23

Espaces préhilbertiens réels (MP2I)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I Produit scalaire et norme euclidienne

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.
C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :

- **Linéarité à gauche :** Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto (x|y)$ est linéaire : $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x_1 + \lambda x_2|y) = (x_1|y) + \lambda(x_2|y).$
- **Linéarité à droite :** Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto (x|y)$ est linéaire : $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x|y_1 + \lambda y_2) = (x|y_1) + \lambda(x|y_2).$

(ii) **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x).$

(iii) **Définie-positivité** :

- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0\,;$
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Remarque

R 1 – Ne pas oublier de commencer par vérifier que le produit scalaire est bien **défini** (pas au sens défini-positif !) lorsque cela n'est pas évident.

R 2 – Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.

R 3 – La définie-positivité se résume par $\forall x \neq 0, \quad (x|x) > 0$

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Remarque

R4 – Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.

R5 – On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$...

Exercice 1 : Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque

R6 – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^\top \times Y$.

R7 – Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
Dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, x, x', y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x + \lambda x'|y) &= \sum_{i=1}^{n} (x + \lambda x')_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda x'_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \\ &= (x|y) + \lambda (x'|y).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$
- $(x|x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Longleftrightarrow \forall\, i, \quad x_i = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

■

Remarque

R 8 – On peut toujours fabriquer sur le modèle de $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire « canonique » sur E de dimension finie rendant une base canonique (s'il y en a une) orthonormale. Et même, plus généralement, un produit scalaire rendant une base donnée orthonormale.
Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, $(P|Q) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k q_k$ avec des notations évidentes.

b Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \operatorname{tr}(A^\top \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

R 9 – Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Démonstration

$$\operatorname{tr}(A^\top \times B) = \sum_{i=1}^n (A^\top \times B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

■

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Remarque

R 10 – Attention, avec des fonctions continues par morceaux seulement, on a presque un produit scalaire : c'est une forme bilinéaires symétrique positive, il manque seulement $(f|g) = 0 \Longrightarrow f = 0$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall f, \tilde{f}, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+\lambda\tilde{f}|g) &= \int_a^b (f+\lambda\tilde{f})g \\ &= \int_a^b (fg+\lambda\tilde{f}g) \\ &= \int_a^b fg + \lambda\int_a^b \tilde{f}g \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= (f|g)+\lambda(\tilde{f}|g).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale et comme $a<b$)
- $$\begin{aligned}(f|f)=0 &\iff \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\iff f^2 \equiv 0 \text{ (car } f^2 \text{ est une fonction continue et positive)} \\ &\iff f \equiv 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exercice 2 : HP mais Classique

Si I est un intervalle, on note $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable.

À partir de l'inégalité classique $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$, montrer la bonne définition de $(f|g) = \int_I fg$, que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $L^2(I)$.

Exercice 3 : HP mais Classique

Montrer que l'on définit de la même manière un produit scalaire sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, c'est-à- dire des suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergente, en prouvant que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et en posant $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

R 11 – La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemple

E 1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

E 2 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top \times A)}$.

E 3 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

(*ii*) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(*iii*) ***Identité du parallélogramme*** (*HP*)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

(*ii*) $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

Démonstration

Provient directement de l'identité remarquable (i) et de $(i)-(ii)$. ■

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall\, x,y \in E,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y) \qquad \textit{ie} \qquad \left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \ x=\lambda y$)

Remarque

R 12 – L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Démonstration

Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda)=\left(x+\lambda y|x+\lambda y\right)$: on a que $P(\lambda)\geqslant 0$ par positivité.
Or

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=(x|x)+\lambda(x|y)+\lambda(y|x)+\lambda^2(y|y)\\&=(x|x)+2\lambda(x|y)+\lambda^2(y|y)\end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

Cas 1 : Si $(y|y)=0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $(x|x)+2\lambda(x|y)\geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y)=0$ et l'inégalité est vraie.

