_F = 2p_F - id_E$.

(vi) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

**Exemple**

E 9 – **Symétrie orthogonale par rapport au plan $P$ de l'exemple précédent.**

**Remarque**

R 33 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les $p$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Ker}\,(s_F - id)$ et nous donnent les $p$ premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n - p$ autres forment une base de $F^\perp = \mathrm{Ker}\,(s_F + id)$ et nous donnent les $n - p$ dernières colonnes avec des $-1$ sur la diagonale.

À savoir retrouver :

- Soient $H$ est un hyperplan d'un espace euclidien $E$ et $a$ un vecteur non nul de $H^{\perp}$.

## 7 Distance à un sous-espace

On a vu que si $F$ est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel $E$, alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \|x-y\|.$$

**Propriété 18 : Expression de la distance à un sevdf**

*Soit $F$ est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien $E$, et $x \in E$.*

*Alors la distance de $x$ à $F$ est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de $x$ sur $F$ , et seulement en ce vecteur :*

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,p_F(x)) = \|x-p_F(x)\|$$

*et si $\mathrm{d}(x,F) = \|x-y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.*

*De plus, si $(e_1,\ldots,e_p)$ est une base orthonormale de $F$,*

$$\mathrm{d}(x,F)^2 =$$

*Si, enfin, $F^{\perp}$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ une base orthonormale de $F^{\perp}$,*

$$\mathrm{d}(x,F)^2 =$$

**Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$**

Plutôt que de calculer une b.o.n. de $F$ (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x-y \in F^{\perp}$.

Connaissant une base quelconque de $F$, on décompose $y$ dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x-y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

**Remarque**

R 34 – Si $F$ n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si $F$ est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp,F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).

On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x,F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x-y \in F^{\perp}$ et on peut montrer que si $F$ est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^{\perp} = \{0\}$.

**Exercice 8 : CCINP 81, 82**

**Corollaire 6 : Distance à un hyperplan**

*Soit $E$ un espace euclidien, $H$ un hyperplan de $E$ de vecteur normal $a$ : $H = (\mathbb{R}a)^{\perp}$.*

*Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{d}(x,H) =$$

*Si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une équation de $H$ dans une base $\mathscr{B}$ de $E$ et si $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées de $x$ dans cette base, alors*

$$\mathrm{d}(x,H) =$$