21

Limite, continuité, compacité et connexité par arcs

On se donne $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$, $(G,\|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I Limite

1 Limite en un point

Soit $f \in F^A$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$.

Définition 1 : Limite en un point

On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in A$,

$$d_E(x,a) = \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow d_F(f(x),b) = \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Propriété 1 : Convergente ⇒ localement bornée

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 2 : Caractérisation séquentielle

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$.

Propriété 3 : Unicité de la limite

Si $f \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $f \xrightarrow[x\to a]{} b'$, alors $b = b'$.

Propriété 4 : Limite par majoration de la différence

Si $g \in \mathbb{R}^A$ telle que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x)-b\| \leqslant g(x)$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Propriété 5 : Limites de normes

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $\|f(x)\|_F \xrightarrow[x\to a]{} \|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété 6 : Limite coordonnée à coordonnée

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de F, $f \in F^A$, $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in F$.

On note $f_k \in \mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_k(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_k$.

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété 7

Si $(F_1,N_1),\dots,(F_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1\times\cdots\times F_p$ de la norme produit N.

Si $f \in (F_1\times\cdots\times F_p)^A$, $a \in \overline{A}$. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $f_i \in F_i^A$ tel que $f : x \mapsto (f_1(x),\dots,f_p(x))$.

Soit $b = (b_1,\dots,b_p) \in F_1\times\cdots\times F_p$.

Alors $f \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_i$.

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété 8 : Opérations sur les limites

Soient $f,g \in F^A$, $h \in \mathbb{K}^A$ telles que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in F$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b' \in F$, $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+\lambda g \xrightarrow[x\to a]{} b+\lambda b'$.*

(ii) *$h(x)\cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha\cdot b$.*

(iii) *Si $\alpha \neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\alpha}$.*

Propriété 9 : Compositions de limites

Si $f \in F^A$, telle que $f(A) \subset B$, $g \in G^B$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in G$ tels que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$ alors $g\circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$.

5 Extension à l'infini

Définition 2 : Limite pour $\|x\| \to +\infty$

Si A non bornée, $f \in F^A$, $b \in F$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E \to +\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \ \|x\|_E \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition 3 : Limite vectorielle en $+\infty$

Si $A \subset \mathbb{R}$, $f \in F^A$, $b \in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \ x \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} b$ lorsque $f(-x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \ x \leqslant M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition 4 : Limite infinie en un vecteur

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$

II Relations de comparaison

Définition 5 : Relations de comparaison

Soit $f, g \in F^A$ où A partie de E, $\varphi \in \mathbb{R}^A$, $a \in \overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap A, \ \|f(x)\|_F \leqslant M|\varphi(x)|.$$

Cela revient à dire que $\|f(x)\|_F = \mathcal{O}(|\varphi(x)|)$.

Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ ou encore $x \mapsto \dfrac{\|f(x)\|_F}{|\varphi(x)|}$ est bornée au voisinage de a.

- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap A, \ \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|.$$

Cela revient à dire que $\|f(x)\|_F = \mathrm{o}(|\varphi(x)|)$.

Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{\|f(x)\|_F}{|\varphi(x)|} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f(x) - g(x)$ est négligeable devant $\|f(x)\|_F$ ou devant $\|g(x)\|_F$ (cela revient au même) au voisinage de a :

$$f(x) - g(x) = \mathrm{o}(\|f(x)\|)_F \text{ ou } \mathrm{o}(\|g(x)\|)_F.$$

III Continuité

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition 6 : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.

f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété 10

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Propriété 11 : Caractérisations séquentielles

f est continue en a si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a, \ f(a_n) \to f(a)$$

si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a, \ (f(a_n)) \text{ converge.}$$

Propriété 12 : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

2 Continuité et topologie

Propriété 13 : Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Propriété 14 : Applications continues coïncidant sur une partie dense

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

3 Uniforme continuité

Définition 7 : Uniforme continuité

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,$

$$\|x-y\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété 15 : Uniformément continue ⇒ continue

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Propriété 16 : Opérations sur les applications uniformément continues

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

4 Fonctions lipschitziennes

Définition 8 : Fonction lipschitzienne

$f : A \subset E \to F$ est dite k-**lipschitzienne** sur A (où $k \in \mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall x, x' \in A,\quad \|f(x)-f(x')\|_F \leqslant k\|x-x'\|_E.$$

Propriété 17 : Lipschitzienne ⇒ continue

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Propriété 18 : Lispschziannité de la distance à une partie

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}\right.$ *est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

5 Applications linéaires

Propriété 19 : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *u est continue sur E.*

(*ii*) *u est continue en 0_E.*

(*iii*) **Il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$,**

$$\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E.$$

(*iv*) *u est lipschitzienne sur E.*

(*v*) *u est uniformément continue sur E.*

Notation 1

On note $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F) \cap \mathscr{C}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Méthode 1 : Étudier la continuité d'une application linéaire

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$... Sauf si on est en dimension finie **au départ** : dans ce cas, c'est automatique.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$) , ou encore, comme pour nier une domination de normes, une suite telle que $\left(\dfrac{\|u(x_n)\|_F}{\|x\|_E}\right)_n$ n'est pas bornée.