Cas 2 : Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta'=(x|y)^2-(x|x)(y|y)\leqslant 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Cas d'égalité :
Si $y=0$, il y a égalité.
Si $y\neq 0$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \left(x+\lambda y|x+\lambda y\right)=0$, ce qui équivaut à $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \ x+\lambda y=0$ et donc x et y sont liés. ■

Exemple

E4 – Sur $\mathbb{R}^n$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n x_i^2\sum_{k=1}^n y_i^2$. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\displaystyle\int_a^b fg\right)^2\leqslant\int_a^b f^2\int_a^b g^2$.

Exercice 4 : CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x\in E$, $||x||=\sqrt{(x|x)}$.

1. **(a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. **Soit $E=\left\{f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x\in[a,b]\ f(x)>0\right\}$.**
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f\in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

---

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall x\in E$, $||x||=\sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall(x,y)\in E^2$, $|\left(x|y\right)|\leqslant||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y)\in E^2$. Posons $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $P(\lambda)=||x+\lambda y||^2$.

   On remarque que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $P(\lambda)\geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda)=\left(x+\lambda y|x+\lambda y\right)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda)=||y||^2\lambda^2+2\lambda\left(x|y\right)+||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2\neq 0$.
   Premier cas : si $y=0$
   Alors $|\left(x|y\right)|=0$ et $||x||\,||y||=0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y\neq 0$
   Alors $||y||=\sqrt{(y|y)}\neq 0$ car $y\neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta=\left(x|y\right)^2-||x||^2||y||^2$ donc $\left(x|y\right)^2\leqslant||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|\left(x|y\right)|\leqslant||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall(x,y)\in E^2$, $|\left(x|y\right)|=||x||\,||y||\iff x$ et y sont colinéaires.

Supposons que $|(x|y)| = ||x||\,||y||$.

Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|(x|y)| = |\alpha|.|(y|y)| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)}\,||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $A = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E \right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$.
$A \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall\, f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2$.

D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2 = \left(\int_a^b 1 \mathrm{d}t \right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ on obtient :
$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall\, f \in E,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice 5 : CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. **Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. **Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**

   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. **Majorer** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ **en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

---

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

On pose $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x h(t)dt$.
h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
De plus, $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)
D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.

Donc $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = 0$.
C'est-à-dire, $\forall x \in [a,b]$, $h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
Soit $f \in E$. $(f|f) = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geqslant 0$.
Donc $(|)$ est positive. (**)
Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
Donc $(|)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

d Inégalité triangulaire, norme

Corollaire 1 : Inégalité de Minkowski

Soit $(E,|)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x,y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

*avec égalité si et seulement si x et y sont **positivement liés** (ie $y = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$)*
De plus,

$$\forall x,y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration

Soient x et y des vecteurs de E.
Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y)\\
&= (x|x) + 2(x|y) + (y|y)\\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)\\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\\
&\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : Il y a égalité ssi $(x|y) = |(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$

Donc si et seulement si soit $y=0$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$ (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) et $(x|y) = |(x|y)|$, ce qui devient, si $x=\lambda y$, $\lambda(x|x) = |\lambda|(x|x)$ donc $\lambda = |\lambda|$ et $\lambda \geqslant 0$.

Pour l'autre inégalité, on écrit que $\|(x+y)-y\| \leqslant \|x+y\| + \|-y\|$ donc $\|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$, puis on échange les rôles de x et y.. ■

Propriété 3 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geqslant 0$
- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Longleftrightarrow (x|x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda|\,\|x\|$
- Inégalité triangulaire : c'est l'inégalité de Minkowski démontrée ci-dessus.

■

e Distance

Définition 7 : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta \in [0,\pi] \text{ et } \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Remarque

R 13 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

R 14 – Autrement dit, $(x|y) = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$.

Définition 8 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y\in A}\left(\mathrm{d}(x,y)\right) = \inf_{y \in A}\|x-y\|.$$

Remarque

R 15 – La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x = \left\{\|x-y\| \ ; \ y \in A\right\}$ est non vide (car A l'est) et minoré (par 0).

