Réduction et polynômes

- Si on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres sont à chercher parmi les racines de celui-ci.
- Les valeurs propres sont **les** racines du polynôme caractéristique et aussi celles du polynôme minimal. Mais attention, pour un autre polynôme annulateur, ce sont seulement **des** racines.
- Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX=\lambda X$ où $A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

  Pour utiliser les polynômes annulateurs, savoir exprimer simplement les blocs diagonaux d'un polynôme en une matrice diagonale ou triangulaire par blocs (c'est similaire au cas diagonal/triangulaire).
- Diagonalisabilité :
  - Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - Trouver un polynôme annulateur scindé simple est nécessaire et suffisant.
  - Si on a une décomposition en sous-espaces stable, u est diagonalisable si et seulement s'il l'est sur chaque sous-espace.
  - Lorsque A se présente par blocs, on peut aussi voir sur les blocs comment se traduit $P(A)$ pour un polynôme P.
  - Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant ou sous-espaces stables par une matrice.
- Trigonalisabilité :
  - Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
  - Être trigonalisable, c'est être annulé par un polynôme scindé.
- Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux sont d'un usage fréquent (et ils vont souvent ensemble).

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Si $A^2-3A+2I_n=0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

2 Résoudre $y^{(4)}=y$ dans $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, en posant u l'opérateur de dérivation.

3 Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 **CCINP 65** **5** **CCINP 91** **6** **CCINP 88** **7** **CCINP 93**

2. Un grand classique

8 **Réduction simultaneé**

1. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables.
   Démontrer qu'il y a équivalence entre
   (i) u et v sont simultanément diagonalisables (c'est-à-dire diagonalisables dans une même base, soit encore il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v).
   (ii) u et v commutent.
   (iii) Chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
   Reformuler $(i)\Longleftrightarrow(ii)$ en termes de matrices.
2. Dans cette question, le corps de base est $\mathbb{C}$. On suppose que u et v commutent, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.
   Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.
3. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

3. Polynômes annulateurs

9 Soit $M=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M et I_3. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer sans calcul le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M.
3. Calculer M^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

10 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2+A^\intercal=I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.

11 **Oral CCINP** Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$, $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^3=u$. Montrer que u est diagonalisable et décrire les sous-espaces de E stables par u.

12 Déterminer les matrices $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3-3A^2+2A=0$, $\operatorname{tr}A=3$ et A est non inversible.

13 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\Phi_A\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\Phi_A(M)=AM$. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

14 Sur $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D:f\mapsto f'$.

1. Si $f,g\in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g.
2. Si $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose $e_\lambda:t\mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m\left(\mathrm{e}_{-\lambda}f\right)=(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m$.
4. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_ny^{(n)}+\cdots+a_0y=0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t\mapsto t^k\mathrm{e}^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.

15 **Oral Mines** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k\geqslant 2$.

Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

16 Existe-t-il dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant pour polynôme minimal X^2+1 ?

17 **Oral CCINP** Soient $A,B\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B=A^p$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

18 **Oral CCINP** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de u vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

Montrer que $\operatorname{Ker}u^2=\operatorname{Ker}u$, $\operatorname{Im}u^2=\operatorname{Im}u$ puis que l'image et le noyau de u sont supplémentaires dans E.

19 **Oral CCINP** Soient $n\geqslant 2, A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M)=\operatorname{tr}(A)M-\operatorname{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace. Étudier la réduction de l'endomorphisme f et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

20 Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$. La matrice $\left(a_ia_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est-elle diagonalisable ?

21 **Oral Centrale** Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^5=M^2$ et $\operatorname{tr}M=n$

22 Soit $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p=0_n$.

1. Montrer que $I_n+A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose $H=\{I_n+P(B),\ P\in\mathbb{C}[X],P(0)=0\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{C}),\times)$.

4. Réduction par blocs

23 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M=\begin{pmatrix}3B&B\\-2B&0\end{pmatrix}$.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M'=\begin{pmatrix}B&0\\0&2B\end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

24 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M.

25 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A=0$.

5. Exercices X-ENS

27 Soit $\mathscr{B}=\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ u \text{ bornée}\}$ et $T:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
Que dire d'un sous-espace de dimension finie stable par T ?

28 **Décomposition de Dunford**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'existence d'un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E tel que

(i) $u=d+n$;
(ii) d et n commutent ;
(iii) d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

29 **Endomorphismes semi-simples**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est **semi-simple** si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

1. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est diagonalisable ;
   (ii) χ_u est scindé et u est semi-simple.
2. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est semi-simple ;
   (ii) le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré.

30 **Endomorphismes cycliques**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$. On définit

$$I=\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)=0\} \quad \text{et} \quad I_x=\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x)=0\}.$$

1. Montrer l'existence de polynômes unitaires non nuls π et π_x tels que $I=\pi\mathbb{K}[X]$ et $I_x=\pi_x\mathbb{K}[X]$. Montrer que π_x divise π.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x=\mu$.
3. On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $E=\mathrm{Vect}\big(u^k(x)\big)_k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi=\chi_u$.
4. Montrer que u est cyclique si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

31 **Endomorphismes simples**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que u est **simple** lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont triviaux.
Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) u est simple ;
(ii) Le polynôme caractéristique χ_u de u est irréductible sur K.