6 Applications multilinéaires

Propriété 20 : Continuité des applications multilinéaires

Si $E_1,\dots,E_p,F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ est multilinéaire, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *f est continue*

(*ii*) *Il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que*

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p,\quad \|f(x,\dots,x_p)\| \leqslant k\|x_1\|_1 \cdots \|x_p\|_p$$

Corollaire 1 : Continuité d'un produit scalaire

Si $(E,|)$ est un espace préhilbertien réel, alors $(x,y)\mapsto (x|y)$ est continue.

IV Dimension finie

1 Coordonnées

Propriété 21 : Continuité coordonnée à coordonnée

On suppose F de dimension finie $n>1$.

Soit A une partie non vide de E, $f\in F^A$, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de F. On pose $f=\sum_{k=1}^n f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, f_k est continue sur A.

2 Applications linéaires

Théorème 1 : Continuité des applications linéaires en dimension finie

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E.

Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E,F)=\mathscr{L}(E,F)$.

3 Applications polynomiales

Définition 9 : Applications polynomiales

Soit $f:E\to\mathbb{K}$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Pour $x\in E$, on note $x_1,\dots,x_p$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

f est dite **monomiale** s'il existe $k_1,\dots,k_p\in\mathbb{N}^p$ tels que $f:x\mapsto x_1^{k_1}\cdots x_p^{k_p}$.

f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Propriété 22 : polynomiale en dimension finie ⇒ continue

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

4 Applications multilinéaires

Propriété 23 : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E,\|\|_E)$, $(F,\|\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G,\|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E\times F$ dans G est continue.

Propriété 24 : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.

V Normes d'opérateurs

1 Cas des applications linéaires

Définition 10 : Norme subordonnée

On considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$. Si $u\in\mathscr{L}_c(E,F)$, on pose

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \|u\|_{\text{op}} = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\} = \sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Propriété 25 : Définition équivalente

Si $u\in\mathscr{L}_x(E,F)$,

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_F = \sup_{x\in S(0_E,1)}\|u(x)\|_F$$

.

Propriété 26 : C'est une norme

*$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ appelée **norme subordonnée** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On parle aussi de **norme d'opérateur**.*

Propriété 27 : Norme subordonnée d'une composée

On considère trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ et $(G,\|\cdot\|_G)$. Si $u\in\mathscr{L}_c(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}_c(F,G)$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{E,F}$ désigne la norme subordonnée sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ par exemple, alors

$$|\!|\!| v\circ u |\!|\!|_{E,F} \leqslant |\!|\!| v |\!|\!|_{F,G} |\!|\!| u |\!|\!|_{E,F}.$$

Corollaire 2 : Cas des endomorphismes

Ici, $E=F$. Si $u\in\mathscr{L}_c(E)$, on définit

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_E.$$

Alors $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E)$ qui vérifie $|\!|\!| \mathrm{id}_E |\!|\!| = 1$ et

$$\forall u,v\in\mathscr{L}_c(E),\quad |\!|\!| v\circ u |\!|\!| \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|\cdot|\!|\!| v |\!|\!|.$$

*On dit que $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est une **norme d'algèbre unitaire**.*

Propriété 28 : Puissance d'une norme subordonnée

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\!\left|\!\left| u^k \right|\!\right|\!\right| \leqslant |||u|||^k.$$

Méthode 2 : Calcul d'une norme subordonnée

Pour calculer la norme subordonnée d'un opérateur (ie d'une application linéaire), on écrit des majorations

$$\forall x \in E,\quad \|u(x)\|_F \leqslant \dots = \dots \leqslant \dots = \dots \leqslant k\|x\|_E$$

en effectuant des majorations les plus fines possibles et en distinguant clairement les majorations et les égalités, afin de pouvoir traiter plus facilement les cas d'égalité.

Soit on trouve au moins un cas d'égalité, c'est-à-dire un $x \in E$ tel que $\|u(x)\|_F = k\|x\|_E$, alors $k = |||u|||$ (et le $\sup$ est en fait un $\max$). On verra qu'en dimension finie, on peut toujours en trouver.