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 9 : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.
x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarque

R 16 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 17 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

2 Famille orthonormale

Définition 10 : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p$.
$(v_1, \ldots, v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \text{ avec } i \neq j, \quad (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \ldots, v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \quad (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Propriété 4 : orthogonale + non nuls ⇒ libre

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls (*en particulier toute famille orthonormale*) *d'un espace préhilbertien réel est libre.*

Remarque

R 18 – C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Démonstration

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E.
But : $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.

Alors, si $i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p | v_i) = \begin{cases} (0_E|v_i) = 0_{\mathbb{R}} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j|v_i) = \lambda_i \|v_i\|^2 \end{cases}$. Or $v_i \neq 0_E$, donc $\lambda_i = 0$. ■

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 2 : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geqslant 3$.

Démonstration

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$
Puis récurrence sur p.
Contre-exemple : la famille $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{-1}\}$ n'est pas orthogonale (et pour cause, il y 3 vecteurs non nuls en dimension 2 !) et vérifie pourtant la propriété de Pythagore. ■

3 Ensembles orthogonaux

Définition 11 : Parties orthogonales

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.
On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall (a,b) \in A \times B,\quad (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété 5 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

Démonstration

Si $A \cap B \neq \varnothing$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. ■

Remarque

R 19 – Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

E 5 – Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 12 : Orthogonal d'un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vecotiel de E. On définit l'**orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall\, y \in F,\quad (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall\, y \in F,\quad (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F.

Propriété 6 : L'orthogonal est un sous-espace

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectorielde E.
$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- $0_E \in A^\perp$,
- $\forall\, x, x' \in A^\perp,\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad \lambda x + x' \in A^\perp$, car $\forall\, y \in A,\quad (\lambda x + x'|y) = \lambda(x|y) + (x'|y) = 0$.

Donc $A^\perp$ est un sev de A.

Comme de plus $A \subset \operatorname{Vect} A$, $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$ et être orthogonal à tout élément de A implique être orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire, donc $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$. ■

Propriété 7 : Il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^\perp \iff \forall\, a \in A,\quad (x|a) = 0$$

Démonstration

$F^\perp = A^\perp$. ■

Remarque

R 20 – En particulier, connaissant une base de F, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F.

Propriété 8 : de l'orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

(i) $E^\perp = \{0\}$ *et* $\{0\}^\perp = E$.

(ii) $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

(iii) *La somme est directe :* $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

(iv) *Décroissance : Si $F \subset G$, alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$,*

(v) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

Démonstration

- $0 \in E^{\perp}$, et si $x \in E^{\perp}$, $(x|x) = 0$ donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$.
- Si $x \in F$, pour vecteur y de $F^{\perp}$, $(x|y) = 0$, d'où le résultat.
- Comme les ensembles F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux, $F \cap F^{\perp} = \varnothing$ ou $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, mais $0 \in F \cap F^{\perp}$.
- Soit $x \in G^{\perp}$. Pour tout vecteur y de F, $y \in G$, et donc $(x|y) = 0$. Ainsi $x \in F^{\perp}$.
-

Remarque

R21 – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

R22 – Pour $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur E.
On peut donner comme contre-exemples, dans $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. C'est un exercice très classique de montrer que $F^{\perp} = \{0\}$ à l'aide du théorème de Weierstrass, donc $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E$ et

$$F \subsetneq \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E.$$

Si, de plus, $G = \{t \mapsto P(t)\sin(t) \ ; \ P \in F\}$, alors $G^{\perp} = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$ d'où

$$E = (F \cap G)^{\perp} \supsetneq F^{\perp} + G^{\perp} = \{0\}.$$

Exercice 6 : CCINP 39

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. **(a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.**

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. **Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.**
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. **On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.**
   Déterminer $F^{\perp}$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

---

1. (a) Soit $(x,y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.
   Soit $(x,y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
Donc $z \in l^2$.

On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)
   $\forall x = (x_n) \in l^2$, $|x_p|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant ||x||$.

   Donc $\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, $|\varphi(x)| = |x_p| \leqslant ||x||$ (**)
   D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.

3. Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$.
   Alors $\forall y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.
   On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   $y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
   On en déduit que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Synthèse :

   la suite nulle appartient bien à $F^\perp$.
   Conclusion : $F^\perp = \{0\}$.

   Ainsi, $(F^\perp)^\perp = l^2$.

   On constate alors que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

Rappel : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème 3 : Existence de base orthonormale

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Exemple

E6 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$.
Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).

On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

- On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.
- Puis on cherche
$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$$
avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|e_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- En cherchant
$$\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$$
tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\varepsilon'_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varepsilon'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\varepsilon'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Définition 13 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur
$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$
soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall i < j, \quad (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Remarque

R 23 – Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

Propriété 9 : de la base orthonormalisée

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une base orthonormale de E.

Démonstration

- $1^{\text{ère}}$ **étape : Orthogonalisation**.
  - **On pose** $\boxed{\varepsilon_1 = e_1.}$ (Et alors $\varepsilon_1 \neq 0_E$.)
  - **On cherche** $\varepsilon_2 \in$ **Vect**(ε_1, e_2) **tel que** $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.
    On cherche donc un réel λ tel que $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ et $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$.

Donc $\lambda\|\varepsilon_1\|^2+(\varepsilon_1|e_2)=0$, puis $\lambda=-\dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}$.

Finalement, $\boxed{\varepsilon_2=e_2-\dfrac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1.}$

De plus, $\varepsilon_2\neq 0$ car (e_1,e_2) est une famille libre, et $\text{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\text{Vect}(e_1,e_2)$. (L'inclusion $\subset$ est immédiate, l'inclusion $\supset$ vient du fait qu'on puisse exprimer facilement e_2 comme combinaison linéaire de ε_1 et ε_2 : $e_2=\varepsilon_2+\frac{(\varepsilon_1|e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1$.)

⋆ Supposons, par récurrence, que l'on ait construit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}$ tels que
- $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
- pour tout entier $i\in[\![2,j-1]\!]$, $\text{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i)=\text{Vect}(e_1,\dots,e_i)$
- pour tout entier $i\in[\![2,j-1]\!]$, la composante de ε_i sur e_i est 1.

On cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j=e_j+\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i\in[\![1,j-1]\!]$: $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)=0$.

Donc, si $i\in[\![1,j-1]\!]$, $(\varepsilon_i|e_j)+\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k(\varepsilon_i|\varepsilon_k)=0$.

D'où $(\varepsilon_i|e_j)+\lambda_i\|\varepsilon_i\|^2=0$, puis $\lambda_i=-\dfrac{(\varepsilon_i|e_j)}{\|\varepsilon_i\|^2}$.

La récurrence est alors établie avec $\boxed{\varepsilon_j=e_j-\sum_{k=1}^{j-1}\dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k.}$

En effet :
- $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
- $\text{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j)=\text{Vect}(e_1,\dots,e_j)$.
  En effet, $\text{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})=\text{Vect}(e_1,\dots,e_{j-1})$, donc l'inclusion $\subset$ est immédiate et l'inclusion $\supset$ vient du fait que l'on puisse exprimer facilement e_j comme combinaison linéaire des ε_i, pour $i\in[\![1,j]\!]$: $e_j=\varepsilon_j+\sum_{k=1}^{j-1}\dfrac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$.
- La composante de ε_j sur e_j est 1.

On obtient n vecteurs non nuls orthogonaux en dimension n : $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une ***base orthogonale*** *de E.*

■ $2^{\text{ème}}$ **étape : Normalisation**.
On obtient alors très facilement un b.o.n. de E :

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).}$$

Remarque

R 24 – Matrice de passage de la base $(e_1,\dots,e_n)$ à la base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Base de la décomposition QR (exercice classique, cf TD).