S'il n'y a pas de cas d'égalité, on peut chercher une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E\setminus\{0_E\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \to k$ et alors $k = |||u|||$ (car le $\sup$ est le seul majorant limite d'une suite de l'ensemble).

On peut aussi, pour tout $\varepsilon > 0$, chercher $x \neq 0_E$ tel que $\|u(x)\|_F \geqslant (k-\varepsilon)\|x\|_E$.

2 Traduction matricielle

Propriété 29 : Norme subordonnée matricielle

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On définit, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|||A||| = \sup_{X\neq 0_{n,1}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

*appelée **norme subordonnée** à $\|\cdot\|$.*

Il s'agit d'une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc vérifiant

$$|||I_n||| = 1$$
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad |||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||$$

ce qui implique

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \left|\!\left|\!\left| A^k \right|\!\right|\!\right| \leqslant |||A|||^k.$$

VI Compacité

1 Suites extraites

Définition 11 : Suite extraite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Propriété 30 : Limite d'une suite extraite convergente

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition 12 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Propriété 31 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Réciproque fausse.

Corollaire 3 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 32 : Condition suffisante de convergence

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

2 Parties compactes

Définition 13 : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence **dans** K, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite qui converge dans K.

Propriété 33 : compact ⇒ fermé et borné

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Propriété 34 : Partie fermée d'un compact

Soit K une partie compacte de E et A une partie de K. Si A est fermée, alors A est compacte.

Propriété 35 : Produit de compacts

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1,\|\cdot\|_1),\dots,(E_p,\|\cdot\|_p))$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1,p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \dots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

3 Fonctions continues sur des compacts

Propriété 36 : Image continue d'un compact

Si $f : K \to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors $f(K)$ est compacte.

Corollaire 4 : théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact de E, à valeur réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 2 : de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

4 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

On a déjà vu que les segments de $\mathbb{R}$ étaient des compacts de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Bolzano Weierstrß permet de démontrer le résultat suivant, généralisé un peu plus loin.

Théorème 3 : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire 5 : Compacts de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

b Équivalence des normes

Théorème 4 : Équivalence des normes en dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

c Compacts en dimension finie

Théorème 5 : Compacts en dimension finie

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Corollaire 6 : Traduction en terme de valeur d'adhérence

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 7 : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire 8 : important !

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

5 Suites convergente dans un compact

Propriété 37 : CNS de convergence dans un compact

Soit K un compact. Une suite d'éléments de K est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire 9 : CNS de convergence des suites bornées en dimension finie

***En dimension finie**, toute suite **bornée** converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

VII Connexité par arcs

1 Une relation d'équivalence

Définition 14 : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a, b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ϕ est continue
- $\forall t \in [0,1], \quad \phi(t) \in A$
- $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

Propriété 38 : Relation d'équivalence

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

2 Connexité par arcs

Définition 15 : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment.

Propriété 39 : Partition des composantes connexes

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Définition 16 : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A elle-même.

Propriété 40 : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition 17 : Partie étoilée

A est dite **étoilée** s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout point b de A, le segment $[a, b]$ est inclus dans A.

Propriété 41 : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété 42 : Connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété 43 : Image continue d'une partie connexe par arcs

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, A une partie connexe par arcs de E, $f : A \to F$ une application continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Corollaire 10 : Cas d'une fonction réelle, TVI

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un intervalle.

Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $f(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = \gamma$.

VIII TOPOLOGIE MATRICIELLE (HP)

Rien n'est explicitement au programme dans les exercices suivants, mais ils sont tous très classiques.

On est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, la convergence se fait cœfficient à cœfficient. On peut expliciter les normes usuelles

- $\|A\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|a_{i,j}\right|$,
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|a_{i,j}\right|^2} (= \operatorname{tr}\left(A \cdot A^\mathsf{T}\right)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\operatorname{tr}\left(A \cdot \overline{A}^\mathsf{T}\right)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C})$,
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|a_{i,j}\right|$

qui ne sont pas les plus pratiques car ce ne sont pas des normes d'algèbres vérifiant $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$. On leur préfère pour des applications pratiques (voir séries matricielles) des normes subordonnées sans nécessairement avoir à les expliciter. Voir TD pour des exercices sur ces normes subordonnées.

À retenir (et à savoir redémontrer au besoin) :

- le déterminant, la comatrice, l'application polynôme caractéristique sont continues ;
- $\mathscr{G}L_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, connexe par arc si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
- l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices carrées dans $\mathbb{C}$, dans l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$;
- $\mathscr{O}(n)$ est compact et non connexe par arc ;
- Des matrices réelles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.