Corollaire 3 : Existence de base orthonormale

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Démonstration

C'est en effet encore un espace euclidien, muni du produit scalaire restreint à ce sous-espace. ■

Corollaire 4 : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'orthonormalisation de Schmidt à cette famille libre complétée en une base : les vecteurs de la famille orthonormale seront inchangés. ■

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété 10 : Expression en base orthonormale

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ *un espace euclidien et* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une* **base orthonormale** *de* E : $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ *et* $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. *Alors*

$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad x_i=(e_i|x) \qquad (x|y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i=X^\top\times Y$$

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\sqrt{X^\top\times X} \qquad \mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

Démonstration

- Si $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}(e_i|x)&=\left(e_i\middle|\sum_{j=1}^n x_je_j\right)\\&=\sum_{j=1}^n x_j(e_i|e_j)\\&=\sum_{j=1}^n x_j\delta_{i,j}\\&=x_i\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x|y)&=\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\middle|\sum_{j=1}^n y_je_j\right)\\&=\sum_{i=1}^n x_i\left(e_i\middle|\sum_{j=1}^n y_je_j\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(e_i|e_j)\\&=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\delta_{i,j}\\&=\sum_{i=1}^n x_iy_i\end{aligned}$$

- $\|x\|^2=(x|x)=\sum_{i=1}^n x_i^2$, d'après ce qui précède. ■

Propriété 11 : Changement de base orthonormale

Soit E *euclidien,* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *des bases orthonormales.*

(i) *Si* $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1}=P^\top$.

(ii) *Si* $u\in\mathscr{L}(E)$, *la formule de changement de base s'écrit*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=P^\top\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$ *: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.*

Remarque

R 25 – ⚠ La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

R 26 – Faciles, les changements de bases orthonormales !!!

Démonstration

(i) $P_{i,j} = \left(e_i \middle| e'_j\right)$ (coordonnée de e'_j selon e_i.)

$(P^{-1})_{i,j} = \left(e'_i \middle| e_j\right) = \left(e_j \middle| e'_i\right) = P_{j,i} = (P^{\top})_{i,j}$.

(ii) Immédiat.

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \det P$ or $PP^{\top} = I_n$ donc $(\det P)^2 = 1$. ■

3 Isomorphisme avec le dual (MPI)

Théorème 4 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

Propriété 12 : Indépendance du déterminant en base orthonormale directe

*Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale **directe** de E, $\det_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

Démonstration

$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' \det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}$. ■

Définition 14 : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1, \dots, v_n]$, pour $v_1, \dots, v_n \in E$.

Propriétés 1 : du produit mixte

(i) $(v_1,\dots,v_n)\mapsto[v_1,\dots,v_n]$ *est une forme* n*-linéaire alternée sur* E.

(ii) *Si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est une bond,* $[e_1,\dots,e_n]=1$ *et si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est une boni,* $[e_1,\dots,e_n]=-1$ *(réciproque fausse).*

(iii) $[v_1,\dots,v_n]=0$ *si et seulement si* $(v_1,\dots,v_n)$ *est liée.*

(iv) *Si* $u\in\mathscr{L}(E)$, $[u(v_1),\dots,u(v_n)]=\det u\times[v_1,\dots,v_n]$.

Remarque

R 27 – Comme, si E est de dimension 3 et $x,y\in E$, $[x,y,\cdot]\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, avec l'isomorphisme de la partie précédente, il existe une unique vecteur $a\in E$ tel que pour tout $z\in E$, $[x,y,z]=(a|z)$. Ce vecteur a est appelé **produit vectoriel** de x et y, noté $x\wedge y$.
On a alors $[x,y,z]=(x\wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

Propriété 13 : Interprétation géométrique du déterminant

Soit E *euclidien orienté.*

(i) *Si* $\dim E=2$, $[\vec u,\vec v]$ *représente le volume orienté du parallélogramme construit sur* $\vec u$ *et* $\vec v$.

(ii) *Si* $\dim E=3$, $[\vec u,\vec v,\vec w]$ *représente le volume orienté du parallélépipède construit sur* $\vec u$, $\vec v$ *et* $\vec w$.

Démonstration

C'est évident si $\vec u,\vec v$ (respectivement $\vec u,\vec v,\vec w$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E=2$, soit (e_1,e_2) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(\vec u,\vec v)$. Alors $\vec u=ce_1$ et $\vec v=de_1+he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec u,\vec v]=ch[e_1,e_2]=\pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E=3$, soit (e_1,e_2,e_3) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec u,\vec v,\vec w)$. Alors $\vec u=ce_1$, $\vec v=de_1+he_2$ et $\vec w=xe_1+ye_2+He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec u,\vec v,\vec w]=chH[e_1,e_2,e3]=\pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec u$, $\vec v$ et $\vec w$.

■

5 Propriétés de $F^\perp$

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F *est un sev de* **dimension finie** *de* E *préhilbertien réel, alors*

$$E=F\oplus F^\perp=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ *est alors appelé* **supplémentaire orthogonal** *de* F*, il est unique.*

Démonstration

- Si $F=\{0_E\}$, on a vu que $F^\perp=E$ et alors le résultat est immédiat.
- De même, si $F=E$, on a vu que $F^\perp=\{0_E\}$ et alors le résultat est immédiat.
- Sinon, on a déjà que $F\cap F^\perp=\{0_E\}$.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, et $y=\sum_{i=1}^{p}(e_i|x)e_i\in F$, $x=y+(x-y)$ avec

$x-y\in F^\perp$ car pour tout i, $(x-y|e_i)=0$.
D'où le résultat.

Unicité : Si $E=F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors F et G sont orthogonaux, donc, si E est de dimension finie, $G\subset F^\perp$ et $\dim G=\dim E-\dim F=\dim F^\perp$, donc $G=F^\perp$.

Si E n'est pas de dimension finie ? si $x\in F^\perp$, $x=x_F+x_G$ et $x_F=x-x_G\in F\cap F^\perp=\{0_E\}$ donc $x=x_G\in G$ et $G=F^\perp$.

Corollaire 5 : Propriété de l'orthogonal en dimension finie

*Soit E un espace **euclidien**, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(*i*) $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$

(*ii*) $\left(F^\perp\right)^\perp=F$

(*iii*) $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

(*iv*) $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$

Remarque

R 28 – On retiendra qu'**en dimension finie**, il n'y a plus trop de problème.

Démonstration

(i) : Vu dans la précédente démonstration.
(ii) : Une inclusion connue et dimensions.
(iii) et (iv) : $F^\perp \overset{\perp}{\oplus} F=E$: unicité du supplémentaire orthogonal de $F^\perp$.

$F^\perp\cap G^\perp\subset(F+G)^\perp$ est direct.

Donc $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$. (Vrai même s'ils ne sont pas de dimension finie.)

Puis $(F\cap G)^\perp=\left(F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp}\right)^\perp=\left((F^\perp+G^\perp)^\perp\right)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

Exercice 7 : CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. **Soit A un sous-espace vectoriel de E.**
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.
2. **Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.**
   (a) **Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.**
   (b) **Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.**

---

1. On a $A\subset\left(A^\perp\right)^\perp$. (*)
   En effet, $\forall x\in A, \forall y\in A^\perp, (x\mid y)=0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x\in A,\ x\in(A^\perp)^\perp$.
   Comme E est un espace euclidien, $E=A\oplus A^\perp$ donc $\dim A=n-\dim A^\perp$.

   De même, $E=A^\perp\oplus\left(A^\perp\right)^\perp$ donc $\dim\left(A^\perp\right)^\perp=n-\dim A^\perp$.
   Donc $\dim\left(A^\perp\right)^\perp=\dim A$. (**)
   D'après (*) et (**), $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.
   Prouvons que $F^\perp\cap G^\perp\subset(F+G)^\perp$.

   Soit $x\in F^\perp\cap G^\perp$.
   Soit $y\in F+G$.
   Alors $\exists\,(f,g)\in F\times G$ tel que $y=f+g$.

$$(x\mid y)=\underbrace{(x\mid f)}_{\substack{=0\\ \text{car } f\in F \text{ et } x\in F^{\perp}}}+\underbrace{(x\mid g)}_{\substack{=0\\ \text{car } g\in G \text{ et } x\in G^{\perp}}}=0.$$

Donc $\forall\, y\in(F+G)$, $(x\mid y)=0$.
Donc $x\in(F+G)^{\perp}$.
Prouvons que $(F+G)^{\perp}\subset F^{\perp}\cap G^{\perp}$.

Soit $x\in(F+G)^{\perp}$.
$\forall\, y\in F$, on a $(x\mid y)=0$ car $y\in F\subset F+G$.
Donc $x\in F^{\perp}$.
De même, $\forall\, z\in G$, on a $(x\mid z)=0$ car $z\in G\subset F+G$.
Donc $x\in G^{\perp}$.
On en déduit que $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$.

(b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}=\left(F^{\perp}\right)^{\perp}\cap\left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.

Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}=F\cap G$.
Donc $\left(\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}=(F\cap G)^{\perp}$.
C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp}+G^{\perp}=(F\cap G)^{\perp}$.

Exercice 8 : CCINP 92

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B)\in E^2$, $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. **Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.**
2. **On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.**
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA=-A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) **Prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.**
   (b) **Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp}=S_n(\mathbb{R})$.**
3. **Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.**
   Déterminer $F^{\perp}$.

---

1. $\langle\,,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
   De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
   $\forall (A,B)\in E^2$, $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}({}^tAB)=\operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right)=\operatorname{tr}({}^tBA)=\langle B,A\rangle$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est symétrique.
   On en déduit que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)
   Soit $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.

   $\langle A,A\rangle=\operatorname{tr}({}^tAA)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}({}^tAA)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}({}^tA)_{i,k}A_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}^2$ donc $\langle A,A\rangle\geqslant 0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est positive. (2)
   Soit $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$ telle que $\langle A,A\rangle=0$.

   Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}^2=0$. Or, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2\geqslant 0$.
   Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}=0$. Donc $A=0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est définie. (3)
   D'après (1),(2) et (3), $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   Remarque importante : Soit $(A,B)\in E^2$.

   On pose $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=\left(B_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Alors $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left({}^tA\right)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}B_{k,i}$.
Donc $\langle,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)
Soit $M \in E$.
Posons $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.
On a $M = S + A$.
${}^tS = {}^t\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + {}^t({}^tM)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
${}^tA = {}^t\left(\dfrac{M - {}^tM}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - {}^t({}^tM)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)
D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tSA) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-{}^tAS) = -\mathrm{tr}({}^tAS) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle$.
Donc $2\langle S, A\rangle = 0$ soit $\langle S, A\rangle = 0$.
On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. (2)
D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,j} = \left(e_{k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On a alors $F = \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}\right)$.
Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \langle M, E_{i,i}\rangle = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], m_{i,i} = 0$.
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

6 Projections et symétries orthogonales

a Projections orthogonales

Définition 15 : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.
On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque

R 29 – Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^\perp$.

Propriété 14 : des projections orthogonales

(i) $p_F \in \mathscr{L}(E)$

(ii) $p_F^2 = p_F$

(iii) $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$

(iv) $F^\perp = \operatorname{Ker} p_F$

(v) $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$

(vi) $\forall x \in E, \quad p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Remarque

R 30 – Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seule vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pratique pour le trouver !

Exercice 9 : CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. **Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.**
2. **Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.**

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

---

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
   On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0,2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(|)$ est positive. (**)
   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0,2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0,2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(|)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).
   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

Propriété 15 : Expression en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1,\dots,e_p)$ une ***base orthonormale*** *de F. Alors*

$$\forall x \in E,\quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$$

Démonstration

D'après la démonstration du supplémentaire orthogonal. ■

Remarque

R 31 – On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \tag{1}$$

Donc, si l'on note $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de e_j dans $F^\perp \oplus F$. Donc $\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k = p_F(e_j)$.

De plus, ici $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\middle| e_j\right)\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1}\frac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et

$$p_D : x \mapsto \left(\tfrac{1}{\|a\|}a\middle|x\right)\left(\tfrac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)

- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.

$$p_H : x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

Pour la projection sur un hyperplan, si on nomme D la droite $\mathbb{R}a = H^\perp$, on a que $E = H \overset{\perp}{\oplus} D$ et

$$id_E = p_H + p_D = p_H + \frac{(a|\cdot)}{\|a\|^2}a. \quad ■$$

Exemple

E 7 – Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de p_P ? Vecteur normal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big) = (x,y,z) - \frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, $p_P(e2) = e_2$ et $p_P(e3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

R 32 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Im}(p_F)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n - p$ autres forment une base de $F^{\perp} = \mathrm{Ker}\, p_F$ et nous donnent les $n - p$ dernières colonnes nulles.

Propriété 16 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall\, x \in E,\quad \left\| p_F(x) \right\| \leqslant \|x\|$$

Démonstration

C'est le théorème de Pythagore : $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$ donc

$$\|x\|^2 = \left\| p_F(x) \right\|^2 + \left\| x - p_F(x) \right\|^2 \geqslant \left\| p_F(x) \right\|^2.$$

■

b Symétries orthogonales (MPI)

Définition 16 : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^{\perp}$.

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriété 17 : des symétries orthogonales

(i) $s_F \in \mathscr{L}(E)$

(ii) $s_F \circ s_F = id_E$

(iii) $\operatorname{Ker}(s_F - id_E) = F$

(iv) $\operatorname{Ker}(s_F + id_E) = F^\perp$

(v) $s_F = 2p_F - id_E$.

(vi) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

Exemple

E 8 – Symétrie orthogonale par rapport au plan P de l'exemple précédent.

Comme $s_P = 2p_P - id_{\mathbb{R}^3}$, on obtient l'expression générale

$$s_P\big((x,y,z)\big) = \big(z,y,x\big)$$

Et alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = 2\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) - I_3$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

R 33 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \operatorname{Ker}(s_F - id)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp = \operatorname{Ker}(s_F + id)$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes avec des -1 sur la diagonale.

À savoir retrouver :

- Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^\perp$.

$$\forall x \in E, \quad s_H(x) = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

$s_H(x) = 2p_H(x) - x = 2(x - p_{H^\perp}(x)) - x = x - 2p_{H^\perp}(x)$ ■

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \|x-y\|.$$

Propriété 18 : Expression de la distance à un sevdf

Soit F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** *d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.*

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F, et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x, p_F(x)) = \left\|x - p_F(x)\right\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \left\|x-y\right\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base orthonormale de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|p_{F^\perp}(x)\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Démonstration

Par théorème de Pythagore, si $y \in F$,

$$\left\|x - p_F(x) + p_F(x) - y\right\|^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x) - y\right\|^2.$$

Donc $\left\|p_F(x) - y\right\| \leqslant \left\|x-y\right\|$ avec égalité si et seulement si $\left\|p_F(x)-y\right\| = 0$ c'est-à-dire $y = p_F(x)$.

De plus,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x - p_F(x))^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2$$

car $(e_k|p_F(x)) = 0$ pour $k \geqslant p+1$. Et

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 = \|x\|^2 - \left\|p_F(x)\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2$$

par théorème de Pythagore. ■

Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Remarque

R 34 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp, F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).

On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x,F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^\perp$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 10 : CCINP 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.**
3. **Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.**
4. **Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.**

---

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

Exercice 11 : CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. **Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.**

1. On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = (a+a')a'' + (b+b')b'' + (c+c')c'' + (d+d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A|B)$.
   On en déduit que $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(.|.)$ est symétrique.
   Donc $(.|.)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

   $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(.|.)$ est positive. (**)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.

   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(.|.)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\forall (a,b,d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 0$.

   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A,F) = ||A - p_F(A)|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|| = 1$.

Corollaire 6 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.
Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une équation de H dans une base $\mathscr{B}$ de E et si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$